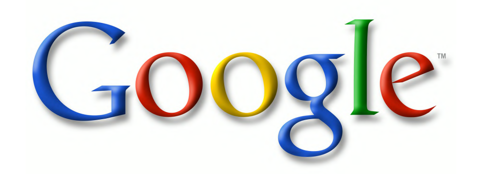

Google


Stanford University Libraries

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Als Fortsetzung des von

A. L. Crelle

gegründeten Journals

herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Steiner, Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass

von

C. W. Borchardt.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.

Fünf und funfzigster Band.

In vier Heften.

Berlin, 1858.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

Inhalts-Verzeichniss des fünf und funfzigsten Bandes.

1.

Über die Substitution

$$(ax^2+2bx+c)y^2+2(a'x^2+2b'x+c')y+a''x^2+2b''x+c''=0$$

und über die Reduction der *Abel*schen Integrale erster Ordnung in die Normalform *).

(Aus den hinterlassenen Papieren von *C. G. J. Jacobi* mitgetheilt durch Herrn *F. Richelot.*)

Die allgemeinste Relation zwischen zwei Variabeln, in welcher keine den zweiten Grad übersteigt, ist

$$(1.)\quad (ax^2+2bx+c)y^2+2(a'x^2+2b'x+c')y+(a''x^2+2b''x+c'')$$
$$= (ay^2+2a'y+a'')x^2+2(by^2+2b'y+b'')x+(cy^2+2c'y+c'') = 0.$$

Es folgen aus ihr die beiden Gleichungen

$$(2.)\quad \begin{cases} (ax^2+2bx+c)y+a'x^2+2b'x+c' \\ = \sqrt{\{(a'x^2+2b'x+c')^2-(ax^2+2bx+c)(a''x^2+2b''x+c'')\}}, \\ (ay^2+2a'y+a'')x+by^2+2b'y+b'' \\ = \sqrt{\{(by^2+2b'y+b'')^2-(ay^2+2a'y+a'')(cy^2+2c'y+c'')\}}, \end{cases}$$

ferner hat man durch ihre Differentiation

$$\{(ay^2+2a'y+a'')x+by^2+2b'y+b''\}dx$$
$$+\{(ax^2+2bx+c)y+a'x^2+2b'x+c'\}dy = 0,$$

und daher die Differentialgleichung

$$(3.)\quad \frac{dx}{\sqrt{\{(a'x^2+2b'x+c')^2-(ax^2+2bx+c)(a''x^2+2b''x+c'')\}}}$$
$$+\frac{dy}{\sqrt{\{(by^2+2b'y+b'')^2-(ay^2+2a'y+a'')(cy^2+2c'y+c'')\}}} = 0.$$

---

*) Ich habe mir erlaubt, den Zusatz „und über die Reduction der *Abel*schen Integrale erster Ordnung in die Normalform" zu dem von *Jacobi* gegebenen Titel dieser Note zu machen, weil darin in der That das Princip zur Reduction eines beliebigen solchen Integrals, welches *Jacobi* in seinem Aufsatz *Abel*sches Integral erster Klasse nennt, enthalten ist. Andrerseits behalte ich mir vor, eine längst vollendete Arbeit von mir, worin diese vollständige Reduction in den 3 Fällen von einem, zwei oder drei Paaren imaginärer conjugirter Faktoren des Ausdrucks geleistet wird, so bald als möglich bekannt zu machen. *R.*

Ich werde die beiden Functionen unter den Wurzelzeichen mit

$$(4.)\quad \begin{cases} X = (a'x^2+2b'x+c')^2-(ax^2+2bx+c)(a''x^2+2b''x+c''), \\ Y = (by^2+2b'y+b'')^2-(ay^2+2a'y+a'')(cy^2+2c'y+c'') \end{cases}$$

bezeichnen. Die Gleichungen (2.) zeigen, dafs die zwischen den Gröfsen x und y aufgestellte Relation von der Beschaffenheit ist, *dafs wenn für einen reellen Werth von x auch $\sqrt{X}$ reell ist, zugleich y und $\sqrt{Y}$, und umgekehrt, wenn für einen reellen Werth von y auch $\sqrt{Y}$ reell ist, zugleich x und $\sqrt{X}$ reell werden.* Wenn man daher die Gleichung (1.) zur Transformation von Integralausdrücken $\int \frac{P\,dx}{\sqrt{X}}$ benutzt, in welchen P eine rationale Function von x ist, so wird, wofern nur der vorgelegte Ausdruck während der Integration reell bleibt, immer auch der transformirte Ausdruck reell bleiben, so dafs es keiner weiteren Discussion der Grenzen bedarf. Da in den Formeln (2.) in Bezug auf die Coefficienten a, b, etc. keine Wurzelausziehung stattfindet, so kann man von diesen Formeln eine Anwendung auf die Zahlentheorie machen, indem man annimmt, dafs a, b etc. ganze Zahlen sind. Man erhält dann den Satz,

dafs wenn für einen rationalen Werth von x der Ausdruck

$$(a'x^2+2b'x+c')^2-(ax^2+2bx+c)(a''x^2+2b''x+c'')$$

ein Quadrat wird, man immer auch die Function

$$(by^2+2b'y+b'')^2-(ay^2+2a'y+a'')(cy^2+2c'y+c'')$$

durch einen rationalen Werth von y zu einem Quadrat machen kann.

In dem besondern Falle, wenn $a'=b'=c'=0$, erhält man hieraus den Satz:

Wenn eine Function 4[ter] Ordnung, deren Coefficienten ganze Zahlen sind, zu einem Quadrat gemacht werden soll, so kann man für den Fall, wenn die Function in zwei rationale Factoren zerfällt ist, die Aufgabe immer auf den Fall zurückführen, in welchem die ungeraden Potenzen fehlen.

Man kann nämlich von den beiden Ausdrücken

$$-(ax^2+2bx+c)(a''x^2+2b''x+c'')$$

und

$$(by^2+b'')^2-(ay^2+a'')(cy^2+c'')$$

den einen immer zu einem Quadrat machen, wenn man den andern zu einem Quadrat machen kann. Dieser Satz entspricht der Reduction des Integrals

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-(ax^2+2bx+c)(a''x^2+2b''x+c'')}}$$

auf die Form

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\{(by^2+b'')^2-(ay^2+a'')(cy^2+c'')\}}},$$

welche *Legendre* durch die Substitution

$$y^2 = -\frac{a''x^2+2b''x+c''}{ax^2+2bx+c}$$

bewerkstelligt, die für den Fall, wo $a' = b' = c' = 0$, aus (1.) folgt. Setzt man noch $b = b'' = 0$, so werden die beiden Ausdrücke, die auf einander reducirt werden können,

$$-(ax^2+c)(a''x^2+c'') \quad \text{und} \quad -(ay^2+a'')(cy^2+c'');$$

die Gleichungen (2.) zeigen nämlich, dafs y und $\sqrt{Y}$ immer rational durch x und $\sqrt{X}$ ausgedrückt werden kann, und umgekehrt.

Euler hat nur den Fall betrachtet, wenn die Functionen X und Y dieselben Functionen respective von x und y sind, oder wenn man

$$a' = b, \qquad a'' = c, \qquad b'' = c'$$

hat, und hieraus seine berühmten Additionstheoreme für die elliptischen Integrale der drei Gattungen abgeleitet, ohne dafs er dazu der Reductionen auf die jetzt übliche Form dieser Integrale bedurfte. Die allgemeinere Form hat *Lagrange* in den *Turiner Memoiren* von 1784 und 1785 aufgestellt. Da dort aber nicht aller Nutzen aus der Substitution (1.) gezogen ist, welchen man aus derselben ziehen kann, so will ich noch einige Bemerkungen über die Anwendungen, welche man von dieser Substitution machen kann, hinzufügen.

Da durch die Function X die drei Trinome

$$ax^2+2bx+c, \qquad a'x^2+2b'x+c', \qquad a''x^2+2b''x+c''$$

nicht vollkommen bestimmt sind, so kann man die willkührlich bleibenden Bestimmungen dazu benutzen, *dafs in Y die ungeraden Potenzen fortfallen,* wie wenn man, was erlaubt ist,

$$a' = b' = c' = 0$$

setzt, oder auch dazu, *dafs der erste und letzte Term von Y gleichzeitig verschwindet.* Setzt man im zweiten Falle $y = z^2$, so erhält das Resultat dieselbe Form, wie im ersten Falle. *Die Vergleichung dieser beiden Resultate giebt die Transformation.* Nimmt man an, dafs in dem Ausdrucke von X bereits die ungeraden Potenzen fehlen, und schafft man den ersten und letzten Term fort, indem dagegen wieder die ungeraden Potenzen eingeführt werden, so erhält man die Tansformation sogleich in der reducirten

Form selbst. *Euler* hat diese beiden Wege zur Reduction des Integrals, die directe Fortschaffung der ungeraden Potenzen und die Fortschaffung des ersten und letzten Terms und nachherige Einführung des Quadrats einer neuen Variabeln angegeben, und er mufste hierdurch auf die Transformation kommen, wenn er sich nur die Aufgabe gestellt hätte. Dieselbe Idee ist für mich leitend gewesen, als ich die Transformation der *Abel*schen Integrale suchte. Denn durch eine Substitution von der Form

$$x = \frac{m+ny}{1+y}$$

kann man das Integral

$$\int \frac{(fx+g)\,dx}{\sqrt{(\alpha x^6+\beta x^5+\gamma x^4+\delta x^3+\varepsilon x^2+\zeta x+\eta)}},$$

wenn man die Function unter dem Wurzelzeichen in zwei Factoren der 4ten und 2ten Ordnung zerfällt, in die Form

$$\int \frac{(f'y+g')\,dy}{\sqrt{(\alpha'y^4+\beta'y^2+\gamma')}\sqrt{(ay^2+2by+c)}}$$

bringen, und durch eine ähnliche Substitution, in der man aber die neuen Variabeln als Quadrate einführt

$$x = \frac{p+qz^2}{1+z^2},$$

kann man dasselbe Integral in die Form

$$\int \frac{(f''z^2+g'')\,dz}{\sqrt{(\alpha''z^8+\beta''z^6+\gamma''z^4+\delta''z^2+\varepsilon'')}}$$

bringen. Gelingt es nun durch Substitution einer rationalen Function von t^2 für y^2 die Differentialausdrücke

$$\frac{(f'y+g')dy}{\sqrt{(ay^2+2by+c)}} - \frac{(f'y-g')\,dy}{\sqrt{(ay^2-2by+c)}},$$

$$\frac{(f'y+g')\,dy}{\sqrt{(ay^2+2by+c)}} + \frac{(f'y-g')dy}{\sqrt{(ay^2-2by+c)}},$$

so zu transformiren, dafs die ungeraden Potenzen herausgehen, und dadurch die erste Form des reducirten Integrals in Integrale von der Form

$$\int \frac{(f'''t^2+g''')\,dt}{\sqrt{(\alpha'''t^8+\beta'''t^6+\gamma'''t^4+\delta'''t^2+\varepsilon''')}}$$

zu verwandeln, so war ich gewifs durch Vergleichung der beiden auf verschiedenem Wege erhaltenen Reductionen eine Transformation des *Abel*schen Integrals zu erhalten, ähnlich der *Landen*schen für die elliptischen Integrale.

Wenn man für den Zähler $f'y+g'$ die Gröfse $ay+b$ setzt, so wird der zu transformirende Ausdruck das Differential einer Gröfse

$$2t = \sqrt{(ay^2+2by+c)}-\sqrt{(ay^2-2by+c)},$$

und man sieht leicht, dafs y^2 eine rationale Function von t^2 wird. Man erhält nämlich nach einander die Formeln

$$2t^2 = ay^2+c-\sqrt{\{(ay^2+c)^2-4b^2y^2\}},$$
$$t^4-(ay^2+c)t^2+b^2y^2 = 0$$

und daher

$$y^2 = t^2\cdot\frac{c-t^2}{b^2-at^2}.$$

Hieraus folgt aber sogleich

$$(5.)\quad \frac{dy}{\sqrt{(\alpha'y^4+\beta'y^2+\gamma')}}\left\{\frac{ay+b}{\sqrt{(ay^2+2by+c)}}-\frac{ay-b}{\sqrt{(ay^2-2by+c)}}\right\}$$
$$= \frac{2dt}{\sqrt{(\alpha'y^4+\beta'y^2+\gamma')}} = \frac{2(b^2-at^2)\,dt}{\sqrt{\{\alpha't^4(t^2-c)^2+\beta't^2(t^2-c)(at^2-b^2)+\gamma'(at^2-b^2)^2\}}},$$

welches ein Ausdruck von der verlangten Form ist. Es ergiebt sich aber eine ähnliche Formel für jeden Zähler $fy+g$.

Es ist nämlich

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{(ay^2-2by+c)}}-\frac{1}{\sqrt{(ay^2+2by+c)}}}{\frac{1}{\sqrt{(ay^2-2by+c)}}+\frac{1}{\sqrt{(ay^2+2by+c)}}} = \frac{t^2}{by},$$

und daher

$$2b\,dt = -aby\,dy\left\{\frac{1}{\sqrt{(ay^2-2by+c)}}-\frac{1}{\sqrt{(ay^2+2by+c)}}\right\}$$
$$+b^2dy\left\{\frac{1}{\sqrt{(ay^2+2by+c)}}+\frac{1}{\sqrt{(ay^2-2by+c)}}\right\}$$
$$= (b^2-at^2)\left\{\frac{dy}{\sqrt{(ay^2+2by+c)}}+\frac{dy}{\sqrt{(ay^2-2by+c)}}\right\}$$

Man erhält hieraus

$$\frac{dy}{\sqrt{(ay^2+2by+c)}}+\frac{dy}{\sqrt{(ay^2-2by+c)}} = \frac{2b\,dt}{b^2-at^2},$$
$$\frac{y\,dy}{\sqrt{(ay^2-2by+c)}}-\frac{y\,dy}{\sqrt{(ay^2+2by+c)}} = \frac{2t^2dt}{b^2-at^2}.$$

Bezeichnet man daher in (5.) die gerade Funktion der 8ten Ordnung von t, die sich unter dem Wurzelzeichen befindet, mit T, so dafs

$$\sqrt{T} = (b^2-at^2)\sqrt{(\alpha'y^4+\beta'y^2+\gamma')},$$

so ergeben sich die Gleichungen

$$\frac{dy}{\sqrt{(\alpha' y^4+\beta' y^2+\gamma')}}\left\{\frac{1}{\sqrt{(ay^2+2by+c)}}+\frac{1}{\sqrt{(ay^2-2by+c)}}\right\}=\frac{2b\,dt}{\sqrt{T}},$$

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{(\alpha' y^4+\beta' y^2+\gamma')}}\left\{\frac{1}{\sqrt{(ay^2-2by+c)}}-\frac{1}{\sqrt{(ay^2+2by+c)}}\right\}=\frac{2t^2dt}{\sqrt{T}}.$$

Setzt man

$$2t' = \sqrt{(ay^2+2by+c)}+\sqrt{(ay^2-2by+c)},$$

so erhält man ganz auf dieselbe Art

$$\frac{dy}{\sqrt{(\alpha' y^4+\beta' y^2+\gamma')}}\left\{\frac{1}{\sqrt{(ay^2-2by+c)}}-\frac{1}{\sqrt{(ay^2+2by+c)}}\right\}=\frac{2b\,dt'}{\sqrt{T'}},$$

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{(\alpha' y^4+\beta' y^2+\gamma')}}\left\{\frac{1}{\sqrt{(ay^2+2by+c)}}+\frac{1}{\sqrt{(ay^2-2by+c)}}\right\}=\frac{2t'^2dt'}{\sqrt{T'}},$$

wo T' dieselbe Function von t' wie T von t ist.

Die Combination beider Substitutionen giebt

$$\frac{(f'y+g')\,dy}{\sqrt{(\alpha' y^4+\beta' y^2+\gamma')}\sqrt{(ay^2+2by+c)}}=\frac{(bg'-f't^2)\,dt}{\sqrt{T}}-\frac{(bg'-f't'^2)\,dt'}{\sqrt{T'}}.$$

Der oben gefundene Differentialausdruck

$$\frac{(f''z^2+g'')\,dz}{\sqrt{Z}},$$

wo Z eine ganze Funktion 8ter Ordnung von z ist, wird auf diese Weise gleich dem Aggregat zweier Ausdrücke von ähnlicher Form gefunden,

$$\frac{(f''z^2+g'')\,dz}{\sqrt{Z}}=\frac{(bg'-f't^2)\,dt}{\sqrt{T}}-\frac{(bg'-f't'^2)\,dt'}{\sqrt{T'}},$$

und diese Vergleichung der auf doppeltem Wege erhaltenen Reductionen ist es, wodurch sich eine Transformation der *Abel*schen Integrale ergiebt, welche die den elliptischen Integralen zunächst stehende Gattung bilden.

Da die weitere Ausbildung der hier angegebenen Substitution bei der grofsen Complication des Gegenstandes eine anhaltende Beschäftigung erforderte, zu welcher mir selbst mehrere andere Arbeiten nicht die gehörige Mufse gewährten, so hatte ich die glückliche Idee, dieselbe meinem Schüler und Freunde, Herrn Prof. ***Richelot*** zu übergeben, unter dessen Händen sie dieselbe Vollendung erhielt, welche die ***Landen***sche Substitution durch ***Lagrange*** und ***Legendre*** erlangt hat. (S. Bd. XVI, S. 224 dieses Journals.)

Man kann die gefundene Transformation nach zwei Seiten auszudehnen unternehmen, indem man entweder für die nächst höheren ***Abel***schen Integrale eine ähnliche Transformation, oder auch für dieselben Integrale noch andere

von der gefundenen wesentlich verschiedene Transformationen sucht. Da aber bisher *) noch Niemand solche Ausdehnung geleistet hat, so habe ich, um dadurch vielleicht zu der Lösung dieser Probleme etwas beitragen zu können, den anfänglichen Weg, der zu der gefundenen Transformation geleitet, genauer angegeben.

Die Relation zwischen y und t^2, welche die verlangte Transformation bewerkstelligt hat, ist ebenfalls in der oben aufgestellten Grundgleichung enthalten; und kann daher auch nach der im Anfange angegebenen Methode aus ihr die Differentialgleichung abgeleitet werden. Es ist nämlich diese Relation vollständig entwickelt,

$$t^4-(ay^2+c)t^2+b^2y^2 = (b^2-at^2)y^2+t^4-ct^2 = 0,$$

woraus

$$\frac{dy}{\sqrt{\{(ay^2+c)^2-4b^2y^2\}}} = \frac{d.t^2}{2\sqrt{\{(ct^2-t^4)(b^2-at^2)\}}}.$$

Durch Auflösung der Gleichung folgt

$$2t^2 = ay^2+c-\sqrt{\{(ay^2+c)^2-4b^2y^2\}},$$
$$\frac{2b^2y^2}{t^2} = ay^2+c+\sqrt{\{(ay^2+c)^2-4b^2y^2\}},$$

und daher

$$2t = \sqrt{(ay^2+2by+c)}-\sqrt{(ay^2-2by+c)},$$
$$\frac{2by}{t} = \sqrt{(ay^2+2by+c)}+\sqrt{(ay^2-2by+c)}.$$

Es ist ferner

$$(b^2-at^2)y = \sqrt{\{(ct^2-t^4)(b^2-at^2)\}}.$$

Multiplicirt man die vorstehende Differentialgleichung mit

$$y\{\sqrt{(ay^2+2by+c)}-\sqrt{(ay^2-2by+c)}\} = \frac{2t\sqrt{\{(ct^2-t^4)(b^2-at^2)\}}}{b^2-at^2},$$
$$\sqrt{(ay^2+2by+c)}+\sqrt{(ay^2+2by+c)} = \frac{2b\sqrt{\{(ct^2-t^4)(b^2-at^2)\}}}{t(b^2-at^2)},$$

so erhält man

$$y\,dy\left\{\frac{1}{\sqrt{(ay^2-2by+c)}}-\frac{1}{\sqrt{(ay^2+2by+c)}}\right\} = \frac{2t^2dt}{b^2-at^2},$$
$$dy\left\{\frac{1}{\sqrt{(ay^2-2by+c)}}+\frac{1}{\sqrt{(ay^2+2by+c)}}\right\} = \frac{2bdt}{b^2-at^2},$$

welches die zuvor gefundenen Gleichungen sind.

In dem 12ten Bande dieses Journals S. 182 ff. hat Herr Prof. *Richelot* das *Abel*sche Integral, wenn die Gröfse unter dem Wurzelzeichen lauter

reelle lineäre Factoren hat, auf die Form

$$\int \frac{(f+g\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{\{(1-\varkappa^2\sin^2\varphi)(1-\lambda^2\sin^2\varphi)(1-\mu^2\sin^2\varphi)\}}},$$

zurückgeführt, wo $\varkappa$, λ, μ kleiner als 1 sind. Ich will jetzt zeigen, wie man durch die von mir gegebene Substitution die übrigen Fälle erledigt.

Es sei das vorgelegte Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4)}}\cdot\frac{m+nx}{\sqrt{(x^2-2\alpha x+\beta)}},$$

wo $x^2-2\alpha x+\beta$ nicht in zwei reelle lineäre Factoren zerlegt werden kann. Dieser Fall umfafst alle übrigen, in welchen die 6 lineären Factoren nicht alle reell sind. Durch eine lineäre Substitution

$$x = \frac{p+qy}{1+y},$$

wo p und q reell sind, kann man immer, wie *Legendre* gezeigt hat, den Differentialausdruck

$$\frac{dx}{\sqrt{(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4)}}$$

in den einfacheren

$$\frac{dy}{\sqrt{(f+gy^2)}\sqrt{(f'+g'y^2)}}$$

transformiren, wo f, g, f', g' reell sind. Es wird dadurch das vorgelegte Integral die Form

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(f+gy^2)}\sqrt{(f'+g'y^2)}}\;\frac{h+iy}{\sqrt{(ay^2+2by+c)}}$$

erhalten, wo $ay^2+2by+c$ ebenfalls nicht in reelle Factoren zerlegt werden kann oder

$$ac > b^2,$$

und wo ich, was erlaubt ist, a und c positiv annehme.

Durch die Substitution

$$2t = \sqrt{(ay^2+2by+c)}-\sqrt{(ay^2-2by+c)}$$
$$2t' = \sqrt{(ay^2+2by+c)}+\sqrt{(ay^2-2by+c)}$$

erhielten wir oben

$$\frac{(h+iy)\,dy}{\sqrt{(f+gy^2)}\sqrt{(f'+g'y^2)}\sqrt{(ay^2+2by+c)}} = \frac{(bh-it^2)\,dt}{\sqrt{T}}-\frac{(bh-it'^2)\,dt'}{\sqrt{T'}},$$

wo

$$\sqrt{T} = (b^2-at)\sqrt{(f+gy^2)}\sqrt{(f'+g'y^2)}$$

und T' dieselbe Funktion von t' wie T von t ist.



Dieselbe Substitution ergab

$$(6.)\quad y^2 = \frac{ct^2-t^4}{b^2-at^2},$$

woraus

$$T = (fb^2+(gc-fa)t^2-gt^4)(f'b^2+(g'c-f'a)t^2-g't^4).$$

Es sind aber die Gröfsen

$$(gc-fa)^2+4fgb^2 = (gc+fa)^2-4fg(ac-b^2),$$
$$(g'c-f'a)^2+4f'g'b^2 = (g'c+f'a)^2-4f'g'(ac-b^2)$$

immer positiv, sowohl für positive als negative Werthe von fg und $f'g'$, woraus folgt, dafs in den transformirten Integralen die Gröfse T unter dem Wurzelzeichen das Product von vier reellen, in Bezug auf t^2 linearen Factoren ist. Es hat aber keine weitere Schwierigkeit, solche Integrale in die von Herrn Prof. ***Richelot*** als die kanonische gewählte Form zu bringen, wie man in der angeführten Abhandlung im 12ten Bande dieses Journals sehen kann, wo alle hiebei vorkommenden Fälle umständlich discutirt sind. Setzt man für t^2 eine neue Variable, so sieht man, dafs das *Abel*sche Integral, in welchem die Function unter dem Wurzelzeichen auf die 6te Ordnung steigt, immer in andere transformirt werden kann, in denen der erste und letzte Term dieser Function fehlt und alle ihre linearen Factoren reell sind.

Herr Prof. ***Richelot*** hat die Reduction auf seine kanonische Form in dem Fall, wo die linearen Factoren der Function unter dem Wurzelzeichen alle reell sind, nicht blofs für die *erste Classe* der *Abel*schen Integrale, d. h. diejenigen, in welchen die Function unter dem Wurzelzeichen auf den 6ten Grad steigt, bewerkstelligt, sondern gezeigt, dafs in diesem Falle dasselbe Verfahren angewandt werden kann, auf welchen Grad auch die unter dem Wurzelzeichen befindliche Function steigt. Aber für die *Abel*schen Integrale, in welchen diese Funktion den 6ten Grad übersteigt, hat man noch keine Substitution aufgefunden, durch welche die Reduction in den übrigen Fällen, wo mehrere der linearen Factoren oder alle imaginär sind, geleistet werden könnte. Dafs man bei der ersten Classe der *Abel*schen Integrale durch eine Substitution die Reduction in Fällen bewirken konnte, welche sich einer andern entzogen, liefs im Voraus erkennen, dafs ihre Anwendung auf die bereits reducirte Form nicht wieder auf dieselbe reducirte Form zurück, sondern auf eine transformirte führen würde. So wird man bei den Untersuchungen über die höheren Classen der *Abel*schen Integrale gewifs sein können, dafs die Substitution, mittelst welcher man die Reduction in dem Falle, wo die

Function unter dem Wurzelzeichen nicht lauter reelle Factoren hat, bewerkstelligen kann, zugleich eine Transformation geben wird.

Ich habe oben bei Anwendung der Substitution

$$2t = \sqrt{(ay^2+2by+c)} \mp \sqrt{(ay^2-2by+c)}$$

vorausgesetzt, dafs die Funktion 6ten Grades unter dem Wurzelzeichen wenigstens *einen* trinomischen Factor hat, der sich nicht in reelle lineäre Factoren auflösen läfst. Wäre diese Bedingung nothwendig, so würde man das von mir vorgeschlagene Verfahren nicht auf das bereits reducirte Integral

$$\int \frac{(f+gx)\,dx}{\sqrt{\{x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x)\}}}$$

anwenden können, ohne dafs die erhaltene Transformation auf imaginäre Argumente führt. Auch ist in der That Herr Prof. *Richelot* auf imaginäre Argumente gekommen *), und hat dieselben durch das *Abel*sche Additionstheorem auf reelle Argumente zurückgeführt. (S. den 16ten Band dieses Journals S. 224.) Ich will aber zeigen, dafs dies immer vermieden werden kann.

---

*) Man gelangt nur auf imaginäre Argumente, wenn man bei dieser Substitution *Jacobi*'s von der Unterscheidung der Bedingungen

$$\varkappa\lambda \gtrless \mu$$

abstrahirt, und solche Werthe des Arguments y annimmt, wofür die beiden neuen Argumente t und t' in *einem* und demselben Intervall des Ausdrucks Ft liegen. Beide Rücksichten sind in dieser *Jacobi*schen Umformung nicht beobachtet worden. Er scheint entweder nur beabsichtigt zu haben, zu zeigen, wie seine Formel auch im Fall von lauter reellen Factoren unter dem gegebenen Wurzelzeichen eine einmalige Reduction in reeller Form mit sich führe, oder hat diese Note später noch fortsetzen wollen. Da meine Transformation der *Abel*schen Integrale erster Ordnung nicht nur von jeder Bedingung zwischen den 3 Moduln unabhängig ist, sondern, was ihre Haupteigenschaft ist, bei ihrer weitern Anwendung nicht auf die gegebenen Integrale zurück-, sondern auf Integrale mit successive kleiner oder gröfser werdenden Moduln führt, so ist sie von der obigen, welche schon bei der ersten Wiederholung auf das gegebene Integral zurückführt, wesentlich verschieden. Wenn man diese letztere in die Normalform überträgt, so erhält man für $\varkappa\lambda > \mu$ die Gleichungen

$$\frac{(1+\mu\xi)\,d\xi}{\sqrt{(\varDelta\xi)}} = C\left\{\frac{(1-c^2x_1)\,dx_1}{\sqrt{(Dx_1)}} - \frac{(1-c^2x_2)\,dx_2}{\sqrt{(Dx_2)}}\right\},$$

$$\frac{(1-\mu\xi)\,d\xi}{\sqrt{(\varDelta\xi)}} = L\left\{\frac{(1-l^2x_1)\,dx_1}{\sqrt{(Dx_1)}} - \frac{(1-l^2x_2)\,dx_2}{\sqrt{(Dx_2)}}\right\},$$

worin:

$$m = \frac{\varkappa\sqrt{\{(\lambda^2-\mu^2)(1-\lambda^2)\}} - \lambda\sqrt{\{(\varkappa^2-\mu^2)(1-\varkappa^2)\}}}{\varkappa\sqrt{\{(\lambda^2-\mu^2)(1-\lambda^2)\}} + \lambda\sqrt{\{(\varkappa^2-\mu^2)(1-\varkappa^2)\}}},$$

$$l^2 = m\frac{(\varkappa^2-\mu)\sqrt{\{(\lambda^2-\mu^2)(1-\lambda^2)\}} + (\lambda^2-\mu)\sqrt{\{(\varkappa^2-\mu^2)(1-\varkappa^2)\}}}{(\varkappa^2-\mu)\sqrt{\{(\lambda^2-\mu^2)(1-\lambda^2)\}} - (\lambda^2-\mu)\sqrt{\{(\varkappa^2-\mu^2)(1-\varkappa^2)\}}},$$

$$c^2 = m\frac{(\varkappa^2+\mu)\sqrt{\{(\lambda^2-\mu^2)(1-\lambda^2)\}} + (\lambda^2+\mu)\sqrt{\{(\varkappa^2-\mu^2)(1-\varkappa^2)\}}}{(\varkappa^2+\mu)\sqrt{\{(\lambda^2-\mu^2)(1-\lambda^2)\}} - (\lambda^2+\mu)\sqrt{\{(\varkappa^2-\mu^2)(1-\varkappa^2)\}}},$$

Es sei das Integral

$$J = \int \frac{(f+gx)\,dx}{\sqrt{\{x(1-x)(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x)\}}}$$

vorgelegt, wo man $\varkappa$, λ, μ reell und positiv und $1 > \varkappa > \lambda > \mu$, ferner x zwischen 0 und 1 annimmt. Setzt man

$$x = \frac{y-1}{\mu(y+1)},$$

so wird

$$1-x = \frac{1+\mu-(1-\mu)y}{\mu(y+1)}, \qquad 1-\mu^2x = \frac{1+\mu+(1-\mu)y}{y+1},$$

$$1-\varkappa^2x = \frac{\varkappa^2+\mu-(\varkappa^2-\mu)y}{\mu(y+1)}, \qquad 1-\lambda^2x = \frac{\lambda^2+\mu-(\lambda^2-\mu)y}{\mu(y+1)},$$

$$dx = \frac{2}{\mu}\cdot\frac{dy}{(y+1)^2},$$

und daher

$$J = h\int \frac{\{(f\mu+g)y+(f\mu-g)\}\,dy}{\sqrt{\{(y^2-1)(1-\nu^2y^2)(1+my)(1+ny)\}}},$$

wo

$$h = \frac{2}{(1+\mu)\sqrt{(\varkappa^2+\mu)}\sqrt{(\lambda^2+\mu)}}, \qquad \nu = \frac{1-\mu}{1+\mu}, \qquad m = \frac{\varkappa^2-\mu}{\varkappa^2+\mu}, \qquad n = \frac{\lambda^2-\mu}{\lambda^2+\mu},$$

und y zwischen 1 und $\frac{1}{\nu}$ ist. Die Substitution

$$2t = \sqrt{(ay^2+2by+c)} \mp \sqrt{(ay^2-2by+c)}$$

bleibt immer reell, wenn in den Intervallen, in welchen sich y während der

---

$$(1-m^2)\frac{c\sqrt{\{(l^2-m^2)(1-l^2)\}}+l\sqrt{\{(c^2-m^2)(1-c^2)\}}}{\sqrt{\{(c^2-m^2)(1-l^2)\}}+\sqrt{\{(l^2-m^2)(1-c^2)\}}}$$

$$= 2C\sqrt{\{(c^2-m^2)(1-c^2)\}} = -2L\sqrt{\{(l^2-m^2)(1-l^2)\}},$$

$$\varDelta\xi = (1-\xi^2)(1-\varkappa^2\xi^2)(1-\lambda^2\xi^2)(1-\mu^2\xi^2),$$

$$Dx = (1-x^2)(1-c^2x^2)(1-l^2x^2)(1-m^2x^2)$$

gesetzt ist, und die beiden Argumente x_1 und x_2 aus dem gegebenen Argument ξ vermittelst der Gleichungen:

$$\sqrt{\left\{\left(\frac{l^2+m}{c^2+m}\right)\left(\frac{1-c^2x_1}{1-l^2x_1}\right)\right\}} = \frac{\sqrt{\{(\varkappa^2-\mu^2\xi^2)(\lambda^2-\mu^2\xi^2)\}}-\mu\sqrt{\{(1-\varkappa^2\xi^2)(1-\lambda^2\xi^2)\}}}{\sqrt{\{(\varkappa^2\lambda^2-\mu^2)(1-\mu\xi^2)\}}},$$

$$\sqrt{\left\{\left(\frac{l^2+m}{c^2+m}\right)\left(\frac{1-c^2x_2}{1-l^2x_2}\right)\right\}} = \frac{\sqrt{\{(\varkappa^2-\mu^2\xi^2)(\lambda^2-\mu^2\xi^2)\}}+\mu\sqrt{\{(1-\varkappa^2\xi^2)(1-\lambda^2\xi^2)\}}}{\sqrt{\{(\varkappa^2\lambda^2-\mu^2)(1-\mu\xi^2)\}}}$$

abgeleitet sind.

In dieser Form kann man sich auch durch Rechnung davon überzeugen, dafs die vorliegende Umformung von der oben bezeichneten reciproken Natur ist, und daher weiter angewendet auf das ursprünglich gegebene Integral zurückführt. So sind auch die drei Moduln c, l, m eben solche Functionen der drei Moduln $\varkappa$, λ, μ, wie umgekehrt diese es von jenen sind. — Gelegentlich werde ich diesen Gegenstand ausführlicher verfolgen. — *R.*

Integration befindet, nicht blofs die Gröfse $ay^2+2by+c$, sondern auch die Gröfse $ay^2-2by+c$ positiv ist. Für den hier betrachteten Fall ist

$$ay^2+2by+c = (1+my)(1+ny)$$

und y zwischen 1 und $\frac{1}{\nu}$. Es sind aber die absoluten Werthe von m und n kleiner als ν, und daher die vier Gröfsen $1\pm\frac{m}{\nu}$, $1\pm\frac{n}{\nu}$ immer positiv, so dafs die Gröfsen $(1+my)(1+ny)$ und $(1-my)(1-ny)$, wenn y von 1 bis $\frac{1}{\nu}$ wächst, positiv bleiben, wodurch der geforderten Bedingung Genüge geschicht.

Ich setze jetzt zufolge der angewandten Substitution

$$\pm 2t = \sqrt{\{(1+my)(1+ny)\}} - \sqrt{\{(1-my)(1-ny)\}},$$
$$2t' = \sqrt{\{(1+my)(1+ny)\}} + \sqrt{\{(1-my)(1-ny)\}},$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem $m+n$ positiv oder negativ ist oder, was dasselbe ist, je nachdem $\varkappa\lambda>\mu$ oder $\varkappa\lambda<\mu$. Die Quadratwurzeln werde ich immer positiv nehmen.

Setzt man der Kürze halber

$$1-\varkappa^2=\varkappa'^2, \qquad 1-\lambda^2=\lambda'^2, \qquad 1-\mu^2=\mu'^2,$$
$$\varkappa^2-\lambda^2=\lambda''^2, \qquad \varkappa^2-\mu^2=\mu''^2, \qquad \lambda^2-\mu^2=\mu'''^2$$
$$N = \sqrt{\{(\varkappa^2+\mu)(\lambda^2+\mu)\}},$$
$$\alpha = \frac{\sqrt{\{(\varkappa\lambda-\mu)^2\}}}{N}, \qquad \alpha' = \frac{\varkappa\lambda+\mu}{N},$$
$$\beta = \frac{\sqrt{\{(\mu''\mu'''-\mu\varkappa'\lambda')^2\}}}{(1-\mu)N}, \qquad \beta' = \frac{\mu''\mu'''+\mu\varkappa'\lambda'}{(1-\mu)N},$$

so wird gleichzeitig

$$y=1, \qquad t=\alpha, \qquad t'=\alpha',$$

und

$$y=\frac{1}{\nu}, \qquad t=\beta, \qquad t'=\beta'.$$

Es ist, wie man leicht zeigt,

$$\pm\tfrac{1}{2}(m+n) = \alpha\alpha', \qquad \beta\beta' = \frac{1}{\nu}\cdot\alpha\alpha',$$

ferner, da

$$\varkappa\lambda-\mu^2 > \mu''\mu''', \qquad 1-\varkappa\lambda > \varkappa'\lambda', \qquad \text{auch} \quad \alpha' > \beta'$$

und daher um so mehr

$$\frac{1}{\nu}\alpha' > \beta', \qquad \alpha < \beta.$$

Es folgen demnach α, β, β', α' der Gröfse nach auf einander; diese Gröfsen sind sämmtlich kleiner als 1, da $\alpha' < 1$. Wenn y von 1 bis $\frac{1}{\nu}$ wächst, wird t von α bis β wachsen, t' von α' bis β' abnehmen.

Die angewandte Substitution giebt, wenn man in den obigen Formeln

$$4b^2 = (m+n)^2, \qquad a = mn, \qquad c = 1$$

setzt, die Gleichungen

$$y^2 = \frac{4(t^2-t^4)}{(m+n)^2-4mnt^2} = \frac{4(t'^2-t'^4)}{(m+n)^2-4mnt'^2},$$

$$(y^2-1)(1-\nu^2y^2) = \frac{\left(\frac{t^2}{\alpha^2}-1\right)\left(1-\frac{t^2}{\beta^2}\right)\left(1-\frac{t^2}{\beta'^2}\right)\left(1-\frac{t^2}{\alpha'^2}\right)}{\left(1-\frac{4mn}{(m+n)^2}t^2\right)^2},$$

$$= \frac{\left(\frac{t'^2}{\alpha^2}-1\right)\left(\frac{t'^2}{\beta^2}-1\right)\left(\frac{t'^2}{\beta'^2}-1\right)\left(1-\frac{t'^2}{\alpha'^2}\right)}{\left(1-\frac{4mnt'^2}{(m+n)^2}\right)^2},$$

wo $\frac{4mn}{(m+n)^2} < 1$. Die Factoren sind hier so geschrieben, dafs jeder einzelne während der Integration positiv bleibt, da, wenn y sich zwischen 1 und $\frac{1}{\nu}$ befindet, t in dem Intervalle von α bis β, t' in dem Intervalle von β' bis α' liegt.

Um die Differentialgleichungen zu erhalten, mufs man die Zeichen so bestimmen, dafs, wie es die Substitution mit sich bringt, t und y gleichzeitig wachsen, aber t' abnimmt, wenn t wächst. Die obigen Differentialformeln für t und die ihnen ähnlichen für t' werden jetzt

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{\{(1-my)(1-ny)\}}} - \frac{y\,dy}{\sqrt{\{(1+my)(1+ny)\}}} = \frac{\pm 2t^2dt}{\left(\frac{m+n}{2}\right)^2-mnt^2},$$

$$\frac{dy}{\sqrt{\{(1+my)(1+ny)\}}} + \frac{dy}{\sqrt{\{(1-my)(1-ny)\}}} = \frac{\pm(m+n)\,dt}{\left(\frac{m+n}{2}\right)^2-mnt^2},$$

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{\{(1+my)(1+ny)\}}} + \frac{y\,dy}{\sqrt{\{(1-my)(1-ny)\}}} = \frac{-2t'^2dt'}{\left(\frac{m+n}{2}\right)^2-mnt'^2},$$

$$\frac{dy}{\sqrt{\{(1-my)(1-ny)\}}} - \frac{dy}{\sqrt{\{(1+my)(1+ny)\}}} = \frac{-(m+n)\,dt'}{\left(\frac{m+n}{2}\right)^2-mnt'^2}.$$

Hieraus folgt, wenn $\varkappa\lambda > \mu$, also die oberen Zeichen gelten,

$$J = \int \frac{(f'-g't^2)\,dt}{\sqrt{\{F(t)\}}} + \int \frac{(f'-g't'^2)\,dt'}{\sqrt{\{F(t')\}}},$$

wenn $\varkappa\lambda < \mu$, also die untern Zeichen gelten,

$$J = \int \frac{(f'+g't^2)\,dt}{\sqrt{\{F(t)\}}} - \int \frac{(f'+g't'^2)\,dt'}{\sqrt{\{F(t')\}}},$$

wo

$$f' = \frac{\pm(m+n)(f\mu-g)}{(1-\mu)N}, \qquad g' = \frac{2(f\mu+g)}{(1-\mu)N},$$

$$F(t) = (t^2-\alpha^2)(\beta^2-t^2)(\beta'^2-t^2)(\alpha'^2-t^2),$$

$$F(t') = (t'^2-\alpha^2)(t'^2-\beta^2)(t'^2-\beta'^2)(\alpha'^2-t'^2).$$

2.

Sur quelques formules pour la transformation des intégrales elliptiques.

(Par M. *A. Cayley.*)

I.

En posant dans les formules „Fund. nova p. 15 Tab. III," $\cos\varphi = x$, on obtient

$$\frac{dy}{\sqrt{(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)}} = \frac{2}{\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}+\sqrt{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}}\,\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

où

$$k^2 = \left(\frac{\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}-\sqrt{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}}{\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}+\sqrt{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}}\right)^2$$

$$\frac{1-x}{1+x} = \frac{(\alpha-\beta)(\beta-\delta)}{(\alpha-\gamma)(\gamma-\delta)}\,\frac{y-\gamma}{\beta-y}.$$

Maintenant soit

$$(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta) = (a, b, c, d, e)\!\!\frown\!(y, 1)^4$$

et proposons-nous d'introduire dans les formules les coefficients (a, b, c, d, e) au lieu des racines α, β, γ, δ. En renvoyant d'ailleurs à la note sur les covariants d'une fonction quadratique, cubique ou biquadratique insérée dans ce Journal t. L, p. 285, je pose pour abréger

$$(\alpha-\beta)(\gamma-\delta) = B,$$
$$(\alpha-\gamma)(\delta-\beta) = C,$$
$$(\alpha-\delta)(\beta-\gamma) = D$$

de sorte que l'on a identiquement

$$B+C+D = 0.$$

Les invariants I, J sont des fonctions rationnelles des quantités B, C, D; en effet on a

$$B^2+C^2+D^2 = 24I,$$
$$(B-C)(C-D)(D-B) = 432J,$$
$$B^2C^2D^2 = 256(I^3-27J^2).$$

Cela étant, il suit

$$k^2 = \left(\frac{i\sqrt{C}-\sqrt{B}}{i\sqrt{C}+\sqrt{B}}\right)^2$$

ce qui donne d'abord

$$k^4+14k^2+1 = 16\frac{B^2+BC+C^2}{(i\sqrt{C}+\sqrt{B})^4}$$

ou, à cause de $B+C+D=0$, d'où $B^2+C^2+D^2=2(B^2+BC+C^2)$,

$$k^4+14k^2+1 = \frac{8(B^2+C^2+D^2)}{(i\sqrt{C}+\sqrt{B})^4}.$$

On trouve ensuite

$$1-k^2 = \frac{4i\sqrt{BC}}{(i\sqrt{C}+\sqrt{B})^4}$$

et de là

$$k^2(1-k^2)^4 = \frac{(i\sqrt{C}-\sqrt{B})^2}{(i\sqrt{C}+\sqrt{B})^2}\cdot\frac{256B^2C^2}{(i\sqrt{C}+\sqrt{B})^8}$$

ou en multipliant le numérateur et le denominateur par $(i\sqrt{C}+\sqrt{B})^2$ et posant D^2 au lieu de $(B+C)^2$,

$$k^2(1-k^2)^4 = \frac{256B^2C^2D^2}{(i\sqrt{C}+\sqrt{B})^{12}}.$$

Ces équations donnent

$$\frac{k^2(1-k^2)^4}{(k^4+14k^2+1)^3} = \frac{B^2C^2D^2}{2(B^2+C^2+D^2)^3}$$

ou, en posant

$$N = \frac{27}{4}\frac{1}{1-\frac{27J^2}{I^3}},$$

$$\frac{k^2(1-k^2)^4}{k^4+14k^2+1)^3} = \frac{1}{16N}.$$

On trouve aussi

$$k^4+14k^2+1 = \frac{192I}{(i\sqrt{C}+\sqrt{B})^4}$$

ce qui donne

$$\frac{2}{i\sqrt{C}+\sqrt{B}} = \sqrt[4]{\frac{k^4+14k^2+1}{12I}},$$

et la formule de transformation devient ainsi

$$\frac{dy}{\sqrt{(a,b,c,d,e)(y,1)^4}} = \sqrt[4]{\frac{k^4+14k^2+1}{12I}}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

le module k étant déterminé par l'équation

$$\frac{k^2(1-k^2)^4}{(k^4+14k^2+1)^3} = \frac{1}{16N},$$

où

$$N = \frac{27}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{27J^2}{I^3}}.$$

Cela revient à une formule que j'ai donnée dans le mémoire intitulé „On the reduction of $du \div \sqrt{U}$ when U is a function of the fourth order" Camb. and Dublin Math. Journal t. I, p. 70, et de laquelle j'ai déduit des conséquences que je vais reproduire ici. En effet l'équation en k peut s'écrire sous la forme

$$(k^4+14k^2+1)^3 - 16Nk^2(k^2-1)^4 = 0,$$

c'est à dire

$$\left(k^2+\frac{1}{k^2}+14\right)^3 - 16N\left(k-\frac{1}{k}\right)^4 = 0;$$

en écrivant

$$k-\frac{1}{k} = \frac{4}{\sqrt{\vartheta-1}},$$

on obtient pour ϑ l'équation très-simple

$$\vartheta^3 - N(\vartheta-1) = 0,$$

et on a ensuite

$$k^2 = \frac{7+\vartheta+4\sqrt{3+\vartheta}}{\vartheta-1}$$

ce qui donne aussi

$$k = \frac{2+\sqrt{3+\vartheta}}{\sqrt{\vartheta-1}}.$$

Soit $k = \beta^2$ l'une des valeurs de k, l'équation en k devient

$$\frac{(k^4+14k^2+1)^3}{k^2(k^2-1)^4} = \frac{(\beta^8+14\beta^4+1)^3}{\beta^4(\beta^4-1)^4},$$

équation à laquelle on satisfait, en outre, par la valeur $k = \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^2$. En effet cette valeur donne

$$k^4+14k^2+1 = \frac{16(\beta^8+14\beta^4+1)^2}{(1+\beta)^8}, \qquad k^2-1 = -\frac{8\beta(1+\beta^2)}{(1+\beta)^4},$$

expressions qui rendent l'équation identique. Cela fait voir que l'équation peut s'écrire sous la forme

$$(k^4+14k^2+1)^4 - k^2(k^2-1)^4\frac{(\beta^8+14\beta^4+1)^3}{\beta^4(\beta^4-1)^4} =$$

$$(k^2-\beta^4)\left(k^2-\frac{1}{\beta^4}\right)\left(k^2-\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^4\right)\left(k^2-\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^4\right)\left(k^2-\left(\frac{1-\beta i}{1+\beta i}\right)^4\right)\left(k^2-\left(\frac{1+\beta i}{1-\beta i}\right)^4\right)$$

et les racines de l'équation en k^2 sont

$$\beta^4, \quad \frac{1}{\beta^4}, \quad \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^4, \quad \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^4, \quad \left(\frac{1-\beta i}{1+\beta i}\right)^4, \quad \left(\frac{1+\beta i}{1-\beta i}\right)^4,$$

ce qui s'accorde avec un résultat obtenu par *Abel* (voir les oeuvres d'*Abel* t. I, p. 310).

Je fais observer à présent qu'en écrivant

$$\vartheta = \frac{3\varpi}{2\varpi-3},$$

on obtient pour ϖ l'équation $(27-4N)\varpi^3+27N(\varpi-1)=0$, qui, en posant $M=\frac{-27N}{27-4N}$, ou ce qui est la même chose

$$M = \frac{I^3}{4J^2}$$

devient

$$\varpi^3 - M(\varpi-1) = 0.$$

Cette équation est précisément la même que celle à laquelle je suis parvenu dans la note sur les covariants etc. ci-dessus citée. La quantité ϖ est liée au module k par la relation

$$k = \frac{3\sqrt{\varpi-1}+2\sqrt{2\varpi-3}}{\sqrt{\varpi+3}}.$$

On peut introduire M au lieu de N dans l'équation en k, et en combinant les formules précédemment obtenues, on trouve

$$\frac{dy}{\sqrt{(a, b, c, d, e)\widehat{(}y, 1)^4}} = \sqrt[4]{\frac{k^4+14k^2+1}{12I}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

où

$$\frac{27(1+14k^2+k^4)^3}{(1+k^2)^2(1-34k^2+k^4)^4} = 4M, \qquad M = \frac{I^3}{4J^2},$$

ou ce qui revient à la même chose,

$$k = \frac{3\sqrt{\varpi-1}+2\sqrt{2\varpi-3}}{\sqrt{\varpi+3}}, \qquad \varpi^3 - M(\varpi-1) = 0.$$

De l'équation entre k et ϑ on déduit facilement la relation

$$\frac{k^4+14k^2+1}{k^4-34k^2+1} = \frac{-\vartheta}{2\vartheta-3}$$

et en substituant dans cette équation pour ϑ sa valeur on obtient

$$\frac{1-34k^2+k^4}{-3(1+14k^2+k^4)} = \frac{1}{\varpi},$$

ce qui est encore une forme de la relation entre k et ϖ.

II.

On peut obtenir les résultats qui viennent d'être déduits de la formule de *Jacobi*, en prenant pour point de départ la transformation d'une fonction du quatrième ordre dans sa forme canonique. Je suppose d'abord que l'on a identiquement

$$\begin{aligned}(a, b, c, d, e\widehat{)(}x, y)^4 &= (\lambda x+\mu y)^4+(\lambda' x+\mu' y)^4+6\theta(\lambda x+\mu y)^2(\lambda' x+\mu' y)^2\\ &= x_1^4+y_1^4+6\theta x_1^2 y_1^2.\end{aligned}$$

Cela étant je pose $\lambda\mu'-\lambda'\mu = \Lambda$, et je forme les covariants des deux expressions, on obtient par la propriété fondamentale de ces fonctions

$$\begin{aligned}I &= \Lambda^4(1+3\theta^2),\\ J &= \Lambda^6(\theta-\theta^3),\\ U &= x_1^4+y_1^4+6\theta x_1^2 y_1^2,\\ H &= \Lambda^2(\theta x_1^4+\theta y_1^4+\overline{1-3\theta^2}\, x_1^2 y_1^2),\\ \Phi &= \Lambda^3(9\theta^2-1)x_1 y_1(x_1^4-y_1^4).\end{aligned}$$

De ces relations on tire

$$\frac{J}{I} = \Lambda^2\frac{\theta-\theta^3}{1+3\theta^2},$$
$$\frac{J^2}{I^3} = \frac{(\theta-\theta^3)^2}{(1+3\theta^2)^3},$$

de sorte qu'en posant

$$M = \frac{I^3}{4J^2},$$

on aura pour déterminer θ, l'équation

$$\frac{(1+3\theta^2)^3}{(\theta-\theta^3)^2} = 4M$$

et pour déterminer x_1, y_1 les équations

$$U = x_1^4+y_1^4+6\theta x_1^2 y_1^2,$$
$$\frac{I}{J}\,\frac{1-\theta^2}{1+3\theta^2}H = x_1^4+y_1^4+\frac{1-3\theta^2}{\theta}x_1^2 y_1^2.$$

Je fais observer qu'en désignant par λ un coefficient tel que $U+6\lambda H$ soit un carré parfait, on obtient pour λ l'équation

$$1-9\lambda^2 I-54\lambda^3 J = 0.$$

En effet le cubicovariant Φ d'une fonction qui est un carré parfait est identiquement égal à zéro, et le cubicovariant de la fonction $U+6\lambda H$ est $(1-9\lambda^2 I-54\lambda^3 J)\Phi$, on a donc pour λ l'équation qui vient d'être proposée;

cela posé, en observant que

$$U - \frac{I}{J}\frac{1-\theta^2}{1+3\theta^2}H = \frac{9\theta^2-1}{\theta}x_1^2y_1^2,$$

on aura pour une des valeurs de λ,

$$\lambda = -\frac{I}{6J}\frac{1-\theta^2}{1+3\theta^2},$$

et en effet cette valeur donne

$$1 - \frac{I^3}{J^2}\frac{(\theta-\theta^3)^2}{(1+3\theta^2)^3} = 0,$$

ce qui est l'équation en θ. Cela étant, je pose

$$\lambda = -\frac{I}{6J}\frac{1}{\varpi_3};$$

alors ϖ_3 sera une racine de l'équation

$$\varpi^3 - M(\varpi - 1) = 0,$$

on obtient

$$\varpi_3 = \frac{1+3\theta^2}{1-\theta^2},$$

et de là

$$\theta^2 = \frac{\varpi_3 - 1}{\varpi_3 + 3}.$$

Soient ϖ_1, ϖ_2 les deux autres racines de l'équation en ϖ, on aura

$$\varpi_1 + \varpi_2 = -\varpi_3,$$

$$\varpi_1\varpi_2 = -\frac{\varpi_3^2}{\varpi_3 - 1},$$

ce qui donne

$$(\varpi_1 - \varpi_2)^2 = \frac{\varpi_3^2(\varpi_3+3)}{\varpi_3-1} = \frac{\varpi_3^2}{\theta^2}.$$

On pourra donc écrire

$$\theta = \frac{-\varpi_3}{\varpi_2 - \varpi_1}$$

et au moyen des valeurs de U, H on obtient, par une très-simple réduction, les trois équations suivantes

$$IH - \varpi_1 JU = (\varpi_3 - \varpi_1)J(x_1^2 + y_1^2)^2,$$

$$IH - \varpi_2 JU = -(\varpi_2 - \varpi_3)J(x_1^2 - y_1^2)^2,$$

$$IH - \varpi_3 JU = -\frac{(\varpi_2 - \varpi_3)(\varpi_3 - \varpi_1)}{\varpi_1 - \varpi_2}J.4x_1^2y_1^2,$$

dont deux quelconques donnent les valeurs de x_1, y_1; ainsi on a obtenu la

solution complète du problème de la réduction de la fonction $(a, b, c, d, e\between x, y)^4$ à la forme canonique.

Je fais observer que ces équations montrent *a posteriori* que les expressions $IH - \varpi_1 JU$, $IH - \varpi_2 JU$, $IH - \varpi_3 JU$ sont toutes les trois des carrés de fonctions quadratiques. Je fais observer, en outre, que si l'on forme la valeur de l'expression

$$(\varpi_2 - \varpi_3)\sqrt{IH - \varpi_1 JU} + (\varpi_3 - \varpi_1)\sqrt{IH - \varpi_2 JU} + (\varpi_1 - \varpi_2)\sqrt{IH - \varpi_3 JU},$$

en posant pour un moment $\varpi_2 - \varpi_3 = \alpha$, $\varpi_3 - \varpi_1 = \beta$, $\varpi_1 - \varpi_2 = \gamma$, l'expression dont il s'agit sera égale, à un facteur constant près, à

$$\sqrt{\alpha}(x_1^2 + y_1^2) + i\sqrt{\beta}(x_1^2 - y_1^2) + i\sqrt{\gamma}.2x_1 y_1$$

ou, ce qui est la même chose à

$$(\sqrt{\alpha} + i\sqrt{\beta}, i\sqrt{\gamma}, \sqrt{\alpha} - i\sqrt{\beta}\between x_1, y_1)^2.$$

Or, cette fonction doit être un carré parfait, ce qu'on reconnaît en effet, en se rappelant que

$$(\sqrt{\alpha} + i\sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha} - i\sqrt{\beta}) - (i\sqrt{\gamma})^2 = \alpha + \beta + \gamma = 0.$$

Sa racine carrée sera, à un facteur constant près, $(\sqrt{\alpha} + i\sqrt{\beta})x_1 + i\sqrt{\gamma}y_1$, et cette dernière fonction sera un des facteurs linéaires de $x_1^4 + y_1^4 + 6\theta x_1^2 y_1^2$. Pour vérifier cela je pose $x_1^4 + y_1^4 + 6\theta x_1^2 y_1^2 = 0$, ce qui donne

$$x_1^2 + (3\theta + \sqrt{9\theta^2 - 1})y_1^2 = 0,$$

et $x_1 - \left(\sqrt{\frac{3\theta+1}{2}} + \sqrt{\frac{3\theta-1}{2}}\right)y_1 = 0$. Or $3\theta + 1 = \frac{-3\varpi_3}{\varpi_2 - \varpi_1} + 1 = \frac{-3\varpi_3 + \varpi_2 - \varpi_1}{\varpi_2 - \varpi_1}$ $= \frac{-2\varpi_3 + 2\varpi_2 - (\varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_3)}{\varpi_2 - \varpi_1} = \frac{2\varpi_2 - 2\varpi_3}{\varpi_2 - \varpi_1} = \frac{2\alpha}{-\gamma}$, c'est à dire $\sqrt{\frac{3\theta+1}{2}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{i\sqrt{\gamma}}$, et de même $\sqrt{\frac{3\theta-1}{2}} = \frac{i\sqrt{\beta}}{i\sqrt{\gamma}}$, le facteur linéaire sera donc $i\sqrt{\gamma}.x_1 - (\sqrt{\alpha} + i\sqrt{\beta})y_1$ ou, ce qui revient à la même chose, $(\sqrt{\alpha} + i\sqrt{\beta})x_1 + i\sqrt{\gamma}y_1$, ce qu'il s'agissait de démontrer.

III.

Pour obtenir la formule qui sert à la transformation d'une intégrale elliptique, il faut présenter les résultats précédemment obtenus sous une forme un peu différente. J'écris

$$\begin{aligned}(a, b, c, d, e\between y, 1)^4 &= (\lambda + \mu y)^4 - (1 + k^2)(\lambda + \mu y)^2(\lambda' + \mu' y)^2 + k^2(\lambda' + \mu' y)^4 \\ &= (\lambda + \mu y)^4.(1 - x^2)(1 - k^2 x^2),\end{aligned}$$

où

$$x = \frac{\lambda' + \mu' y}{\lambda + \mu y}.$$

Cela posé, en remplaçant comme auparavant $\lambda\mu' - \lambda'\mu$ par $\varDelta$, et en formant les covariants, on obtient

$$I = \tfrac{1}{12}\varDelta^4(1+14k^2+k^4)$$
$$J = \tfrac{1}{216}\varDelta^6(1+k^2)(1-34k^2+k^4)$$
$$U = (\lambda+\mu y)^4\{1-(1+k^2)x^2+k^2x^4\}$$
$$H = -\tfrac{1}{12}\varDelta^2(\lambda+\mu y)^4\{2(1+k^2)-(1-10k^2+k^4)x^2+2k^2(1+k^2)x^4\}$$
$$\Phi = \tfrac{1}{4}\varDelta^3(\lambda+\mu y)^6(1-k^2)^2x(1-k^2x^4).$$

On a d'abord

$$\frac{27(1+14k^2+k^4)^3}{(1+k^2)^2(1-34k^2+k^4)^2} = 4M,$$

en posant comme auparavant $M = \frac{I^3}{4J^2}$; on obtient ensuite

$$\varDelta^4 = \frac{12I}{1+14k^2+k^4},$$

et en remarquant que l'équation entre x et y donne

$$dx = \frac{(\lambda\mu'-\lambda'\mu)\,dy}{(\lambda+\mu y)^2} = \frac{\varDelta dy}{(\lambda+\mu y)^2},$$

on trouve

$$\frac{dy}{\sqrt{(a,b,c,d,e\widehat{)(y},1)^4}} = \frac{1}{\varDelta}\,\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

c'est à dire

$$\frac{dy}{\sqrt{(a,b,c,d,e\widehat{)(y},1)^4}} = \sqrt[4]{\frac{k^4+14k^2+1}{12I}}\,\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

ce qui s'accorde avec la formule ci-dessus trouvée; pour compléter la solution, je pose

$$\frac{1-34k^2+k^4}{-3(1+14k^2+k^4)} = \frac{1}{\varpi_3},$$

ϖ_3 sera une des racines de l'équation

$$\varpi^3 - M(\varpi-1) = 0,$$

en représentant par ϖ_1, ϖ_2 les deux autres racines, on obtient

$$2\varpi_1 = -\varpi_3\frac{1+6k+k^2}{1+k^2},$$
$$2\varpi_2 = -\varpi_3\frac{1-6k+k^2}{1+k^2}$$

et ensuite

$$IH - \varpi_1 JU = J(\lambda + \mu y)^4 (\varpi_3 - \varpi_1)(1 + kx^2)^2,$$
$$IH - \varpi_2 JU = J(\lambda + \mu y)^4 (\varpi_3 - \varpi_2)(1 - kx^2)^2,$$
$$IH - \varpi_3 JU = J\,\frac{(\varpi_3 - \varpi_1)(\varpi_3 - \varpi_2)}{\varpi_1 - \varpi_2}(\lambda + \mu y)^4 . 4kx^2.$$

Donc en posant $\varpi_2 - \varpi_3 = \alpha$, $\varpi_3 - \varpi_1 = \beta$, $\varpi_1 - \varpi_2 = \gamma$, on a

$$(\varpi_2 - \varpi_3)\sqrt{IH - \varpi_1 JU} + (\varpi_3 - \varpi_1)\sqrt{IH - \varpi_2 JU} + (\varpi_1 - \varpi_2)\sqrt{IH - \varpi_3 JU}$$
$$= J(\lambda + \mu y)^4 \sqrt{\alpha\beta}(\sqrt{\alpha} + i\sqrt{\beta} + i\sqrt{\gamma}\, x\sqrt{k})^2,$$

de même

$$(\varpi_2 - \varpi_3)\sqrt{IH - \varpi_1 JU} + (\varpi_3 - \varpi_1)\sqrt{IH - \varpi_2 JU} - (\varpi_1 - \varpi_2)\sqrt{IH - \varpi_3 JU}$$
$$= J(\lambda + \mu y)^4 \sqrt{\alpha\beta}(\sqrt{\alpha} + i\sqrt{\beta} - i\sqrt{\gamma}\, x\sqrt{k})^2,$$

et de là enfin, en remplaçant α, β, γ par leurs valeurs,

$$\frac{(\varpi_2 - \varpi_3)\sqrt{IH - \varpi_1 JU} + (\varpi_3 - \varpi_1)\sqrt{IH - \varpi_2 JU} + (\varpi_1 - \varpi_2)\sqrt{IH - \varpi_3 JU}}{(\varpi_2 - \varpi_3)\sqrt{IH - \varpi_1 JU} + (\varpi_3 - \varpi_1)\sqrt{IH - \varpi_2 JU} - (\varpi_1 - \varpi_2)\sqrt{IH - \varpi_3 JU}}$$
$$= \left(\frac{\sqrt{\varpi_2 - \varpi_3} + i\sqrt{\varpi_3 - \varpi_1} + i\sqrt{\varpi_1 - \varpi_2}\, x\sqrt{k}}{\sqrt{\varpi_2 - \varpi_3} + i\sqrt{\varpi_3 - \varpi_1} - i\sqrt{\varpi_1 - \varpi_2}\, x\sqrt{k}}\right)^2,$$

équation dont le premier membre est le carré d'une fraction rationnelle de la forme

$$\frac{A + Bx}{C + Dx}.$$

IV.

Je terminerai ces recherches en démontrant le théorème de M. *Hermite* dont j'ai parlé dans la note sur les covariants etc. ci-dessus citée. L'identité

$$JU^3 - IU^2H + 4H^3 = -\Phi^2$$

peut être mise sous la forme

$$-J + I\cdot\frac{H}{U} - 4\,\frac{H^3}{U^3} = \left(\frac{\Phi}{U^2}\right)^2 . U.$$

Posons maintenant

$$z = \frac{H}{U},$$

formule dans laquelle je suppose qu'on ait fait $y = 1$, de manière que U, H soient des fonctions rationelles et entières de la seule variable x, savoir

$$U = (a, b, c, d, e \between x, 1)^4$$
$$H = (ac - b^2, \tfrac{1}{2}(ad - bc), \tfrac{1}{6}(ae + 2bd - 3c^2), \tfrac{1}{2}(be - cd), ce - d^2 \between x, 1)^4,$$

alors on aura

$$\sqrt{-J+zI-4z^3} = \frac{\Phi}{U^2}\sqrt{(a,b,c,d,e\widehat{)}(x,1)^4}$$

et

$$dz = \frac{UdH-HdU}{U^2}.$$

En vertu de la théorie de *Jacobi*, $UdH-HdU$ est de la forme $M\Phi dx$, où M est un facteur constant; on trouve en effet très-facilement $UdH-HdU=2\Phi dx$, d'où l'on déduit la formule

$$\frac{dz}{\sqrt{-J+zI-4z^3}} = \frac{2dx}{\sqrt{(a,b,c,d,e\widehat{)}(x,1)^4}}$$

et je fais observer que l'intégrale du premier membre se ramène immédiatement à une forme qui ne contient que la seule constante $M=\frac{I^3}{4J^2}$.

Londres 9 avril 1856.

3.

Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen.

(Von Herrn *H. Helmholtz.*)

Es sind bisher Integrale der hydrodynamischen Gleichungen fast nur unter der Voraussetzung gesucht worden, dafs die rechtwinkligen Componenten der Geschwindigkeit jedes Wassertheilchens gleich gesetzt werden können den nach den entsprechenden Richtungen genommenen Differentialquotienten einer bestimmten Function, welche wir das *Geschwindigkeitspotential* nennen wollen. Allerdings hat schon *Lagrange* *) nachgewiesen, dafs diese Voraussetzung zulässig ist, so oft die Bewegung der Wassermasse unter dem Einflusse von Kräften entstanden ist und fortgesetzt wird, welche selbst als Differentialquotienten eines *Kräftepotentials* dargestellt werden können, und dafs auch der Einflufs bewegter fester Körper, welche mit der Flüssigkeit in Berührung kommen, die Gültigkeit jener Voraussetzung nicht abändert. Da nun die meisten mathematisch gut definirbaren Naturkräfte als die Differentialquotienten eines Kräftepotentials dargestellt werden können, so fallen auch bei weitem die meisten mathematisch zu behandelnden Fälle von Flüssigkeitsbewegung in die Zahl derer, bei denen ein Geschwindigkeitspotential existirt.

Indessen hat schon *Euler* **) darauf aufmerksam gemacht, dafs es doch auch Fälle von Flüssigkeitsbewegung giebt, in denen kein Geschwindigkeitspotential existirt, z. B. die Drehung einer Flüssigkeit um eine Axe mit gleicher Winkelgeschwindigkeit aller Theilchen. Zu den Kräften, welche solche Arten von Bewegungen hervorbringen können, gehören magnetische Kräfte, welche auf eine von electrischen Strömen durchlaufene Flüssigkeit wirken, und namentlich die Reibung der Flüssigkeitstheilchen an einander und an festen Körpern. Der Einflufs der Reibung auf Flüssigkeiten konnte bisher noch nicht mathematisch definirt werden, und doch ist derselbe in allen Fällen, wo es sich nicht um unendlich kleine Schwingungen handelt, sehr grofs, und bringt

*) Mécanique analytique. Paris 1815. T. II, p. 304.

**) Histoire de l'Acad. des Sciences de Berlin. An. 1755, p. 292.

die bedeutendsten Abweichungen zwischen der Theorie und der Wirklichkeit hervor. Die Schwierigkeit diesen Einflufs zu definiren, und Methoden zu seiner Messung zu finden, beruhte zum grofsen Theile wohl auch darin, dafs man keine Anschauung von den Formen der Bewegung hatte, welche die Reibung in der Flüssigkeit hervorbringt. In dieser Beziehung schien mir daher eine Untersuchung der Bewegungsformen, bei denen kein Geschwindigkeitspotential existirt, von Wichtigkeit zu sein.

Die folgende Untersuchung wird nun lehren, dafs in den Fällen, wo ein Geschwindigkeitspotential existirt, die kleinsten Wassertheilchen keine Rotationsbewegungen haben, wohl aber ist wenigstens ein Theil der Wassertheilchen in Rotation begriffen in solchen Fällen, wo kein Geschwindigkeitspotential existirt.

Wirbellinien nenne ich Linien, welche durch die Flüssigkeitsmasse so gezogen sind, dafs ihre Richtung überall mit der Richtung der augenblicklichen Rotationsaxe der in ihnen liegenden Wassertheilchen zusammentrifft.

Wirbelfäden nenne ich Theile der Wassermasse, welche man dadurch aus ihr herausschneidet, dafs man durch alle Puncte des Umfangs eines unendlich kleinen Flächenelements die entsprechenden Wirbellinien construirt.

Die Untersuchung ergiebt nun, dafs wenn für alle Kräfte, welche auf die Flüssigkeit wirken, ein Kräftepotential existirt

1) kein Wassertheilchen in Rotation kommt, welches nicht von Anfang an in Rotation begriffen ist.
2) Die Wassertheilchen, welche zu irgend einer Zeit derselben Wirbellinie angehören, auch indem sie sich fortbewegen, immer zu derselben Wirbellinie gehörig bleiben.
3) Dafs das Product aus dem Querschnitte und der Rotationsgeschwindigkeit eines unendlich dünnen Wirbelfadens längs der ganzen Länge des Fadens constant ist, und auch bei der Fortbewegung des Fadens denselben Werth behält. Die Wirbelfäden müssen deshalb innerhalb der Flüssigkeit in sich zurücklaufen, oder können nur an ihren Grenzen endigen.

Dieser letztere Satz macht es möglich die Rotationsgeschwindigkeiten zu bestimmen, wenn die Form der betreffenden Wirbelfäden zu verschiedenen Zeiten gegeben ist. Ferner wird die Aufgabe gelöst, die Geschwindigkeiten der Wassertheilchen für einen gewissen Zeitpunkt zu bestimmen, wenn für diesen Zeitpunkt die Rotationsgeschwindigkeiten gegeben sind; nur bleibt da-

bei eine willkührliche Function unbestimmt, welche zur Erfüllung der Grenzbedingungen verwendet werden mufs.

Diese letztere Aufgabe führt zu einer merkwürdigen Analogie der Wirbelbewegungen des Wassers mit den electromagnetischen Wirkungen electrischer Ströme. Wenn nämlich in einem einfach zusammenhängenden *), mit bewegter Flüssigkeit gefüllten Raume ein Geschwindigkeitspotential existirt, sind die Geschwindigkeiten der Wassertheilchen gleich und gleichgerichtet den Kräften, welche eine gewisse Vertheilung magnetischer Massen an der Oberfläche des Raums auf ein magnetisches Theilchen im Innern ausüben würde. Wenn dagegen in einem solchen Raume Wirbelfäden existiren, so sind die Geschwindigkeiten der Wassertheilchen gleich zu setzen den auf ein magnetisches Theilchen ausgeübten Kräften geschlossener electrischer Ströme, welche theils durch die Wirbelfäden im Innern der Masse, theils in ihrer Oberfläche fliefsen, und deren Intensität dem Product aus dem Querschnitt der Wirbelfäden und ihrer Rotationsgeschwindigkeit proportional ist.

Ich werde mir deshalb im Folgenden öfter erlauben, die Anwesenheit von magnetischen Massen oder electrischen Strömen zu fingiren, blos um dadurch für die Natur von Functionen einen kürzeren und anschaulicheren Ausdruck zu gewinnen, die eben solche Functionen der Coordinaten sind, wie die Potentialfunctionen, oder Anziehungskräfte, welche jenen Massen oder Strömen für ein magnetisches Theilchen zukommen.

Durch diese Sätze wird die Reihe der Bewegungsformen, welche in der nicht behandelten Klasse der Integrale der hydrodynamischen Gleichungen verborgen sind, wenigstens für die Vorstellung zugänglich, wenn auch die vollständige Ausführung der Integration nur in wenigen einfachsten Fällen möglich ist, wo nur ein oder zwei geradlinige oder kreisförmige Wirbelfäden vorhanden sind in unbegrenzten oder durch eine unendliche Ebene theilweis begrenzten Wassermassen.

Es läfst sich nachweisen, dafs geradlinige parallele Wirbelfäden in einer Wassermasse, die nur durch senkrecht gegen die Fäden gestellte Ebenen be-

---

*) Ich nehme diesen Ausdruck in demselben Sinne, in welchem *Riemann* (dieses Journal Bd. LIV, S. 108) von einfach und mehrfach zusammenhängenden Flächen spricht. Ein $n$fach zusammenhängender Raum ist danach ein solcher, durch den $n-1$, aber nicht mehrere Schnittflächen gelegt werden können, ohne den Raum in zwei vollständig getrennte Theile zu trennen. Ein Ring ist also in diesem Sinne ein zweifach zusammenhängender Raum. Die Schnittflächen müssen ringsum durch die Linie, in der sie die Oberfläche des Raums schneiden, vollständig begrenzt sein.

grenzt ist, um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt rotiren, wenn man zur Bestimmung dieses Punktes, die Rotationsgeschwindigkeit gleich der Dichtigkeit einer Masse betrachtet. Die Lage des Schwerpunkts bleibt unverändert. Bei kreisförmigen Wirbelfäden dagegen, die alle auf einer gemeinsamen Axe senkrecht stehen, bewegt sich der Schwerpunkt ihres Querschnitts parallel der Axe fort.

§. 1.

Es sei innerhalb einer tropfbaren Flüssigkeit in dem Punkte, der durch die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z bestimmt ist, zur Zeit t der Druck gleich p, die den drei Coordinataxen parallelen Componenten der Geschwindigkeit u, v, w, die Componenten der auf die Einheit der flüssigen Masse wirkenden äufseren Kräfte X, Y und Z, und die Dichtigkeit, deren Aenderungen als verschwindend klein angesehen werden, gleich h, so sind die bekannten Bewegungsgleichungen für die inneren Punkte der Flüssigkeit:

$$(1.)\quad \begin{cases} X - \frac{1}{h}\cdot\frac{dp}{dx} = \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz} \\ Y - \frac{1}{h}\cdot\frac{dp}{dy} = \frac{dv}{dt} + u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dv}{dz} \\ Z - \frac{1}{h}\cdot\frac{dp}{dz} = \frac{dw}{dt} + u\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{dz} \\ 0 = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}. \end{cases}$$

Man hat bisher fast ausschliefslich nur solche Fälle behandelt, wo nicht nur die Kräfte X, Y und Z ein Potential V haben, also auf die Form gebracht werden können

$$(1\text{ a.})\quad X = \frac{dV}{dx}, \qquad Y = \frac{dV}{dy}, \qquad Z = \frac{dV}{dz},$$

sondern auch aufserdem ein Geschwindigkeitspotential φ gefunden werden kann, so dafs

$$(1\text{ b.})\quad u = \frac{d\varphi}{dx}, \qquad v = \frac{d\varphi}{dy}, \qquad w = \frac{d\varphi}{dz}.$$

Dadurch vereinfacht sich die Aufgabe aufserordentlich, indem die drei ersten der Gleichungen (1.) eine gemeinsame Integralgleichung geben, aus der p zu finden ist, nachdem man φ der vierten Gleichung gemäfs bestimmt hat, welche in diesem Falle die Gestalt annimmt:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0,$$

also mit der bekannten Differentialgleichung für das Potential magnetischer Massen übereinstimmt, welche aufserhalb des Raumes liegen, für den diese Gleichung gelten soll. Auch ist bekannt, dafs jede Function φ, welche die obige Differentialgleichung innerhalb eines einfach zusammenhängenden *) Raumes erfüllt, als das Potential einer bestimmten Vertheilung magnetischer Massen an der Oberfläche des Raumes ausgedrückt werden kann, wie ich schon in der Einleitung angeführt habe.

Damit die in der Gleichung (1 b.) verlangte Substitution gemacht werden könne, mufs sein

$$(1\text{ c.})\quad \frac{du}{dy}-\frac{dv}{dx}=0,\qquad \frac{dv}{dz}-\frac{dw}{dy}=0,\qquad \frac{dw}{dx}-\frac{dv}{dz}=0.$$

Um die mechanische Bedeutung dieser letzteren drei Bedingungen zu verstehen, können wir uns die Veränderung, welche irgend ein unendlich kleines Wasservolum in dem Zeittheilchen dt erleidet, zusammengesetzt denken aus drei verschiedenen Bewegungen: 1) einer Fortführung des Wassertheilchens durch den Raum hin, 2) einer Ausdehnung oder Zusammenziehung des Theilchens nach drei Hauptdilatationsrichtungen, wobei ein jedes aus Wasser gebildete rechtwinklige Parallelepipedon, dessen Seiten den Hauptdilatationsrichtungen parallel sind, rechtwinklig bleibt, während seine Seiten zwar ihre Länge ändern, aber ihren früheren Richtungen parallel bleiben, 3) einer Drehung um eine beliebig gerichtete temporäre Rotationsaxe, welche Drehung nach einem bekannten Satze immer als Resultante dreier Drehungen um die Coordinataxen angesehen werden kann.

Sind in dem Punkte, dessen Coordinataxen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ sind, die unter (1 c.) aufgestellten Bedingungen erfüllt, so wollen wir die Werthe von u, v, w und ihren Differentialquotienten in jenem Punkte folgendermafsen bezeichnen:

$$\begin{aligned}
u&=A, & \frac{du}{dx}&=a, & \frac{dw}{dy}&=\frac{dv}{dz}=\alpha,\\
v&=B, & \frac{dv}{dy}&=b, & \frac{du}{dz}&=\frac{dw}{dx}=\beta,\\
w&=C, & \frac{dw}{dz}&=c, & \frac{dv}{dx}&=\frac{du}{dy}=\gamma
\end{aligned}$$

*) In mehrfach zusammenhängenden Räumen kann φ mehrdeutig werden, und für mehrdeutige Functionen, die der obigen Differentialgleichung Genüge thun, gilt der Fundamentalsatz von *Green*'s Theorie der Electricität (dieses Journal Bd. XLIV, S. 360) nicht, und demgemäfs auch ein grofser Theil der aus ihm herfliefsenden Sätze nicht, welche *Gaufs* und *Green* für die magnetischen Potentialfunctionen aufgestellt haben, die ihrer Natur nach immer eindeutig sind.

und erhalten dann für Punkte, deren Coordinaten x, y, z unendlich wenig von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ verschieden sind:

$$\begin{aligned} u &= A + a(x-\mathfrak{x}) + \gamma(y-\mathfrak{y}) + \beta(z-\mathfrak{z}), \\ v &= B + \gamma(x-\mathfrak{x}) + b(y-\mathfrak{y}) + \alpha(z-\mathfrak{z}), \\ w &= C + \beta(x-\mathfrak{x}) + \alpha(y-\mathfrak{y}) + c(z-\mathfrak{z}), \end{aligned}$$

oder wenn wir setzen

$$\begin{aligned} \varphi = {} & A(x-\mathfrak{x}) + B(y-\mathfrak{y}) + C(z-\mathfrak{z}) + \tfrac{1}{2}a(x-\mathfrak{x})^2 + \tfrac{1}{2}b(y-\mathfrak{y})^2 + \tfrac{1}{2}c(z-\mathfrak{z})^2 \\ & + \alpha(y-\mathfrak{y})(z-\mathfrak{z}) + \beta(x-\mathfrak{x})(z-\mathfrak{z}) + \gamma(x-\mathfrak{x})(y-\mathfrak{y}), \end{aligned}$$

so ist

$$u = \frac{d\varphi}{dx}, \qquad v = \frac{d\varphi}{dy}, \qquad w = \frac{d\varphi}{dz}.$$

Es ist bekannt, dafs man durch eine geeignete Wahl anders gerichteter rechtwinkliger Coordinaten x_1, y_1, z_1, deren Mittelpunkt im Punkte $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ liegt, den Ausdruck für φ auf die Form bringen kann

$$\varphi = A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1 z_1 + \tfrac{1}{2} a_1 x_1^2 + \tfrac{1}{2} b_1 y_1^2 + \tfrac{1}{2} c_1 z_1^2,$$

wo dann die nach diesen neuen Coordinataxen zerlegten Geschwindigkeiten u_1, v_1, w_1 die Werthe erhalten

$$u_1 = A_1 + a_1 x_1, \qquad v_1 = B_1 + b_1 y_1, \qquad w_1 = C_1 + c_1 z_1.$$

Die der x_1 Axe parallele Geschwindigkeit u_1 ist also gleich für alle Wassertheilchen für welche x_1 denselben Werth hat, oder Wassertheilchen, welche zu Anfang des Zeittheilchens dt in einer den $y_1 z_1$ parallelen Ebene liegen, sind auch am Schlusse des Zeittheilchens dt in einer solchen. Dasselbe gilt für die $x_1 y_1$ und $x_1 z_1$ Ebene. Wenn wir also ein Parallelepipedon durch drei den letztgenannten Coordinatebenen parallele und ihnen unendlich nahe Ebenen begrenzt denken, so bilden die darin eingeschlossenen Wassertheilchen auch nach Ablauf des Zeittheilchens dt ein rechtwinkliges Parallelepipedon, dessen Flächen denselben Coordinatebenen parallel sind. Die ganze Bewegung eines solchen unendlich kleinen Parallelepipedon ist also unter der in (1 c.) ausgesprochenen Voraussetzung zusammengesetzt nur aus einer Translationsbewegung im Raume, und einer Ausdehnung oder Zusammenziehung seiner Kanten, und es ist keine Drehung desselben vorhanden.

Kehren wir zurück zu dem ersten Coordinatsystem der x, y, z und denken wir nun zu den bisher vorhandenen Bewegungen der den Punct $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ umgebenden unendlich kleinen Wassermasse noch Rotationsbewegungen um

Axen, die denen der x, y und z parallel sind, und durch den Punct $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ gehen, hinzugefügt, deren Winkelgeschwindigkeiten beziehlich sein mögen ξ, η, ζ, so sind die davon herrührenden Geschwindigkeitscomponenten parallel den Coordinataxen der x, y, z beziehlich

$$\begin{array}{ccc} 0, & (z-\mathfrak{z})\xi, & -(y-\mathfrak{y})\xi, \\ -(z-\mathfrak{z})\eta, & 0, & (x-\mathfrak{x})\eta, \\ (y-\mathfrak{y})\zeta, & -(x-\mathfrak{x})\zeta, & 0. \end{array}$$

Die Geschwindigkeiten des Theilchens, dessen Coordinaten x, y, z sind, werden nun also

$$\begin{aligned} u &= A+a(x-\mathfrak{x})+(\gamma+\zeta)(y-\mathfrak{y})+(\beta-\eta)(z-\mathfrak{z}), \\ v &= B+(\gamma-\zeta)(x-\mathfrak{x})+b(\mathfrak{y}-y)+(\alpha+\xi)(z-\mathfrak{z}), \\ w &= C+(\beta+\eta)(x-\mathfrak{x})+(\alpha-\xi)(y-\mathfrak{y})+c(z-\mathfrak{z}). \end{aligned}$$

Daraus folgt durch Differenziren

$$(2.)\quad \begin{cases} \dfrac{dv}{dz}-\dfrac{dw}{dy} = 2\xi, \\ \dfrac{dw}{dx}-\dfrac{du}{dz} = 2\eta, \\ \dfrac{du}{dy}-\dfrac{dv}{dx} = 2\zeta. \end{cases}$$

Die Gröfsen der linken Seite also, welche nach den Gleichungen (1 c.) gleich Null sein müssen, wenn ein Geschwindigkeitspotential existiren soll, sind gleich den doppelten Rotationsgeschwindigkeiten der betreffenden Wassertheilchen um die drei Coordinataxen. Die Existenz eines Geschwindigkeitspotentials schliefst die Existenz von Rotationsbewegungen der Wassertheilchen aus.

Als eine weitere characteristische Eigenthümlichkeit der Flüssigkeitsbewegung mit einem Geschwindigkeitspotential soll hier ferner noch angeführt werden, dafs in einem ganz von festen Wänden eingeschlossenen, ganz mit Flüssigkeit gefüllten und einfach zusammenhängendem Raume S keine solche Bewegung vorkommen kann. Denn wenn wir mit n die nach innen gerichtete Normale der Oberfläche eines solchen Raumes bezeichnen, mufs die zur Wand senkrecht gerichtete Geschwindigkeitscomponente $\frac{d\varphi}{dn}$ überall gleich Null sein. Dann ist nach einem bekannten Satze *) von *Green*

*) Der vorher schon angeführte Satz in diesem Journal Bd. LIV. S. 108, welcher nicht für mehrfach zusammenhängende Räume gilt.

$$\iiint\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right]dx\,dy\,dz = -\int\varphi\frac{d\varphi}{dn}\,d\omega,$$

wo links die Integration über den ganzen Raum S, rechts über die ganze Oberfläche von S, deren Flächenelement mit $d\omega$ bezeichnet ist, ausgedehnt werden mufs. Ist nun $\frac{d\varphi}{dn}$ an der ganzen Oberfläche gleich Null, so mufs auch das Integral links gleich Null sein, was nur der Fall sein kann, wenn im ganzen Raume S

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi}{dy} = \frac{d\varphi}{dz} = 0,$$

also gar keine Bewegung des Wassers stattfindet. Jede Bewegung einer begrenzten Flüssigkeitsmasse in einem einfach zusammenhängenden Raume, die ein Geschwindigkeitspotential hat, ist also nothwendig mit einer Bewegung der Oberfläche der Flüssigkeit verbunden. Ist diese Bewegung der Oberfläche, d. h. $\frac{d\varphi}{dn}$ vollständig gegeben, so ist dadurch auch die ganze Bewegung der eingeschlossenen Flüssigkeitsmasse eindeutig bestimmt. Denn gäbe es zwei Funktionen $\varphi_{\prime}$ und $\varphi_{\prime\prime}$, welche gleichzeitig im Inneren des Raumes S der Gleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0$$

und an der Oberfläche die Bedingung

$$\frac{d\varphi}{dn} = \psi$$

erfüllten, wo ψ die durch die gegebene Bewegung der Oberfläche bedingten Werthe von $\frac{d\varphi}{dn}$ bezeichnet, so würde auch die Function $(\varphi_{\prime}-\varphi_{\prime\prime})$ die erstere Bedingung im Innern von S erfüllen, an der Oberfläche aber

$$\frac{d(\varphi_{\prime}-\varphi_{\prime\prime})}{dn} = 0$$

sein, woraus wie eben gezeigt ist, auch für das ganze Innere von S folgen würde

$$\frac{d(\varphi_{\prime}-\varphi_{\prime\prime})}{dx} = \frac{d(\varphi_{\prime}-\varphi_{\prime\prime})}{dy} = \frac{d(\varphi_{\prime}-\varphi_{\prime\prime})}{dz} = 0.$$

Beiden Functionen würden also genau dieselben Geschwindigkeiten auch im ganzen Innern von S entsprechen.

Also nur in dem Falle, wo kein Geschwindigkeitspotential existirt, können Drehungen der Wassertheilchen, und in sich zurücklaufende Bewegungen

innerhalb einfach zusammenhängender ganz geschlossener Räume vorkommen. Wir können daher die Bewegungen, denen ein Geschwindigkeitspotential nicht zukommt, im Allgemeinen als *Wirbelbewegungen* characterisiren.

§. 2.

Wir wollen zunächst die Aenderungen der Rotationsgeschwindigkeiten ξ, η und ζ während der Bewegung bestimmen, wenn nur Kräfte wirken, denen ein Kräftepotential zukommt. Ich bemerke zunächst im Allgemeinen, dafs wenn ψ eine Function von x, y, z, t ist, und um $\partial\psi$ wächst, während die letzteren vier Gröfsen um ∂x, ∂y, ∂z und ∂t wachsen, wir haben

$$\partial\psi = \frac{d\psi}{dt}\partial t + \frac{d\psi}{dx}\partial x + \frac{d\psi}{dy}\partial y + \frac{d\psi}{dz}\partial z.$$

Soll nun die Aenderung von ψ während des Zeittheilchens ∂t für ein constant bleibendes Wassertheilchen bestimmt werden, so müssen wir den Gröfsen ∂x, ∂y und ∂z dieselben Werthe geben, welche sie für das bewegte Wassertheilchen haben, nämlich

$$\partial x = u\,\partial t, \qquad \partial y = v\,\partial t, \qquad \partial z = w\,\partial t$$

und erhalten

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{d\psi}{dt} + u\frac{d\psi}{dx} + v\frac{d\psi}{dy} + w\frac{d\psi}{dz}$$

Das Zeichen $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ werde ich im Folgenden immer nur in dem Sinne gebrauchen, dafs $\frac{\partial\psi}{\partial t}dt$ die Aenderung von ψ während der Zeit dt für dasselbe Wassertheilchen bezeichnet, dessen Coordinaten zu Anfang der Zeit dt x, y und z waren.

Indem wir aus den ersten der Gleichungen (1.) mit Hülfe von Differentiationen die Gröfse p eliminiren, und dabei die Bezeichnungen der Gleichungen (2.) einführen, und für die Kräfte X, Y, Z die Gleichungen (1a.) als erfüllbar betrachten, erhalten wir folgende drei Gleichungen:

$$(3.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\xi}{\partial t} = \xi\dfrac{du}{dx} + \eta\dfrac{du}{dy} + \zeta\dfrac{du}{dz}, \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial t} = \xi\dfrac{dv}{dx} + \eta\dfrac{dv}{dy} + \zeta\dfrac{dv}{dz}, \\ \dfrac{\partial\zeta}{\partial t} = \xi\dfrac{dw}{dx} + \eta\dfrac{dw}{dy} + \zeta\dfrac{dw}{dz}, \end{cases}$$

oder auch

$$(3\,a.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\xi}{\partial t} = \xi\dfrac{du}{dx}+\eta\dfrac{dv}{dx}+\zeta\dfrac{dw}{dx}, \\[2ex] \dfrac{\partial\eta}{\partial t} = \xi\dfrac{du}{dy}+\eta\dfrac{dv}{dy}+\zeta\dfrac{dw}{dy}, \\[2ex] \dfrac{\partial\zeta}{\partial t} = \xi\dfrac{du}{dz}+\eta\dfrac{dv}{dz}+\zeta\dfrac{dw}{dz}. \end{cases}$$

Wenn in einem Wassertheilchen ξ, η und ζ gleichzeitig gleich Null sind, sind auch

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} = 0.$$

Diejenigen Wassertheilchen also, welche nicht schon Rotationsbewegungen haben, bekommen auch im Verlaufe der Zeit keine Rotationsbewegungen.

Bekanntlich kann man Rotationen nach der Methode des Parallelogramms der Kräfte zusammensetzen. Sind ξ, η, ζ die Rotationsgeschwindigkeiten um die Coordinataxen, so ist die Rotationsgeschwindigkeit q um die augenblickliche Axe der Rotation

$$q = \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$$

und die Cosinus der Winkel, welche diese Axe mit den Coordinaten bildet, sind beziehlich $\frac{\xi}{q}$, $\frac{\eta}{q}$ und $\frac{\zeta}{q}$.

Wenn wir nun in Richtung dieser augenblicklichen Drehungsaxe, das unendlich kleine Stück $q\varepsilon$ abschneiden, so sind die Projectionen dieses Stückes auf die drei Coordinataxen beziehlich $\varepsilon\xi$, $\varepsilon\eta$ und $\varepsilon\zeta$. Während im Punkte x, y, z die Componenten der Geschwindigkeit u, v und w sind, sind sie am anderen Endpunkt von $q\varepsilon$ beziehlich

$$\begin{aligned} u_1 &= u+\varepsilon\xi\frac{du}{dx}+\varepsilon\eta\frac{du}{dy}+\varepsilon\zeta\frac{du}{dz}, \\ v_1 &= v+\varepsilon\xi\frac{dv}{dx}+\varepsilon\eta\frac{dv}{dy}+\varepsilon\zeta\frac{dv}{dz}, \\ w_1 &= w+\varepsilon\xi\frac{dw}{dx}+\varepsilon\eta\frac{dw}{dy}+\varepsilon\zeta\frac{dw}{dz}. \end{aligned}$$

Nach Verlauf der Zeit dt haben also die Projectionen der Entfernung der beiden Wassertheilchen, welche zu Anfang von dt das Stück $q\varepsilon$ begrenzten, einen Werth erlangt, welchen man mit Berücksichtigung der Gleichungen (3.) folgendermafsen schreiben kann:

$$\varepsilon\xi + (u_1 - u)\,dt = \varepsilon\left(\xi + \frac{\partial\xi}{\partial t}\,dt\right),$$

$$\varepsilon\eta + (v_1 - v)\,dt = \varepsilon\left(\eta + \frac{\partial\eta}{\partial t}\,dt\right),$$

$$\varepsilon\zeta + (w_1 - w)\,dt = \varepsilon\left(\zeta + \frac{\partial\zeta}{\partial t}\,dt\right).$$

Links stehen hier die Projectionen der neuen Lage der Verbindungslinie $q\varepsilon$, rechts die mit dem constanten Factor ε multiplicirten Projectionen der neuen Rotationsgeschwindigkeit; es folgt aus diesen Gleichungen, dafs die Verbindungslinie der beiden Wassertheilchen, welche zu Anfang der Zeit dt das Stück $q\varepsilon$ der augenblicklichen Rotationsaxe begrenzten, auch nach Ablauf der Zeit dt noch mit der jetzt geänderten Rotationsaxe zusammenfällt.

Wenn wir eine Linie, deren Richtung überall mit der Richtung der augenblicklichen Rotationsaxe der dort befindlichen Wassertheilchen zusammentrifft, wie oben festgesetzt ist, eine *Wirbellinie* nennen, so können wir den eben gefundenen Satz so aussprechen: *Eine jede Wirbellinie bleibt fortdauernd aus denselben Wassertheilchen zusammengesetzt,* während sie mit diesen Wassertheilchen in der Flüssigkeit fortschwimmt.

Die rechtwinkligen Componenten der Rotationsgeschwindigkeit nehmen in demselben Verhältnisse zu, wie die Projectionen des Stücks εq der Rotationsaxe; daraus folgt, dafs *die Gröfse der resultirenden Rotationsgeschwindigkeit in einem bestimmten Wassertheilchen in demselben Verhältnisse sich verändert, wie der Abstand dieses Wassertheilchens von seinen Nachbarn in der Rotationsaxe.*

Denken wir uns durch alle Punkte des Umfangs einer unendlich kleinen Fläche Wirbellinien gelegt, so wird dadurch aus der Flüssigkeit ein Faden von unendlich kleinem Querschnitt herausgetheilt, der *Wirbelfaden* genannt werden soll. Das Volumen eines zwischen zwei bestimmten Wassertheilchen gelegenen Stücks eines solchen Fadens, welches nach den eben bewiesenen Sätzen immer von denselben Wassertheilchen angefüllt bleibt, mufs bei der Fortbewegung constant bleiben, sein Querschnitt sich also im umgekehrten Verhältnisse als die Länge ändern. Danach kann man den eben hingestellten Satz auch so aussprechen: *Das Product aus der Rotationsgeschwindigkeit und dem Querschnitt in einem aus denselben Wassertheilchen bestehenden Stücke eines Wirbelfadens bleibt bei der Fortbewegung desselben constant.*

Aus den Gleichungen (2.) folgt unmittelbar, dafs

$$\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}=0.$$

Daraus weiter, dafs

$$\iiint\left(\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}\right)dx\,dy\,dz=0,$$

wobei die Integration über einen ganz beliebigen Theil S der Wassermasse ausgedehnt werden kann. Wenn wir partiell integriren, folgt daraus

$$\iint\xi\,dy\,dz+\iint\eta\,dx\,dz+\iint\zeta\,dx\,dy=0,$$

wobei die Integrationen über die ganze Oberfläche des Raumes S auszudehnen sind. Nennen wir $d\omega$ ein Flächenelement dieser Oberfläche und α, β, γ die drei Winkel, welche die nach aufsen gerichtete Normale von $d\omega$ mit den Coordinataxen bildet, so ist

$$dy\,dz=\cos\alpha\,d\omega,\qquad dx\,dz=\cos\beta\,d\omega,\qquad dx\,dy=\cos\gamma\,d\omega,$$

also

$$\iint(\xi\cos\alpha+\eta\cos\beta+\zeta\cos\gamma)\,d\omega=0,$$

oder wenn man q die resultirende Rotationsgeschwindigkeit nennt, und ϑ den Winkel zwischen ihr und der Normale,

$$\iint q\cos\vartheta.d\omega=0,$$

die Integration über die ganze Oberfläche von S ausgedehnt.

Nun sei S ein Stück eines Wirbelfadens, begrenzt durch zwei unendlich kleine senkrecht gegen die Axe des Fadens gelegte Ebenen $\omega_{,}$ und $\omega_{,,}$, so ist $\cos\vartheta$ an einer dieser Ebenen gleich 1, an der andern -1, an der ganzen übrigen Oberfläche des Fadens gleich 0, folglich wenn $q_{,}$ und $q_{,,}$ die Rotationsgeschwindigkeiten in $\omega_{,}$ und $\omega_{,,}$ sind, reducirt sich die letzte Gleichung auf

$$q_{,}\omega_{,}=q_{,,}\omega_{,,},$$

woraus folgt: ***Das Product aus der Rotationsgeschwindigkeit und dem Querschnitt ist in der ganzen Länge desselben Wirbelfadens constant.*** Dafs es sich auch bei der Fortbewegung des Fadens nicht ändert, ist vorher schon bewiesen worden.

Es folgt hieraus auch, dafs ein Wirbelfaden nirgends innerhalb der Flüssigkeit aufhören dürfe, sondern entweder ringförmig innerhalb der Flüssigkeit in sich zurücklaufen, oder bis an die Grenzen der Flüssigkeit reichen

müsse. Denn wenn ein Wirbelfaden innerhalb der Flüssigkeit irgend wo endete, würde sich eine geschlossene Fläche construiren lassen, für welche das Integral $\int q \cos\vartheta \, d\omega$ nicht den Werth Null hätte.

§. 3.

Wenn man die Bewegung der in der Flüssigkeit vorhandenen Wirbelfäden bestimmen kann, so werden durch die hingestellten Sätze auch die Gröfsen ξ, η und ζ vollständig zu bestimmen sein. Wir wollen jetzt an die Aufgabe gehen, aus den Gröfsen ξ, η und ζ die Geschwindigkeiten u, v und w zu finden.

Es seien also innerhalb einer Wassermasse, die den Raum S einnimmt, die Werthe von ξ, η und ζ gegeben, welche drei Gröfsen der Bedingung genügen, dafs

$$(2\,\text{a.})\qquad \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0.$$

Es sollen gefunden werden u, v und w, so dafs sie innerhalb des ganzen Raumes S den Bedingungen genügen, dafs

$$(1.)\qquad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0,$$

$$(2.)\qquad \begin{cases} \dfrac{dv}{dz} - \dfrac{dw}{dy} = 2\xi, \\[2mm] \dfrac{dw}{dx} - \dfrac{du}{dz} = 2\eta, \\[2mm] \dfrac{du}{dy} - \dfrac{dv}{dx} = 2\zeta. \end{cases}$$

Dazu kommen noch die durch die jedesmalige Natur der Aufgabe für die Grenze des Raumes S geforderten Bedingungen.

Bei der gegebenen Vertheilung von ξ, η, ζ können nun theils Wirbellinien vorkommen, welche innerhalb des Raumes S geschlossen in sich zurücklaufen, theils solche welche die Grenze von S erreichen und hier abbrechen. Wenn letzteres der Fall ist, so kann man jedenfalls entweder auf der Oberfläche von S oder aufserhalb S diese Wirbellinien fortsetzen und in sich zurücklaufend schliefsen, so dafs dann ein gröfserer Raum S_1 existirt, welcher nur geschlossene Wirbellinien enthält, und an dessen ganzer Oberfläche ξ, η, ζ und ihre Resultante q selbst gleich Null sind, oder wenigstens

$$(2\,\text{b.})\qquad \xi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma = q\cos\vartheta = 0.$$

Wie vorher bedeuten hier α, β, γ die Winkel zwischen der Normale des betreffenden Theils der Oberfläche von S_1 und den Coordinataxen, ϑ den Winkel zwischen der Normale und der resultirenden Rotationsaxe.

Werthe von u, v, w, welche den Gleichungen (1.)$_4$ und (2.) genügen, erhalten wir nun, indem wir setzen

$$(4.)\quad \begin{cases} u = \dfrac{dP}{dx} + \dfrac{dN}{dy} - \dfrac{dM}{dz}, \\ v = \dfrac{dP}{dy} + \dfrac{dL}{dz} - \dfrac{dN}{dx}, \\ w = \dfrac{dP}{dz} + \dfrac{dM}{dx} - \dfrac{dL}{dy}, \end{cases}$$

und die Gröfsen L, M, N, P durch die Bedingungen bestimmen, dafs innerhalb des Raumes S_1

$$(5.)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2L}{dx^2} + \dfrac{d^2L}{dy^2} + \dfrac{d^2L}{dz^2} = 2\xi, \\ \dfrac{d^2M}{dx^2} + \dfrac{d^2M}{dy^2} + \dfrac{d^2M}{dz^2} = 2\eta, \\ \dfrac{d^2N}{dx^2} + \dfrac{d^2N}{dy^2} + \dfrac{d^2N}{dz^2} = 2\zeta, \\ \dfrac{d^2P}{dx^2} + \dfrac{d^2P}{dy^2} + \dfrac{d^2P}{dz^2} = 0. \end{cases}$$

Wie diese letzteren Gleichungen integrirt werden, ist bekannt. L, M, N sind die Potentialfunctionen fingirter magnetischer Massen, die mit der Dichtigkeit $-\frac{\xi}{2\pi}$, $-\frac{\eta}{2\pi}$ und $-\frac{\zeta}{2\pi}$ durch den Raum S_1 verbreitet sind, P die Potentialfunction von Massen, die aufserhalb des Raumes S liegen. Bezeichnen wir die Entfernung eines Punktes, dessen Coordinaten a, b, c sind, von dem Punkte x, y, z mit r, und mit ξ_a, η_a, ζ_a die Werthe von ξ, η, ζ in dem Punkte a, b, c, so ist also

$$(5\text{ a.})\quad \begin{cases} L = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\iiint \dfrac{\xi_a}{r}\, da\, db\, dc \\ M = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\iiint \dfrac{\eta_a}{r}\, da\, db\, dc \\ N = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\iiint \dfrac{\zeta_a}{r}\, da\, db\, dc, \end{cases}$$

die Integrationen über den Raum S_1 ausgedehnt, und

$$P = \iiint \frac{k}{r}\, da\, db\, dc,$$

wo k eine willkührliche Function von a, b, c ist, und die Integration über den äufseren, S umschliefsenden Raum auszudehnen ist. Die willkührliche Function k mufs so bestimmt werden, dafs die Grenzbedingungen erfüllt werden, eine Aufgabe, deren Schwierigkeit ähnlich denen über electrische und magnetische Vertheilung ist.

Dafs die in (4.) gegebenen Werthe von u, v und w die Bedingung $(1.)_4$ erfüllen, ergiebt sich gleich durch Differentiation mit Berücksichtigung der vierten der Gleichungen (5.).

Ferner findet man durch Differentiation der Gleichungen (4.) mit Berücksichtigung der ersten drei von (5.), dafs

$$\frac{dv}{dz}-\frac{dw}{dy} = 2\xi-\frac{d}{dx}\left[\frac{dL}{dx}+\frac{dM}{dy}+\frac{dN}{dz}\right]$$
$$\frac{dw}{dx}-\frac{du}{dz} = 2\eta-\frac{d}{dy}\left[\frac{dL}{dx}+\frac{dM}{dy}+\frac{dN}{dz}\right]$$
$$\frac{du}{dy}-\frac{dv}{dx} = 2\zeta-\frac{d}{dz}\left[\frac{dL}{dx}+\frac{dM}{dy}+\frac{dN}{dz}\right]$$

Die Gleichungen (2.) sind also ebenfalls erfüllt, wenn nachgewiesen werden kann, dafs im ganzen Raume S_1

$$\text{(5 b.)} \qquad \frac{dL}{dx}+\frac{dM}{dy}+\frac{dN}{dz} = 0.$$

Dafs dies der Fall sei, ergiebt sich aus den Gleichungen (5 a.)

$$\frac{dL}{dx} = +\frac{1}{2\pi}\iiint\frac{\xi_a(x-a)}{r^3}\,da\,db\,dc,$$

oder nach partieller Integration

$$\frac{dL}{dx} = \frac{1}{2\pi}\iint\frac{\xi_a}{r}\,db\,dc-\frac{1}{2\pi}\iiint\frac{1}{r}\cdot\frac{d\xi_a}{da}\,da\,db\,dc,$$
$$\frac{dM}{dy} = \frac{1}{2\pi}\iint\frac{\eta_a}{r}\,da\,dc-\frac{1}{2\pi}\iiint\frac{1}{r}\cdot\frac{d\eta_a}{db}\,da\,db\,dc,$$
$$\frac{dN}{dz} = \frac{1}{2\pi}\iint\frac{\zeta_a}{r}\,da\,db-\frac{1}{2\pi}\iiint\frac{1}{r}\cdot\frac{d\zeta_a}{dc}\,da\,db\,dc.$$

Addiren wir diese drei Gleichungen und nennen das Flächenelement der Oberfläche von S wieder $d\omega$, so erhalten wir

$$\frac{dL}{dx}+\frac{dM}{dy}+\frac{dN}{dz} = \frac{1}{2\pi}\int(\xi_a\cos\alpha+\eta_a\cos\beta+\zeta_a\cos\gamma)\frac{1}{r}\,d\omega$$
$$-\frac{1}{2\pi}\iiint\frac{1}{r}\left(\frac{d\xi_a}{da}+\frac{d\eta_a}{db}+\frac{d\zeta_a}{dc}\right)da\,db\,dc.$$

Da aber im ganzen Innern des Raumes

$$(2\text{a.})\qquad \frac{d\xi_a}{da}+\frac{d\eta_a}{db}+\frac{d\zeta_a}{dc}=0$$

und auf seiner ganzen Oberfläche

$$(2\text{b.})\qquad \xi_a\cos\alpha+\eta_a\cos\beta+\zeta_a\cos\gamma=0,$$

so sind beide Integrale gleich 0 und die Gleichung (5 b.) wie die Gleichungen (2.) erfüllt. Die Gleichungen (4.) und (5.) oder (5 a.) sind somit wirklich Integrale der Gleichungen $(1.)_4$ und (2.)

Die in der Einleitung erwähnte Analogie zwischen den Fernwirkungen der Wirbelfäden und den electromagnetischen Fernwirkungen stromleitender Dräthe, welche ein sehr gutes Mittel abgiebt, um die Form der Wirbelbewegungen anschaulich zu machen, ergiebt sich aus diesen Sätzen.

Wenn wir die Werthe von L, M, N aus den Gleichungen (5 a.) in die Gleichung (4.) setzen, und diejenigen unendlich kleinen Theile von u, v und w, welche in den Integralen von dem Körperelement da, db, dc herrühren, mit Δu, Δv, Δw bezeichnen, ihre Resultante mit Δp, so ist

$$\Delta u=\frac{1}{2\pi}\,\frac{(y-b)\zeta_a-(z-c)\eta_a}{r^3}\,da\,db\,dc,$$

$$\Delta v=\frac{1}{2\pi}\,\frac{(z-c)\xi_a-(x-a)\zeta_a}{r^3}\,da\,db\,dc,$$

$$\Delta w=\frac{1}{2\pi}\,\frac{(x-a)\eta_a-(y-b)\xi_a}{r^3}\,da\,db\,dc,$$

aus diesen Gleichungen geht hervor, dafs

$$\Delta u(x-a)+\Delta v(y-b)+\Delta w(z-c)=0,$$

d. h. die Resultante Δp von Δu, Δv und Δw macht mit r einen rechten Winkel. Ferner

$$\xi_a\Delta u+\eta_a\Delta v+\zeta_a\Delta w=0,$$

d. h. dieselbe Resultante Δp macht auch mit der resultirenden Rotationsaxe in a, b, c einen rechten Winkel. Endlich

$$\Delta p=\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2+\Delta w^2}=\frac{da\,db\,dc}{2\pi r^2}\,q\sin\nu,$$

wo q die Resultante von ξ_a, η_a, ζ_a und ν der Winkel zwischen ihr und r ist, welcher durch die Gleichung bestimmt wird

$$qr\cos\nu=(x-a)\xi_a+(y-b)\eta_a+(z-c)\zeta_a.$$

Jedes rotirende Wassertheilchen a bedingt also in jedem anderen Theilchen b derselben Wassermasse eine Geschwindigkeit, welche senkrecht gegen die durch die Rotationsaxe von a und das Theilchen b gelegte Ebene steht. Die Gröfse dieser Geschwindigkeit ist direct proportional dem Volumen von a, seiner Rotationsgeschwindigkeit und dem Sinus des Winkels zwischen der Linie ab und der Rotationsaxe, umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung beider Theilchen.

Genau demselben Gesetze folgt die Kraft, welche eine in a befindliche electrische, der Rotationsaxe parallele Strömung auf ein in b befindliches magnetisches Theilchen ausüben würde.

Die mathematische Verwandtschaft beider Klassen von Naturerscheinungen beruht darin, dafs bei den Wasserwirbeln in denjenigen Theilen der Wassermasse, welche keine Rotation haben, ein Geschwindigkeitspotential φ existirt, welches der Gleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=0$$

Genüge thut, welche Gleichung nur innerhalb der Wirbelfäden nicht gilt. Wenn wir uns die Wirbelfäden aber immer als geschlossen denken entweder innerhalb oder aufserhalb der Wassermasse, so ist der Raum, in welchem die Differentialgleichung für φ gilt, ein mehrfach zusammenhängender, denn er bleibt noch zusammenhängend, wenn man Schnittflächen durch ihn gelegt denkt, deren jede durch einen Wirbelfaden vollständig begrenzt wird. In solchen mehrfach zusammenhängenden Räumen kann nun eine Function φ, welche der obigen Differentialgleichung genügt, mehrdeutig werden, und sie mufs mehrdeutig werden, wenn sie in sich selbst zurücklaufende Strömungen darstellen soll, denn da die Geschwindigkeiten der Wassermasse aufserhalb der Wirbelfäden den Differentialquotienten von φ proportional sind, so mufs man der Bewegung des Wassers folgend zu immer gröfseren Werthen von φ fortschreiten. Ist die Strömung also in sich zurücklaufend, und kommt man ihr folgend schliefslich an den Ort zurück, wo man schon früher war, so findet man für diesen einen zweiten höheren Werth von φ. Da man dasselbe unendlich oft ausführen kann, so mufs es unendlich viel verschiedene Werthe von φ für jeden Punkt eines solchen mehrfach zusammenhängenden Raumes geben, welche um gleiche Differenzen von einander verschieden sind, wie die verschiedenen Werthe von Arc tang$\left(\frac{x}{y}\right)$, welches eine solche mehrdeutige Function ist, die der obigen Differentialgleichung genügt.

Ebenso verhält es sich mit den electromagnetischen Wirkungen eines geschlossenen electrischen Stromes. Derselbe wirkt in die Ferne, wie eine gewisse Vertheilung magnetischer Massen auf einer von dem Stromleiter begrenzten Fläche. Aufserhalb des Stromes können deshalb die Kräfte, die er auf ein magnetisches Theilchen ausübt, als die Differentialquotienten einer Potentialfunction V betrachtet werden, welche der Gleichung genügt

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=0.$$

Auch hier ist aber der Raum, welcher den geschlossenen Stromleiter umgiebt, und in dem diese Gleichung gilt, mehrfach zusammenhängend, und V vieldeutig.

Bei den Wirbelbewegungen des Wassers also, wie bei den electromagnetischen Wirkungen, hängen Geschwindigkeiten oder Kräfte aufserhalb des von Wirbelfäden oder electrischen Strömen durchzogenen Raumes von ***mehrdeutigen Potentialfunctionen*** ab, welche übrigens der allgemeinen Differentialgleichung der magnetischen Potentialfunctionen Genüge thun, während innerhalb des von Wirbelfäden oder electrischen Strömen durchzogenen Raumes statt der Potentialfunctionen, die hier nicht existiren, andere gemeinsame Functionen auftreten, wie sie in den Gleichungen (4.), (5.) und (5 a.) hingestellt sind. Bei den einfach fortströmenden Wasserbewegungen und den magnetischen Kräften dagegen haben wir es mit ***eindeutigen*** Potentialfunctionen zu thun, ebenso wie bei der Gravitation, den electrischen Anziehungskräften, den constant gewordenen electrischen und thermischen Strömungen.

Diejenigen Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, in denen ein eindeutiges Geschwindigkeitspotential existirt, können wir ***Integrale erster Klasse*** nennen. Diejenigen dagegen, bei welchen Rotationen eines Theils der Wassertheilchen und demgemäfs in den nicht rotirenden Wassertheilchen ein mehrdeutiges Geschwindigkeitspotential vorkommt, ***Integrale zweiter Klasse.*** Es kann vorkommen, dafs im letzteren Falle nur solche Theile des Raumes in der Aufgabe zu betrachten sind, welche keine rotirenden Wassertheile enthalten, z. B. bei Bewegungen des Wassers in ringförmigen Gefäfsen, wobei ein Wirbelfaden durch die Axe des Gefäfses gehend gedacht werden kann, und wo also die Aufgabe doch noch zu denen gehört, die mittelst der Annahme eines Geschwindigkeitspotentials gelöst werden können.

In den hydrodynamischen Integralen erster Klasse sind die Geschwindigkeiten der Wassertheilchen gleich gerichtet und proportional den Kräften, welche eine gewisse aufserhalb der Flüssigkeit befindliche Vertheilung magne-

tischer Massen auf ein am Orte des Wassertheilchens befindliches magnetisches Theilchen hervorbringen würde.

In den hydrodynamischen Integralen zweiter Klasse sind die Geschwindigkeiten der Wassertheilchen gleich gerichtet und proportional den auf ein magnetisches Theilchen wirkenden Kräften, welche geschlossene electrische, durch die Wirbelfäden fliefsende Ströme, deren Dichtigkeit der Rotationsgeschwindigkeit dieser Fäden proportional wäre, vereint mit aufserhalb der Flüssigkeit befindlichen magnetischen Massen hervorbringen würden. Die electrischen Ströme innerhalb der Flüssigkeit würden mit dem betreffenden Wirbelfaden fortfliefsen und constante Intensität behalten müssen. Die angenommene Vertheilung magnetischer Massen aufserhalb der Flüssigkeit oder auf ihrer Oberfläche mufs so bestimmt werden, dafs den Grenzbedingungen Genüge geschieht. Jede magnetische Masse kann bekanntlich auch durch electrische Strömungen ersetzt werden. Statt also in den Werthen für u, v und w noch die Potentialfunction P einer aufserhalb liegenden Masse x hinzuzufügen, erhält man eine ebenso allgemeine Lösung, wenn man den Gröfsen ξ, η und ζ aufserhalb oder selbst nur an der Oberfläche der Flüssigkeit beliebige Werthe ertheilt, aber so, dafs nur geschlossene Stromfäden entstehen, und dann die Integration in den Gleichungen (5 a.) über den ganzen Raum ausdehnt, in welchem ξ, η und ζ von 0 verschieden sind.

§. 4.

In den hydrodynamischen Integralen erster Art genügt es, wie ich oben gezeigt habe, die Bewegung der Oberfläche zu kennen. Dadurch ist die Bewegung im Innern der Flüssigkeit ganz bestimmt. Bei den Integralen zweiter Art ist dagegen noch die Bewegung der innerhalb der Flüssigkeit befindlichen Wirbelfäden unter ihrem gegenseitigen Einflusse und mit Berücksichtigung der Grenzbedingungen zu bestimmen, wodurch die Aufgabe viel verwickelter wird. Indessen läfst sich für gewisse einfache Fälle auch diese Aufgabe lösen, namentlich für solche, wo Rotation der Wassertheilchen nur in gewissen Flächen oder Linien vorkommt, und die Gestalt dieser Flächen und Linien bei der Fortbewegung unverändert bleibt.

Die Eigenschaften von Flächen, welchen eine unendlich dünne Schicht rotirender Wassertheilchen anliegt, ergeben sich leicht aus den Gleichungen (5 a.). Wenn ξ, η und ζ nur in einer unendlich dünnen Schicht von 0 verschieden sind, so werden ihre Potentialfunctionen L, M und N nach bekannten Sätzen auf beiden Seiten der Schicht gleiche Werthe haben, aber

ihre Differentialquotienten, in Richtung der Normale der Schicht genommen, werden verschieden sein. Denken wir uns die Coordinataxen so gelegt, dafs an der von uns betrachteten Stelle der Wirbelfläche die z Axe der Normale der Fläche, die x Axe der Rotationsaxe der Wassertheilchen in der Fläche entspricht, so dafs an dieser Stelle $\eta = \zeta = 0$, so werden die Potentiale M und N, so wie ihre Differentialquotienten auf beiden Seiten der Schicht dieselben Werthe haben, eben so L und $\frac{dL}{dx}$ und $\frac{dL}{dy}$, dagegen wird $\frac{dL}{dz}$ zwei verschiedene Werthe haben, deren Unterschied gleich $2\xi\varepsilon$ ist, wenn ε die Dicke der Schicht bezeichnet. Demgemäfs ergeben die Gleichungen (4.), dafs u und w auf beiden Seiten der Wirbelfläche gleiche Werthe haben, v aber Werthe, die um $2\xi\varepsilon$ von einander verschieden sind. *Es ist also auf beiden Seiten einer Wirbelfläche diejenige Componente der Geschwindigkeit, welche senkrecht gegen die Wirbellinien stehend die Fläche tangirt, von verschiedenem Werthe.* Innerhalb der Schicht rotirender Wassertheilchen mufs man sich die betreffende Componente der Geschwindigkeit gleichmäfsig zunehmend denken von demjenigen Werthe, der an der einen Seite der Fläche stattfindet, zu dem der andern Seite. Denn wenn ξ durch die ganze Dicke der Schicht hier constant ist, und α einen ächten Bruch bezeichnet, v' den Werth von v auf der einen, v_1 auf der andern Seite, v_α in der Schicht selbst um $\alpha\varepsilon$ von der ersten Seite entfernt, so sahen wir, dafs $v' - v_1 = 2\xi\varepsilon$, weil zwischen beiden eine Schicht von der Dicke ε und der Rotationsintensität ξ liegt. Aus demselben Grunde mufs $v' - v_\alpha = 2\xi\varepsilon\alpha = \alpha(v' - v_1)$ sein, worin der hingestellte Satz liegt. Da wir uns die rotirenden Wassertheilchen selbst als bewegt denken müssen, und die Aenderung der Vertheilung auf der Fläche von ihrer Bewegung abhängt, so müssen wir ihnen als mittlere Geschwindigkeit ihres Fortfliefsens längs der Fläche für die ganze Dicke der Schicht eine solche zuertheilen, welche dem arithmetischen Mittel der an beiden Seiten der Schicht stattfindenden Geschwindigkeiten entspricht.

Eine solche Wirbelfläche würde z. B. entstehen, wenn zwei vorher getrennte und bewegte Flüssigkeitsmassen in Berührung mit einander kommen. An der Berührungsfläche würden sich die gegen diese senkrechten Geschwindigkeiten nothwendig ausgleichen müssen. Die sie tangirenden Geschwindigkeiten werden aber im Allgemeinen in den beiden Flüssigkeitsmassen verschieden sein. Die Berührungsfläche würde also die Eigenschaften einer Wirbelfläche haben.

Dagegen darf man sich im Allgemeinen vereinzelte Wirbelfäden nicht als unendlich dünn denken, weil sonst die Geschwindigkeiten an entgegengesetzten Seiten des Fadens unendlich grofse und entgegengesetzte Werthe erhalten, und die eigene Geschwindigkeit des Fadens deshalb unbestimmt wird. Um nun doch gewisse allgemeine Schlüsse für die Bewegung sehr dünner Fäden von beliebigem Querschnitt ziehen zu können, wird uns das Princip von der *Erhaltung der lebendigen Kraft* dienen.

Ehe wir also zu einzelnen Beispielen übergehen, wollen wir noch die Gleichung für die lebendige Kraft K der bewegten Wassermasse bilden:

$$(6.)\qquad K = \tfrac{1}{2}h\iiint(u^2+v^2+w^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Indem ich in dem Integral nach den Gleichungen (4.) setze

$$\begin{aligned} u^2 &= u\left(\frac{dP}{dx}+\frac{dN}{dy}-\frac{dM}{dz}\right),\\ v^2 &= v\left(\frac{dP}{dy}+\frac{dL}{dz}-\frac{dN}{dx}\right),\\ w^2 &= w\left(\frac{dP}{dz}+\frac{dM}{dx}-\frac{dL}{dy}\right) \end{aligned}$$

und partiell integrire, dann mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ und $\cos\vartheta$ die Winkel bezeichne, welche die nach innen gerichtete Normale des Elements $d\omega$ der Wassermasse mit den Coordinataxen und der resultirenden Geschwindigkeit q bildet, erhalte ich mit Berücksichtigung der Gleichungen (2.) und $(1.)_4$

$$\begin{aligned}(6\text{a.})\quad K = -\frac{h}{2}\int d\omega\,[Pq\cos\vartheta + L(v\cos\gamma - w\cos\beta)+M(w\cos\alpha-u\cos\gamma)\\ +N(u\cos\beta - v\cos\alpha)] - h\iiint(L\xi+M\eta+N\zeta)\,dx\,dy\,dz.\end{aligned}$$

Den Werth von $\frac{dK}{dt}$ erhält man aus den Gleichungen (1.), indem man die erste mit u, die zweite mit v, die dritte mit w multiplicirt und addirt,

$$\begin{aligned} h\left(u\frac{du}{dt}+v\frac{dv}{dt}+w\frac{dw}{dt}\right) = -\left(u\frac{dp}{dx}+v\frac{dp}{dy}+w\frac{dp}{dz}\right)+h\left(u\frac{dV}{dx}+v\frac{dV}{dy}+w\frac{dV}{dz}\right)\\ -\frac{h}{2}\left(u\frac{d(q^2)}{dx}+v\frac{d(q^2)}{dy}+w\frac{d(q^2)}{dz}\right).\end{aligned}$$

Wenn man beide Seiten mit $dx\,dy\,dz$ multiplicirt, dann über die ganze Ausdehnung der Wassermasse integrirt, und berücksichtigt, dafs wegen $(1.)_4$

$$\iiint\left(u\frac{d\psi}{dx}+v\frac{d\psi}{dy}+w\frac{d\psi}{dz}\right)dx\,dy\,dz = -\int\psi\,q\cos\vartheta\,d\omega,$$

wenn ψ im Innern der Wassermasse eine stetige und eindeutige Function

bezeichnet, so erhält man

$$\text{(6 b.)} \qquad \frac{dK}{dt} = \int d\omega (p - hU + \tfrac{1}{2}hq^2) q \cos\vartheta.$$

Wenn die Wassermasse ganz in festen Wänden eingeschlossen ist, mufs $q \cos\vartheta$ an allen Punkten der Oberfläche gleich 0 sein, dann wird also auch $\frac{dK}{dt} = 0$, d. h. K constant.

Denkt man sich diese feste Wand in unendlicher Entfernung vom Anfangspunkt der Coordinaten und die vorhandenen Wirbelfäden in endlicher Entfernung, so werden die Potentialfunctionen L, M, N, deren Massen ξ, η, ζ jede in Summa gleich Null sind, in der unendlichen Entfernung $\mathfrak{R}$ wie $\mathfrak{R}^{-2}$ abnehmen, und die Geschwindigkeiten, ihre Differentialquotienten, wie $\mathfrak{R}^{-3}$, das Flächenelement $d\omega$ aber, wenn es immer dem gleichen Kegelwinkel im Nullpunkte der Coordinaten entsprechen soll, wie $\mathfrak{R}^2$ zunehmen. Das erste Integral in dem Ausdrucke für K (Gleichung (6 a.)), welches über die Oberfläche der Wassermasse ausgedehnt ist, wird wie $\mathfrak{R}^{-3}$ abnehmen, für ein unendliches $\mathfrak{R}$ also gleich Null werden. Dann reducirt sich der Werth von K auf

$$\text{(6 c.)} \qquad K = -h\iiint (L\xi + M\eta + N\zeta)\, dx\, dy\, dz$$

und diese Gröfse wird während der Bewegung nicht geändert.

§. 5.

Geradlinige parallele Wirbelfäden.

Wir wollen zuerst den Fall untersuchen, wo nur geradlinige, der Axe der z parallele Wirbelfäden existiren, entweder in einer unendlich ausgedehnten Wassermasse, oder in einer solchen Masse, die durch zwei gegen die Wirbelfäden senkrechte unendliche Ebenen begrenzt ist, was auf dasselbe herauskommt. Alle Bewegungen geschehen dann in Ebenen, die zur Axe der z senkrecht sind, und sind in allen diesen Ebenen genau dieselben.

Wir setzen also

$$w = \frac{du}{dz} = \frac{dv}{dz} = \frac{dp}{dz} = \frac{dV}{dz} = 0.$$

Dann reduciren sich die Gleichungen (2.) auf

$$\xi = 0, \qquad \eta = 0, \qquad 2\zeta = \frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx},$$

die Gleichungen (3.) auf

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = 0.$$

Die Wirbelfäden behalten also constante Rotationsgeschwindigkeit, so wie sie auch constanten Querschnitt behalten.

Die Gleichungen (4.) reduciren sich auf

$$u = \frac{dN}{dy}, \qquad v = -\frac{dN}{dx},$$

$$\frac{d^2N}{dx^2} + \frac{d^2N}{dy^2} = 2\zeta.$$

Ich habe hier nach der am Ende des §. 3 gemachten Bemerkung $P = 0$ gesetzt. Die Gleichung der Strömungslinien ist also $N =$ Const.

N ist in diesem Falle die Potentialfunction unendlich langer Linien; diese selbst ist unendlich grofs, aber ihre Differentialquotienten sind endlich. Sind a und b die Coordinaten eines Wirbelfadens, dessen Querschnitt $da\,db$ ist, so ist

$$-v = \frac{dN}{dx} = \frac{\zeta\, da\, db}{\pi} \cdot \frac{x-a}{r^2}, \qquad u = \frac{dN}{dy} = \frac{\zeta\, da\, db}{\pi} \cdot \frac{y-b}{r^2}.$$

Es folgt hieraus, dafs die resultirende Geschwindigkeit q senkrecht gegen r. das auf den Wirbelfaden gefällte Loth steht, und dafs

$$q = \frac{\zeta\, da\, db}{\pi r}.$$

Haben wir in einer in Richtung der x und y unendlich ausgedehnten Wassermasse mehrere Wirbelfäden, deren Coordinaten beziehlich x_1, y_1, x_2, y_2 u. s. w. sind, während das Product aus Rotationsgeschwindigkeit und Querschnitt eines jeden derselben mit m_1, m_2 etc. bezeichnet wird, und bilden wir die Summen

$$U = m_1 u_1 + m_2 u_2 + m_3 u_3 \text{ etc.},$$

$$V = m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 \text{ etc.},$$

so werden dieselben gleich 0, weil der Antheil an der Summe V, der aus der Wirkung des zweiten Wirbelfadens auf den ersten entsteht, aufgehoben wird durch den vom ersten Wirbelfaden auf den zweiten. Beide sind nämlich

$$m_1 \cdot \frac{m_2}{\pi} \frac{x_1 - x_2}{r^2} \quad \text{und} \quad m_2 \cdot \frac{m_1}{\pi} \frac{x_2 - x_1}{r^2}$$

und so bei allen andern in beiden Summen. Nun ist U die Geschwindigkeit des Schwerpunkts der Massen m_1, m_2 u. s. w. in Richtung der x, multiplicirt mit der Summe dieser Massen, ebenso V parallel den y genommen. Beide Geschwindigkeiten sind also gleich Null, wenn nicht die Summe der Massen gleich Null, wo es überhaupt keinen Schwerpunkt giebt. Der Schwerpunkt

der Wirbelfäden bleibt also bei ihrer Bewegung um einander unverändert, und da dieser Satz für jede beliebige Vertheilung der Wirbelfäden gilt, so dürfen wir ihn auch auf einzelne Wirbelfäden von unendlich kleinem Querschnitt anwenden.

Daraus ergeben sich nun nachstehende Folgerungen:

1) Haben wir einen einzelnen geradlinigen Wirbelfaden von unendlich kleinem Querschnitt, in einer nach allen gegen den Wirbelfaden senkrechten Richtungen unendlich ausgedehnten Wassermasse, so hängt die Bewegung der Wassertheilchen in endlicher Entfernung von ihm nur ab von dem Product $\xi\, da\, db = m$ aus der Rotationsgeschwindigkeit und der Gröfse seines Querschnitts, nicht von der Form seines Querschnitts. Die Theilchen der Wassermasse rotiren um ihn mit der Tangentialgeschwindigkeit $\frac{m}{\pi r}$, wo r die Entfernung vom Schwerpunkte des Wirbelfadens bezeichnet. Die Lage des Schwerpunkts selbst, die Rotationsgeschwindigkeit, die Gröfse des Querschnitts, also auch die Gröfse m bleiben unverändert, wenn auch die Form des unendlich kleinen Querschnitts sich ändern kann.

2) Haben wir zwei geradlinige Wirbelfäden von unendlich kleinem Querschnitt in einer unbegrenzten Wassermasse, so wird jeder den andern in einer Richtung forttreiben, welche senkrecht gegen ihre Verbindungslinie steht. Die Länge der Verbindungslinie wird dadurch nicht geändert. Es werden sich also beide um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt in gleich bleibendem Abstande drehen. Ist die Rotationsgeschwindigkeit in beiden Wirbelfäden gleich gerichtet, also von gleichem Vorzeichen, so mufs ihr Schwerpunkt zwischen ihnen liegen. Ist sie entgegengesetzt gerichtet, also von ungleichem Vorzeichen, so liegt ihr Schwerpunct in der Verlängerung ihrer Verbindungslinie. Und ist das Product aus der Rotationsgeschwindigkeit und dem Querschnitt bei beiden gleich, aber von entgegengesetztem Zeichen, wobei der Schwerpunkt in unendlicher Entfernung liegen würde, so schreiten sie beide mit gleicher Geschwindigkeit und senkrecht gegen ihre Verbindungslinie in gleicher Richtung fort.

Auf den letzteren Fall kann man auch den zurückführen, wo ein Wirbelfaden von unendlich kleinem Querschnitt sich neben einer ihm parallelen unendlich ausgedehnten Ebene befindet. Die Grenzbedingung für die Bewegung des Wassers an der Ebene, dafs sie der Ebene parallel sein müsse, erfüllt man, indem man jenseits der Ebene noch einen zweiten Wirbelfaden, das

Spiegelbild des ersten, hinzugefügt denkt. Daraus folgt denn, dafs der in der Wassermasse befindliche Wirbelfaden parallel der Ebene fortschreitet, in der Richtung, in welcher sich die Wassertheilchen zwischen ihm und der Ebene bewegen, und mit $\frac{1}{4}$ der Geschwindigkeit, welche die Wassertheilchen im Fufspunkt eines von dem Wirbelfaden auf die Ebene gefällten Lothes haben.

Bei geradlinigen Wirbelfäden führt die Annahme eines unendlich kleinen Querschnitts auf keine unzulässige Folgerung, weil jeder einzelne Faden auf sich selbst keine forttreibende Kraft ausübt, sondern nur durch den Einflufs der anderen vorhandenen Fäden fortgetrieben wird. Anders ist es bei gekrümmten Fäden.

§. 6.

Kreisförmige Wirbelfäden.

In einer unendlich ausgedehnten Wassermasse seien nur kreisförmige Wirbelfäden vorhanden, deren Ebenen zur z Axe senkrecht sind und deren Mittelpunkte in dieser Axe liegen, so dafs rings um sie herum alles symmetrisch ist. Man ändere die Coordinaten, indem man setzt

$$x = \chi\cos\varepsilon, \qquad a = g\cos e,$$
$$y = \chi\sin\varepsilon, \qquad b = g\sin e,$$
$$z = z, \qquad c = c.$$

Die Rotationsgeschwindigkeit σ ist nach der Annahme nur eine Function von χ und z oder von g und c, und die Rotationsaxe steht überall senkrecht auf χ (oder g) und der z Axe. Es sind also die rechtwinkligen Componenten der Rotation in dem Punkte, dessen Coordinaten g, e und c sind

$$\xi = -\sigma\sin e, \qquad \eta = \sigma\cos e, \qquad \zeta = 0.$$

In den Gleichungen (5 a.) wird

$$r^2 = (z-c)^2 + \chi^2 + g^2 - 2\chi g\cos(\varepsilon - e),$$
$$L = \frac{1}{2\pi}\iiint\frac{\sigma\sin e}{r}\, g\, dg\, de\, dc,$$
$$M = -\frac{1}{2\pi}\iiint\frac{\sigma\cos e}{r}\, g\, dg\, de\, dc,$$
$$N = 0.$$

Indem man mit $\cos\varepsilon$ und $\sin\varepsilon$ multiplicirt und addirt, erhält man aus den Gleichungen für L und M

$$L\sin\varepsilon - M\cos\varepsilon = -\frac{1}{2\pi}\iiint\frac{\sigma\cos(\varepsilon - e)}{r}\, g\, dg\, d(\varepsilon - e)\, dc,$$
$$L\cos\varepsilon + M\sin\varepsilon = \frac{1}{2\pi}\iiint\frac{\sigma\sin(\varepsilon - e)}{r}\, g\, dg\, d(\varepsilon - e)\, dc.$$

In beiden Integralen kommen die Winkel e und ε nur noch in der Verbindung $(\varepsilon - e)$ vor, und diese Gröfse kann deshalb als die Variable unter dem Integral betrachtet werden. In dem zweiten Integrale heben sich die Theile, in denen $(\varepsilon - e) = \mathfrak{e}$ ist, gegen die auf, in denen $(\varepsilon - e) = 2\pi - \mathfrak{e}$, es wird also gleich Null. Setzen wir

$$(7.)\qquad \psi = \frac{1}{2\pi}\iiint \frac{\sigma \cos e \,.\, g\, dg\, de\, dc}{\sqrt{(z-c)^2+\chi^2+g^2-2g\chi\cos e}},$$

so wird also

$$M\cos\varepsilon - L\sin\varepsilon = \psi,$$
$$M\sin\varepsilon + L\cos\varepsilon = 0,$$

oder

$$(7\text{ a.})\qquad L = -\psi\sin\varepsilon,\qquad\qquad M = \psi\cos\varepsilon.$$

Nennen wir τ die Geschwindigkeit in Richtung des Radius χ, und berücksichtigen, dafs in Richtung der Kreisperipherie wegen der symmetrischen Lage der Wirbelringe zur Axe die Geschwindigkeit gleich Null sein mufs, so haben wir

$$u = \tau\cos\varepsilon,\qquad\qquad v = \tau\sin\varepsilon$$

und nach den Gleichungen (4.)

$$u = -\frac{dM}{dz},\qquad v = \frac{dL}{dz},\qquad w = \frac{dM}{dx} - \frac{dL}{dy}.$$

Daraus folgt

$$\tau = -\frac{d\psi}{dz},\qquad\qquad w = \frac{d\psi}{d\chi} + \frac{\psi}{\chi},$$

oder

$$(7\text{ b.})\qquad \tau\chi = -\frac{d(\psi\chi)}{dz},\qquad\qquad w\chi = \frac{d(\psi\chi)}{d\chi}.$$

Die Gleichung der Strömungslinien ist also

$$\psi\chi = \text{Const.}$$

Wenn wir die im Werthe von ψ angezeigte Integration zunächst für einen Wirbelfaden von unendlich kleinem Querschnitt ausführen, dabei setzen $\sigma\, dg\, dc = m_1$, und den davon herrührenden Theil von ψ mit ψ_{m_1} bezeichnen, so ist

$$\psi_{m_1} = \frac{m_1}{\pi}\sqrt{\frac{g}{\chi}}\left\{\frac{2}{\varkappa}(F-E) - \varkappa F\right\},$$
$$\varkappa^2 = \frac{4g\chi}{(g+\chi)^2+(z-c)^2},$$

worin F und E die ganzen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung für den Modul $\varkappa$ bedeuten.

Setzen wir der Kürze wegen

$$U = \frac{2}{\varkappa}(F - E) - \varkappa F,$$

wo also U eine Function von $\varkappa$ ist, so ist

$$\tau\chi = \frac{m_1}{\pi} \sqrt{g\chi} \frac{dU}{d\varkappa} \cdot \varkappa \cdot \frac{z - c}{(g+\chi)^2 + (z-c)^2}.$$

Befindet sich nun in dem durch χ und z bestimmten Punkte ein zweiter Wirbelfaden m, und nennen wir τ_1 die Geschwindigkeit in Richtung von g, welche er dem Wirbelfaden m_1 mittheilt, so erhalten wir diese, indem wir in dem Ausdrucke für τ

statt	τ	χ	g	z	c	m_1
setzen	τ_1	g	χ	c	z	m.

Dabei bleiben $\varkappa$ und U unverändert, und es wird

$$(8.) \qquad m\tau\chi + m_1\tau_1 g = 0.$$

Bestimmen wir nun den Werth der der Axe parallelen Geschwindigkeit w, welchen der Wirbelfaden m_1 hervorbringt, dessen Coordinaten g und c sind, so finden wir

$$w\chi = \frac{1}{2} \frac{m_1}{\pi} \sqrt{\frac{g}{\chi}}\, U + \frac{m_1}{\pi} \sqrt{g\chi} \frac{dU}{d\varkappa} \cdot \frac{\varkappa}{2\chi} \cdot \frac{(z-c)^2 + g^2 - \chi^2}{(g+\chi)^2 + (z-c)^2},$$

nennt man nun w_1 die der z Axe parallele Geschwindigkeit, welche der Wirbelring m, dessen Coordinaten z und χ sind, am Orte von m_1 hervorbringt, so braucht man dazu nur wieder die vorher schon angezeigte Vertauschung der betreffenden Coordinaten und Massen vorzunehmen. So findet man, dafs

$$(8\text{ a.}) \qquad 2mw\chi^2 + 2m_1 w_1 g^2 - m\tau\chi z - m_1\tau_1 g c = \frac{2mm_1}{\pi} \sqrt{g\chi}\, U.$$

Aehnliche Summen wie (8.) und (8 a.) lassen sich für eine beliebig grofse Anzahl von Wirbelringen bilden. Ich bezeichne für den n^{ten} derselben das Product $\sigma\, dg\, dc$ mit m_n, die Componenten der Geschwindigkeit, welche ihm von den übrigen Wirbelringen mitgetheilt werden, mit τ_n und w_n, wobei aber vorläufig abgesehen wird von den Geschwindigkeiten, die jeder Wirbelring sich selbst mittheilen kann. Ich nenne ferner den Radius des Ringes ϱ_n und die Entfernung von einer gegen die Axe senkrechten Fläche λ, welche beiden letzteren Gröfsen zwar der Richtung nach mit χ und z übereinstimmen, aber als zu dem bestimmten Wirbelringe gehörig Functionen der Zeit, und nicht unabhängige Variable sind, wie χ und z. Schliefslich sei der Werth

von ψ, so weit dieser von den andern Wirbelringen herrührt ψ_n. Es ergiebt sich aus (8.) und (8 a.), indem man die entsprechenden Gleichungen für jedes einzelne Paar von Wirbelringen aufstellt und alle addirt:

$$\Sigma[m_n \varrho_n \tau_n] = 0,$$
$$\Sigma[2m_n w_n \varrho_n^2 - m_n \tau_n \varrho_n \lambda_n] = \Sigma[m_n \varrho_n \psi_n].$$

So lange man in diesen Summen noch eine endliche Zahl getrennter und unendlich dünner Wirbelringe hat, darf man unter w, τ und ψ nur diejenigen Theile dieser Gröfsen verstehen, welche von der Anwesenheit der anderen Ringe herrühren. Wenn man aber eine unendlich grofse Anzahl solcher Ringe den Raum continuirlich ausfüllend denkt, ist ψ die Potentialfunction einer continuirlichen Masse, w und τ sind Differentialquotienten dieser Potentialfunction, und es ist bekannt, dafs sowohl in einer solchen Function wie in ihren Differentialquotienten die Theile der Function, welche von der Anwesenheit von Masse in einem unendlich kleinen den betreffenden Punkt, für den die Function bestimmt ist, umgebenden Raum herrühren, unendlich klein sind gegen die von endlichen Massen in endlicher Entfernung herrührenden *).

Verwandeln wir also die Summen in Integrale, so können wir unter w, τ und ψ die ganzen in dem betreffenden Punkte geltenden Werthe dieser Gröfsen verstehen, und

$$w = \frac{d\lambda}{dt}, \qquad \tau = \frac{d\varrho}{dt}$$

setzen. Die Gröfse m ersetzen wir zu diesem Zwecke durch das Product $\sigma\, d\varrho\, d\lambda$.

$$(9.) \qquad \iint \sigma \varrho \frac{d\varrho}{dt} d\varrho\, d\lambda = 0,$$

$$(9\text{ a.}) \qquad 2\iint \sigma \varrho^2 \frac{d\lambda}{dt} d\varrho\, d\lambda - \iint \sigma \varrho \lambda \frac{d\varrho}{dt} d\varrho\, d\lambda = \iint \sigma \varrho \psi\, d\varrho\, d\lambda.$$

Da das Product $\sigma\, d\varrho\, d\lambda$ gemäfs §. 2 nach der Zeit constant ist, so kann die Gleichung (9.) nach t integrirt werden, und wir erhalten

$$\tfrac{1}{2}\iint \sigma \varrho^2\, d\varrho\, d\lambda = \text{Const.}$$

Denkt man den Raum durch eine Ebene getheilt, die durch die z Axe geht und daher alle vorhandenen Wirbelringe schneidet, betrachten wir dann σ als die Dichtigkeit einer Massenschicht, und nennen $\mathfrak{M}$ die ganze in dieser

---

*) S. *Gaufs* in Resultate des magnetischen Vereins im Jahre 1839, S. 7.

Schicht der Ebene anliegende Masse, also

$$\mathfrak{M} = \iint \sigma\, d\varrho\, d\lambda$$

und R^2 den mittleren Werth von ϱ^2 für sämmtliche Massenelemente genommen, so ist

$$\iint \sigma\varrho . \varrho\, d\varrho\, d\lambda = \mathfrak{M}R^2.$$

und da dieses Integral und der Werth von $\mathfrak{M}$ der Zeit nach constant sind, so folgt, dafs auch R bei der Fortbewegung unverändert bleibt.

Existirt also in der unbegrenzten Flüssigkeitsmasse nur ein kreisförmiger Wirbelfaden von unendlich kleinem Querschnitt, so bleibt dessen Radius unverändert.

Die Gröfse der lebendigen Kraft ist nach Gleichung (6c.) in unserem Falle

$$\begin{aligned} K &= -h\iiint (L\xi + M\eta)\, da\, db\, dc \\ &= -h\iiint \psi\,\sigma . \varrho\, d\varrho\, d\lambda\, d\varepsilon \\ &= -2\pi h \iint \psi\,\sigma . \varrho\, d\varrho\, d\lambda. \end{aligned}$$

Sie ist ebenfalls der Zeit nach constant.

Indem wir ferner bemerken, dafs, weil $\sigma\, d\varrho\, d\lambda$ nach der Zeit constant ist

$$\frac{d}{dt}\iint \sigma\varrho^2 \lambda\, d\varrho\, d\lambda = 2\iint \sigma\varrho\lambda \frac{d\varrho}{dt}\, d\varrho\, d\lambda + \iint \sigma\varrho^2 \frac{d\lambda}{dt}\, d\lambda\, d\varrho,$$

so wird die Gleichung (9a.), wenn wir mit l den Werth von λ für den Schwerpunkt des Querschnitts des Wirbelfadens bezeichnen, damit (9.) multipliciren und addiren

$$\text{(9 b.)} \qquad 2\frac{d}{dt}\iint \sigma\varrho^2\lambda\, d\varrho\, d\lambda + 5\iint \sigma\varrho(l-\lambda)\frac{d\varrho}{dt}\, d\varrho\, d\lambda = -\frac{K}{2\pi h}.$$

Wenn der Querschnitt des Wirbelfadens unendlich klein ist, und ε eine unendlich kleine Gröfse derselben Ordnung wie $l-\lambda$ und die übrigen Lineardimensionen des Querschnitts, $\sigma\, d\varrho\, d\lambda$ aber endlich ist, so ist ψ und auch K von derselben Ordnung unendlich grofser Quantitäten, wie $\log \varepsilon$. Für sehr kleine Werthe des Abstands v vom Wirbelringe wird nämlich

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{(g-\chi)^2 + (z-c)^2}, \\ x^2 &= 1 - \frac{v^2}{4g^2}, \\ \psi_{m_1} &= \frac{m_1}{\pi}\log\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{4}\right) = \frac{m_1}{\pi}\log\frac{v}{8g}. \end{aligned}$$

In dem Werthe von K wird ψ noch mit ϱ oder g multiplicirt. Ist g endlich und v von der gleichen Ordnung mit ε, so ist K von der Ordnung $\log \varepsilon$. Nur wenn g unendlich grofs von der Ordnung $\frac{1}{\varepsilon}$ ist, wird K unendlich grofs, wie $\frac{1}{\varepsilon}\log \varepsilon$. Dann geht der Kreis in eine gerade Linie über. Dagegen wird $\frac{d\varrho}{dt}$, welches gleich $\frac{d\psi}{dz}$ ist, von der Ordnung $\frac{1}{\varepsilon}$, das zweite Integral also endlich und bei endlichem ϱ verschwindend klein gegen K. In diesem Falle können wir im ersten Integrale das constante l statt λ setzen, und erhalten

$$2\frac{d(\mathfrak{M}R^2 l)}{dt} = -\frac{K}{2\pi h}$$

oder

$$2\mathfrak{M}R^2 l = C - \frac{K}{2\pi h}t.$$

Da $\mathfrak{M}$ und R constant sind, kann sich nur l proportional der Zeit ändern. Wenn $\mathfrak{M}$ positiv ist, ist die Bewegung der Wassertheilchen auf der äufsern Seite des Ringes nach der Seite der positiven z, auf der innern nach der der negativen z gerichtet; K, h und R sind ihrer Natur nach immer positiv.

Daraus folgt also, *dafs bei einem kreisförmigen Wirbelfaden von sehr kleinem Querschnitt in einer unendlich ausgedehnten Wassermasse der Schwerpunkt des Querschnitts eine der Axe des Wirbelringes parallele Bewegung hat von annähernd constanter und sehr grofser Geschwindigkeit, die nach derselben Seite hin gerichtet ist, nach welcher das Wasser durch den Ring strömt.* Unendlich dünne Wirbelfäden von endlichem Radius würden unendlich grofse Fortpflanzungsgeschwindigkeit erhalten. Ist aber der Radius des Wirbelrings unendlich grofs von der Ordnung $\frac{1}{\varepsilon}$, so wird R^2 unendlich grofs gegen K, und l wird constant. Der Wirbelfaden, welcher sich nun in eine gerade Linie verwandelt hat, wird stationär, wie wir für geradlinige Wirbelfäden schon früher gefunden haben.

Es läfst sich nun auch im Allgemeinen übersehen, wie sich zwei ringförmige Wirbelfäden, deren Axe dieselbe ist, gegen einander verhalten werden, da jeder abgesehen von seiner eigenen Fortbewegung auch der Bewegung der Wassertheilchen folgt, die der andere hervorbringt. Haben sie gleiche Rotationsrichtung, so schreiten sie beide in gleichem Sinne fort, und es wird der vorangehende sich erweitern, dann langsamer fortschreiten, der nachfolgende sich verengern und schneller fortschreiten, schliefslich bei nicht zu differenten Fortpflanzungsgeschwindigkeiten den andern einholen, durch ihn

hindurchgehen. Dann wird sich dasselbe Spiel mit dem andern wiederholen, so dafs die Ringe abwechselnd einer durch den andern hindurchgehen.

Haben die Wirbelfäden gleiche Radien, gleiche und entgegengesetzte Rotationsgeschwindigkeiten, so werden sie sich einander nähern, und sich gegenseitig erweitern, so dafs schliefslich, wenn sie sich sehr nah gekommen sind, ihre Bewegung gegen einander immer schwächer wird, die Erweiterung dagegen mit wachsender Geschwindigkeit geschieht. Sind die beiden Wirbelfäden ganz symmetrisch, so ist in der Mitte zwischen beiden die der Axe parallele Geschwindigkeit der Wassertheilchen gleich Null. Man kann sich hier also eine feste Wand angebracht denken, ohne die Bewegung zu stören, und erhält so den Fall eines Wirbelringes, der gegen eine feste Wand anläuft.

Ich bemerke noch, dafs man diese Bewegungen der kreisförmigen Wirbelringe in der Natur leicht studiren kann, indem man eine halb eingetauchte Kreisscheibe, oder die ungefähr halbkreisförmig begrenzte Spitze eines Löffels schnell eine kurze Strecke längs der Oberfläche der Flüssigkeit hinführt, und dann schnell herauszieht. Es bleiben dann halbe Wirbelringe in der Flüssigkeit zurück, deren Axe in der freien Oberfläche liegt. Die freie Oberfläche bildet also eine durch die Axe gelegte Begrenzungsebene der Wassermasse, wodurch an den Bewegungen nichts wesentliches geändert wird. Die Wirbelringe schreiten fort, erweitern sich, wenn sie gegen eine Wand laufen, und werden durch andere Wirbelringe erweitert oder verengert, ganz wie wir es aus der Theorie abgeleitet haben.

4.

Sur l'intégration des équations ultra-elliptiques.

(Par M. *Brioschi* à Pavie.)

---

1. **O**n doit à *Jacobi* la connaissance de ce fait analytique que les équations ultra-elliptiques peuvent s'intégrer sous forme algébrique rationnelle. La démonstration indirecte que *Jacobi* a donnée de cette importante propriété a été développée par M. *Richelot;* et M. *Liouville* a obtenu ce résultat comme une conséquence de ses recherches sur le mouvement d'un point. Je vais démontrer qu'on peut arriver à ces intégrales par l'intégration directe.

Soient $x_1, x_2, \dots x_n$ n variables; en posant:

$$\varphi^2(x) = A_0 x^{2n} + A_1 x^{2n-1} + \cdots + A_{2n}$$

les équations différentielles:

$$(1.)\qquad \sum_1^n{}_r \frac{dx_r}{\varphi(x_r)} = 0, \qquad \sum_1^n{}_r \frac{x_r dx_r}{\varphi(x_r)} = 0, \qquad \sum_1^n{}_r \frac{x_r^{n-2}dx_r}{\varphi(x_r)} = 0$$

ont été nommées par *Jacobi* équations ultra-elliptiques.

Soit:

$$\psi(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n;$$

si l'on considère les équations (1.) et la suivante:

$$\sum_1^n{}_r \frac{x_r^{n-1}dx_r}{\varphi(x_r)} = dz$$

comme équations simultanées, on aura:

$$\frac{dx_r}{dz} = \frac{\varphi(x_r)}{\psi'(x_r)}.$$

Mais l'équation identique:

$$\psi(x_r) = 0$$

nous donne

$$\psi'(x_r)\frac{dx_r}{dz} + \frac{da_1}{dz}x_r^{n-1} + \frac{da_2}{dz}x_r^{n-2} + \cdots + \frac{da_n}{dz};$$

donc on aura:

$$\left(\frac{da_1}{dz}x^{n-1} + \frac{da_2}{dz}x^{n-2} + \cdots + \frac{da_n}{dz}\right)^2 - \varphi^2(x) = 0$$

pour $x = x_1, x_2, \ldots x_n$; et par conséquent on a pour une valeur quelconque de x:

$$\left(\frac{d\psi(x)}{dz}\right)^2 = \varphi^2(x) + \psi(x)\theta(x),$$

$\theta(x)$ étant un polynome du $n^{\text{ième}}$ degré qu'on doit déterminer.

Or, en observant que:

$$\frac{1}{\psi(x)}\frac{d\psi(x)}{dz} = \sum_1^n {}_r \frac{\varphi(x_r)}{(x_r - x)\psi'(x_r)}$$

on trouve, comme M. *Richelot* l'a déjà démontré, que:

$$(2) \qquad 2\psi\frac{d^2\psi}{dz^2} = \left(\frac{d\psi}{dz}\right)^2 - \varphi^2(x) + A_0\psi^2(x)$$

ou:

$$\frac{1}{\psi^2(x)}\left\{2\psi\frac{d\psi}{dz}\frac{d^2\psi}{dz^2} - \left(\frac{d\psi}{dz}\right)^3\right\} = -\frac{\varphi^2(x)}{\psi^2(x)}\frac{d\psi}{dz} + A_0\frac{d\psi}{dz};$$

donc en intégrant on aura:

$$(3.) \qquad \left(\frac{d\psi(x)}{dz}\right)^2 = \varphi^2(x) + A_0\psi^2(x) - \psi(x)H(x)$$

en supposant:

$$H(x) = H_0x^n + H_1x^{n-1} + \cdots + H_n.$$

De l'équation (3.) on peut déduire les intégrales algébriques irrationnelles des équations (1.), et les coefficients $H_2, H_3, \ldots H_n$ seront les $n-1$ constantes, parce qu'on a évidemment:

$$H_0 = 2A_0, \qquad H_1 = A_1.$$

2. L'équation (2.) se réduit à cause de (3.) à la suivante:

$$2\frac{d^2\psi}{dz^2} = 2A_0\psi(x) - H(x)$$

laquelle ayant lieu pour des valeurs quelconques de x nous donne:

$$2\frac{d^2a_r}{dz^2} = 2A_0a_r - H_r$$

pour $r = 1, 2, \ldots n$; et par conséquent:

$$\left(\frac{da_r}{dz}\right)^2 = A_0a_r^2 - H_ra_r + G_r,$$

$G_1, G_2, \ldots$ étant de nouvelles constantes.

Par une seconde intégration on obtient:

$$a_r = \frac{E_ry^2 + 2H_ry + D_r}{2H_0y}$$

ayant posé:

$$e^{z\sqrt{A_0}} = y, \quad \frac{H_r^2-4A_0G_r}{E_r} = D_r$$

et E_1, E_2, ... étant des constantes à déterminer. Si l'on pose:

$$\begin{aligned} R(x) &= E_1x^{n-1}+E_2x^{n-2}+\cdots+E_n \\ S(x) &= H_0x^n \;+H_1x^{n-1}+\cdots+H_n \\ T(x) &= D_1x^{n-1}+D_2x^{n-1}+\cdots+D_n \end{aligned}$$

on aura donc

$$(4.) \quad \psi(x) = \frac{1}{2H_0y}(Ry^2+2Sy+T)$$

et en observant que:

$$\frac{da_r}{dz} = \frac{E_ry^2-D_r}{2H_0y}\sqrt{A_0},$$

l'équation (3.) fait voir que:

$$4A_0\varphi^2(x) = S^2-RT$$

équation au moyen de laquelle on doit déterminer les constantes G_1, G_2, ..., E_1, E_2, ... Les valeurs des constantes G_1, G_n peuvent aussi s'obtenir en comparant les puissances de x^{2n-2} et de x^0 dans l'équation (3.), et l'on trouve:

$$G_1 = A_2+H_2, \qquad G_n = A_{2n}.$$

Les formes obtenues pour les fonctions $\psi(x)$, $\varphi^2(x)$ sont, à un facteur près, celles auxquelles ***Jacobi*** avait été conduit par la considération du théorème d'***Abel***. En éliminant y des valeurs de a_r, a_s on a une intégrale algébrique rationnelle du second dégré des équations (1.):

$$\begin{aligned}(E_rD_s-E_sD_r)^2 = 4(H_r-2A_0a_r)(H_s-2A_0a_s)(D_rE_s+D_sE_r) \\ -D_rE_r(H_s-2A_0a_s)-D_sE_s(H_r-2A_0a_r);\end{aligned}$$

et en éliminant y^2, y, considérées comme deux variables, des valeurs de a_r, a_s, a_t on obtient l'intégrale linéaire:

$$\begin{vmatrix} 1 & H_0 & 0 & 0 \\ a_r & H_r & D_r & E_r \\ a_s & H_s & D_s & E_s \\ a_t & H_t & D_t & E_t \end{vmatrix} = 0.$$

3. Soit $f(x)$ une fonction entière du degré $n+i-1$, où $i<n$; et en désignant par c une quantité constante posons:

$$\sum_1^n {}_r \frac{f(x_r)dx_r}{(c-x_r)\varphi(x_r)} = dv,$$

on aura évidemment:

$$\frac{dv}{dz} = \sum_1^n {}_r \frac{f(x_r)}{(c-x_r)\psi'(x_r)}$$

ou bien en posant:

$$f(x) = x^i p(x) + q(x)$$

l'équation suivante:

$$\frac{dv}{dz} = \sum_1^n {}_r \frac{x_r^i p(x_r)}{(c-x_r)\psi'(x_r)} + \frac{q(c)}{\psi(c)}.$$

Or, en faisant:

$$U_s = \sum_1^n {}_r \frac{x_r^s p(x_r)}{(c-x_r)\psi'(x_r)}, \qquad V_s = \sum_1^n {}_r \frac{x_r^s p(x_r)}{\psi'(x_r)}$$

on a:

$$U_s = cU_{s-1} - V_{s-1},$$

donc:

$$\frac{dv}{dz} = \frac{f(c)}{\psi(c)} - (c^{i-1}V_0 + c^{i-2}V_1 + \cdots + V_{i-1}).$$

Mais V_s est le coefficient de $\frac{1}{x^{s+1}}$ dans le développement suivant les puissances descendantes de x, de l'expression:

$$\sum_1^n {}_r \frac{p(x_r)}{(x-x_r)\psi'(x_r)} = \frac{p(x)}{\psi(x)},$$

ou le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le développement de $\frac{x^s p(x)}{\psi(x)}$; par conséquent:

$$\frac{dv}{dz} = \frac{f(c)}{\psi(c)} - \left[\frac{p(x)(x^i - c^i)}{\psi(x)(x-c)}\right]_{x^{-1}};$$

et parce que:

$$\left[\frac{p(x)}{(x-c)\psi(x)}\right]_{x^{-1}} = 0, \quad \left[\frac{q(x)}{(x-c)\psi(x)}\right]_{x^{-1}} = 0,$$

on aura:

$$\frac{dv}{dz} = \frac{f(c)}{\psi(c)} - \left[\frac{f(x)}{(x-c)\psi(x)}\right]_{x^{-1}},$$

et:

$$\frac{dv}{dy} = \frac{f(c)}{y\psi(c)\sqrt{A_0}} - \left[\frac{f(x)}{(x-c)y\psi(x)\sqrt{A_0}}\right]_{x^{-1}}.$$

La valeur (4.) de $\psi(x)$ nous donne:

$$\frac{1}{y\psi(x)\sqrt{A_0}} = \frac{4R\sqrt{A_0}}{(Ry+S)^2 - 4A_0\varphi^2(x)} = \frac{Ry+S-2\varphi(x)\sqrt{A_0}}{Ry+S+2\varphi(x)\sqrt{A_0}} \cdot \frac{4R\sqrt{A_0}}{(Ry+S-2\varphi(x)\sqrt{A_0})^2}$$

ou:

$$\frac{1}{y\psi(x)\sqrt{A_0}} = -\frac{2}{\varphi(x)}\frac{d}{dy}\log\frac{Ry+S+2\varphi(x)\sqrt{A_0}}{Ry+S-2\varphi(x)\sqrt{A_0}},$$

et en substituant:

$$v = C - \frac{2f(c)}{\varphi(c)}\log\frac{yR(c)+S(c)+2\varphi(c)\sqrt{A_0}}{yR(c)+S(c)-2\varphi(c)\sqrt{A_0}}$$
$$+\left[\frac{2f(x)}{(x-e)\varphi(x)}\log\frac{yR(x)+S(x)+2\varphi(x)\sqrt{A_0}}{yR(x)+S(x)-2\varphi(x)\sqrt{A_0}}\right]_{x^{-1}},$$

formule de laquelle on pourrait déduire le théorème d'*Abel*.

Pavie, Août 1857.

5.

Über die *Gaufs*ische Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben.

(Von Herrn *E. B. Christoffel* in Montjoie.)

Das Folgende enthält eine neue Darstellung des bekannten, von *Gaufs* (Comm. Gott. rec. 1814—15) erfundenen Verfahrens zur angenäherten Berechnung bestimmter Integrale. Im Anschlufs hieran wird dasselbe in der Weise verallgemeinert, dafs zu einer Anzahl beliebig gegebener Zwischenwerthe die übrigen nach den von *Gaufs* aufgestellten Prinzipien ausgewählt werden. Diese neue Methode kann in verschiedenen Beziehungen von Nutzen sein, wie weiter unten nachgewiesen werden soll.

1.

Da die spätern Entwicklungen in stetigem Zusammenhange mit den Formeln für die mechanische Quadratur im Allgemeinen stehen, so kann eine kurze Herleitung der letztern nicht füglich umgangen werden. Sei

$$(1.)\quad f(x) = A(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n),$$

so fällt die Funktion

$$(2.)\quad \varphi(x) = f(x)\left\{\frac{F(a_1)}{f'(a_1)(x-a_1)}+\frac{F(a_2)}{f'(a_2)(x-a_2)}+\dots+\frac{F(a_n)}{f'(a_n)(x-a_n)}\right\}$$

mit der Funktion $F(x)$ für die Werthe $x = a_1, a_2, \dots a_n$ zusammen, und es ist $\varphi(a_1) = F(a_1)$, $\varphi(a_2) = F(a_2)$, $\dots$ $\varphi(a_n) = F(a_n)$. Aus (2.) folgt

$$(3.)\quad \int_{-1}^{1}\varphi(x)\partial x$$

$$= \frac{F(a_1)}{f'(a_1)}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)\partial x}{x-a_1}+\frac{F(a_2)}{f'(a_2)}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)\partial x}{x-a_2}+\dots+\frac{F(a_n)}{f'(a_n)}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)\partial x}{x-a_n},$$

und dieser Ausdruck ist bis auf einen bestimmten Fehler gleich dem Integrale $\int_{-1}^{1}F(x)\partial x$.

Um die in (3.) angedeuteten Integrationen auszuführen, ist im Allgemeinen folgender Weg einzuschlagen. Ist u eine beliebige, aufserhalb der

Gränzen -1 und 1 liegende Gröfse, so hat man identisch

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)\partial x}{x-u}=\int_{-1}^{1}\frac{f(u)\partial x}{x-u}+\int_{-1}^{1}\frac{f(x)-f(u)}{x-u}\partial x$$
$$=f(u)\lg\frac{u-1}{u+1}+\int_{-1}^{1}\frac{f(x)-f(u)}{x-u}\partial x.$$

Da $f(x)$ eine rationale ganze Funktion von x vom n^{ten} Grade ist, so ist $\frac{f(x)-f(u)}{x-u}$ ebenfalls eine solche Funktion vom $(n-1)^{ten}$ Grade von x wie von u. Setzt man demnach

$$(4.)\quad \int_{-1}^{1}\frac{f(x)-f(u)}{x-u}\partial x=f_1(u),$$

so ist $f_1(u)$ eine ganze Funktion $(n-1)^{ten}$ Grades, und

$$(5.)\quad \int_{-1}^{1}\frac{f(x)\partial x}{x-u}=f(u)\lg\frac{u-1}{u+1}+f_1(u).$$

Diese Formel bleibt offenbar selbst dann bestehen, wenn u zwischen die Grenzen -1 und $+1$ fällt, sobald nur die unter dem Integral linker Hand stehende Funktion $\frac{fx}{x-u}$ innerhalb jener Gränzen überall endlich bleibt. Die Formel (5.) gilt daher, wenn u einer der Gröfsen $a_1, a_2, \ldots a_n$ gleich gesetzt wird, unter allen Umständen, mögen diese Gröfsen aufserhalb oder innerhalb der erwähnten Gränzen liegen. Dadurch geht die Gleichung (3.) in folgende über:

$$(6.)\quad \int_{-1}^{1}\varphi(x)\partial x=\frac{f_1(a_1)}{f'(a_1)}F(a_1)+\frac{f_1(a_2)}{f'(a_2)}F(a_2)+\cdots+\frac{f_1(a_n)}{f'(a_n)}F(a_n),$$

und man hat annähernd

$$(7.)\quad \int_{-1}^{1}F(x)\partial x=\int_{-1}^{1}\varphi(x)\partial x.$$

Durch Zerlegung in Partialbrüche folgt:

$$\frac{f_1(u)}{f(u)}=\frac{f_1(a_1)}{f'(a_1)}\cdot\frac{1}{u-a_1}+\frac{f_1(a_2)}{f'(a_2)}\cdot\frac{1}{u-a_2}+\cdots+\frac{f_1(a_n)}{f'(a_n)}\cdot\frac{1}{u-a_n},$$

so dafs $\frac{f_1(u)}{f(u)}$ der mittelst der Zwischenwerthe $a_1, a_2, \ldots a_n$ berechnete angenäherte Werth des Integrals $\int_{-1}^{1}\frac{\partial x}{u-x}$ ist; und wenn man dies in (5.) anwendet

$$(8.)\quad \int_{-1}^{1}\frac{f(x)\partial x}{x-u}$$
$$=f(u)\left\{\lg\frac{u-1}{u+1}+\frac{f_1(a_1)}{f'(a_1)}\cdot\frac{1}{u-a_1}+\frac{f_1(a_2)}{f'(a_2)}\cdot\frac{1}{u-a_2}+\cdots+\frac{f_1(a_n)}{f'(a_n)}\cdot\frac{1}{u-a_n}\right\}.$$

Setzt man von jetzt an

$$(9.)\quad \int_{-1}^{1}\frac{f(x)\partial x}{u-x} = f_2(u),$$

so ist wegen (5.)

$$(10.)\quad f(u)\lg\frac{u+1}{u-1} = f_1(u)+f_2(u),$$

und wegen (8.)

$$(11.)\quad \int_{-1}^{1}\frac{\partial x}{u-x}-\left\{\frac{f_1(a_1)}{f'(a_1)}\cdot\frac{1}{u-a_1}+\frac{f_1(a_2)}{f'(a_2)}\cdot\frac{1}{u-a_2}+\cdots+\frac{f_1(a_n)}{f'(a_n)}\cdot\frac{1}{u-a_n}\right\} = \frac{f_2(u)}{f(u)}.$$

Es ist somit $\frac{f_2(u)}{f(u)}$ der Unterschied zwischen dem wahren und dem angenäherten Werthe von $\int_{-1}^{1}\frac{\partial x}{u-x} = \lg\frac{u+1}{u-1}$. Entwickelt man daher in (11.) die linke Seite nach absteigenden Potenzen von u, und setzt den Ueberschufs des wahren Werthes von $\int_{-1}^{1}x^m dx$ über den angenäherten Werth desselben, nämlich

$$(12.)\quad \int_{-1}^{1}x^m\partial x-\left\{\frac{f_1(a_1)}{f'(a_1)}a_1^m+\frac{f_1(a_2)}{f'(a_2)}a_2^m+\cdots+\frac{f_1(a_n)}{f'(a_n)}a_n^m\right\} = k_m,$$

so erhält man:

$$(13.)\quad \frac{k_0}{u}+\frac{k_1}{u^2}+\frac{k_2}{u^3}+\cdots = \frac{f_2(u)}{f(u)}.$$

Setzt man andererseits

$$(14.)\quad \int_{-1}^{1}f(x)\partial x = A_1,$$

und allgemein

$$(15.)\quad \int_{-1}^{1}f(x)x^s\partial x = A_{s+1},$$

ferner

$$\frac{1}{f(u)} = \frac{A'}{u^n}+\frac{A''}{u^{n+1}}+\frac{A'''}{u^{n+2}}+\cdots,$$

so ist

$$(16.)\quad f_2(u) = \frac{A_1}{u}+\frac{A_2}{u^2}+\frac{A_3}{u^3}+\cdots$$

und

$$(17.)\quad \frac{f_2(u)}{f(u)} = \frac{A_1A'}{u^{n+1}}+\frac{A_2A'+A_1A''}{u^{n+2}}+\frac{A_3A'+A_2A''+A_1A'''}{u^{n+3}}+\cdots,$$

mithin $k_0=k_1=k_2=\cdots=k_{n-1}=0$. Die Formel (7.) liefert also allemal den genauen Werth von $\int_{-1}^{1}F(x)\partial x$, so oft $F(x)$ eine ganze Funktion ist, welche den $(n-1)^{\text{ten}}$ Grad nicht übersteigt. Man hat ferner

$$k_n = A_1A',\quad k_{n+1} = A_2A'+A_1A'',\quad k_{n+2} = A_3A'+A_2A''+A_1A''',\quad \text{etc.}$$

Kann man nun $f(u)$ so bestimmen, dafs in der Entwicklung von $f_2(u)$ die m ersten Glieder, also in der Entwicklung von $f(u)\lg\frac{u+1}{u-1}$ die Glieder, welche $\frac{1}{u}, \frac{1}{u^2}, \dots \frac{1}{u^m}$ enthalten, von selbst wegfallen, so beginnt die Reihe für $\frac{f_2(u)}{f(u)}$ mit dem Term $\frac{k_{m+n}}{u^{m+n+1}}$, und die Formel (7.) ist für alle ganzen Funktionen vom $(m+n-1)^{\text{ten}}$ oder einem niedrigern Grade vollkommen strenge. Gleichzeitig ist

$$k_{n+m} = A_{m+1}A', \qquad k_{n+m+1} = A_{m+2}A' + A_{m+1}A'', \qquad \text{etc.}$$

Es wird sich bald zeigen, dafs der höchste Grad von Genauigkeit, welcher mit der vorausgesetzten Form von $f(x)$ erreicht werden kann, dem Falle entspricht, wo $m = n$ ist. Es ist dies der nämliche Fall, den *Gaufs* in der oben angeführten Abhandlung, und *Jacobi* in gegenwärtigem Journal behandelt haben.

2.

Das Folgende beruht auf diesem Lemma:

Unterwirft man eine ganze Funktion $f(u)$ vom n^{ten} Grade der Bedingung, dafs aus der absteigenden Entwicklung von $f(u)\lg\frac{u+1}{u-1}$ die Terme, welche $\frac{1}{u}, \frac{1}{u^2}, \dots \frac{1}{u^n}$ enthalten, von selbst wegfallen, so giebt es stets eine Funktion, welche diesen Bedingungen genügt, und dieselbe ist bis auf einen constanten Faktor bestimmt. Verlangt man aufserdem, dafs das Glied mit $\frac{1}{u^{n+1}}$ verschwinde, so wird die Funktion $f(u)$ identisch gleich Null, indem jener constante Faktor den bestimmten Werth Null erhält.

Dasselbe ergiebt sich leicht mittelst der Formeln (10.) und (14.), denen zufolge allgemein der Coefficient von $\frac{1}{u}$ in der absteigenden Entwicklung von $F(u)\lg\frac{u+1}{u-1}$ gleich $\int_{-1}^{1}F(x)\partial x$ ist, vorausgesetzt, dafs $F(u)$ eine rationale ganze Funktion ist. Sei zunächst $f(u)$ so bestimmt, dafs in (10.) $f_2(u)$ die Form

$$f_2(u) = \frac{A_{n+2}}{u^{n+2}} + \frac{A_{n+3}}{u^{n+3}} + \cdots$$

hat, und sei ferner $f(u) = P + Qi$, wo P und Q reelle ganze Funktionen von u sind; so multiplicire man die Gleichung (10.) mit $P - Qi$. Dann ist $(P-Qi)f_1(u)$ wieder eine ganze Funktion von u, während die Entwicklung



von $(P-Qi)f_2(u)$ mit dem Term $\frac{1}{u^2}$ beginnt. Also ist der Faktor von $\frac{1}{u}$ gleich Null. Da derselbe aber gleich

$$\int_{-1}^{1} f(u)(P-Qi)\partial u = \int_{-1}^{1}(P^2+Q^2)\partial u$$

ist, und die Elemente dieses Integrals alle positiv sind, so mufs, wenn das ganze Integral gleich Null sein soll, jedes einzelne Element verschwinden, also wie behauptet, $f(u)$ identisch gleich Null sein.

Da somit die, in Bezug auf die unbekannten Coefficienten der Funktion $f(u)$ linearen Gleichungen

$$A_1 = 0, \qquad A_2 = 0, \qquad \ldots \qquad A_n = 0, \qquad A_{n+1} = 0$$

von einander unabhängig sind, indem sich aus ihnen für jede der $(n+1)$ unbekannten Gröfsen ein einziger Werth ergiebt, so folgt, dafs man unter den $(n+1)$ Coefficienten von $f(u)$ wenigstens auf *eine* Art ein System von n derselben so auswählen kann, dafs die n Gleichungen

$$\text{(A.)} \qquad A_1 = 0, \qquad A_2 = 0, \qquad \ldots \qquad A_n = 0$$

in Bezug auf dieses System von Unbekannten von einander unabhängig sind. Denn wäre dies nicht der Fall, so müfste man, wie leicht zu sehen ist, aus den Gleichungen

$$A_1 = \alpha_1, \qquad A_2 = \alpha_2, \qquad \ldots \qquad A_n = \alpha_n, \qquad A_{n+1} = \alpha_{n+1}$$

sämmtliche Unbekannten eliminiren können, was nach dem eben bewiesenen nicht möglich ist.

Da endlich die Gleichungen (A.) linear sind, so bestimmen sie das Verhältnifs von n Coefficienten zum $(n+1)^{\text{ten}}$ auf eine einzige Weise, wodurch obiges Lemma in allen seinen Theilen bewiesen ist.

Differentiirt man nun die Gleichung (10.), und multiplicirt mit u^2-1, so folgt:

$$\text{(18.)} \qquad (u^2-1)\frac{\partial f}{\partial u}\cdot \lg\frac{u+1}{u-1} = 2f + (u^2-1)\frac{\partial f_1}{\partial u} + (u^2-1)\frac{\partial f_2}{\partial u},$$

und eine nochmalige Differentiation giebt:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left((u^2-1)\frac{\partial f}{\partial u}\right)\lg\frac{u+1}{u-1} = 4\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u}\left((u^2-1)\frac{\partial f_1}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left((u^2-1)\frac{\partial f_2}{\partial u}\right).$$

Diese beiden Gleichungen haben wieder die Form von (10.). Nimmt man aber jetzt an, dafs $f_2(u)$ die Potenzen $\frac{1}{u}, \frac{1}{u^2}, \ldots \frac{1}{u^n}$ nicht enthält, dafs also

$$f_2 = \frac{A_{n+1}}{u^{n+1}} + \frac{A_{n+2}}{u^{n+2}} + \cdots$$

ist, so folgt

$$\frac{\partial}{\partial u}\left((u^2-1)\frac{\partial f_2}{\partial u}\right) = \frac{n(n+1)A_{n+1}}{u^{n+1}} + \cdots,$$

so dafs die Funktion $\frac{\partial}{\partial u}\left((u^2-1)\frac{\partial f_2}{\partial u}\right) - n(n+1)f_2$, nach negativen Potenzen von u entwickelt, die Potenzen $\frac{1}{u}, \frac{1}{u^2}, \ldots \frac{1}{u^n}, \frac{1}{u^{n+1}}$ nicht enthält. Multiplicirt man daher die Gleichung (10.) mit $n(n+1)$ und subtrahirt sie von der vorstehenden, so folgt

$$\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left((u^2-1)\frac{\partial f}{\partial u}\right) - n(n+1)f\right\}\lg\frac{u+1}{u-1}$$
$$= 4\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u}\left((u^2-1)\frac{\partial f_1}{\partial u}\right) - n(n+1)f_1 + \left\{\frac{\partial}{\partial u}\left((u^2-1)\frac{\partial f_2}{\partial u}\right) - n(n+1)f_2\right\};$$

und da der Faktor von $\lg\frac{u+1}{u-1}$ den $(n+1)^{\text{ten}}$ Grad nicht erreicht, so folgt vermöge des obigen Lemmas, dafs er identisch gleich Null sein mufs. Da ferner auf der rechten Seite die drei ersten Glieder nur positive Potenzen von u enthalten, während das Folgende sich nur aus negativen Potenzen von u zusammensetzt, und da diese beiden Theile für sich verschwinden müssen, so haben wir

$$(19.)\quad \frac{\partial}{\partial u}\left((u^2-1)\frac{\partial f}{\partial u}\right) - n(n+1)f = 0,$$

$$(20.)\quad \frac{\partial}{\partial u}\left((u^2-1)\frac{\partial f_2}{\partial u}\right) - n(n+1)f_2 = 0,$$

$$(21.)\quad \frac{\partial}{\partial u}\left((u^2-1)\frac{\partial f_1}{\partial u}\right) - n(n+1)f_1 + 4\frac{\partial f}{\partial u} = 0.$$

Nach den bekannten Untersuchungen über die Gleichung (19.) folgt hieraus

$$(22.)\quad f(u) = P_n(u) = \frac{\partial^n (u^2-1)^n}{2^n \Gamma(n+1)\partial u^n}$$
$$= \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{1.2.3\ldots n}u^n - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1.3.5\ldots 2n-3}{1.2.3\ldots n-2}u^{n-2} + \cdots,$$

und wegen (9.)

$$(23.)\quad f_2(u) = Q_n(u) = \int_{-1}^{1}\frac{P_n(x)\partial x}{u-x},$$

welche Bezeichnung von der gewöhnlichen nur wenig abweicht. Sodann folgt, dafs die Gleichung

$$(24.)\quad \frac{\partial}{\partial u}\left((u^2-1)\frac{\partial U}{\partial u}\right) = n(n+1)U - 4\frac{\partial P_n(u)}{\partial u}$$

zu ihrem completen Integrale einen Ausdruck von der Form

$$(25.)\quad U = AP_n(u) + BQ_n(u) + R_n(u)$$

hat, wo $R_n(u)$ eine rationale ganze Funktion vom $(n-1)^{ten}$ Grade, und nichts Anderes, als die bisher durch $f_1(u)$ bezeichnete Funktion ist. Die Funktionen P, Q, R stehen in Folge der Gleichung (10.) in der Relation

$$(26.)\qquad P_n(u)\lg\frac{u+1}{u-1} = Q_n(u)+R_n(u),$$

oder auch

$$(27.)\qquad Q_n(u) = P_n(u)\lg\frac{u+1}{u-1}-R_n(u),$$

so dafs nur noch die Funktion $R_n(u)$ zu bestimmen übrig bleibt. Zuvor will ich aber noch die Formeln

$$(28.)\qquad (u^2-1)P'_n(u) = \frac{n(n+1)}{2n+1}(P_{n+1}(u)-P_{n-1}(u)),$$

$$(29.)\qquad \begin{cases}(2n+1)u\,P_n(u) = (n+1)P_{n+1}(u)+n\,P_{n-1}(u),\\ (2n+1)u\,Q_n(u) = (n+1)\,Q_{n+1}(u)+n\,Q_{n-1}(u),\\ (2n+1)u\,R_n(u) = (n+1)R_{n+1}(u)+n\,R_{n-1}(u)\end{cases}$$

einschalten, welche sich auf verschiedene Art, unter anderm auch mittelst obigen Lemma's beweisen lassen. Setzt man z. B. in (18.) $P_n(u)$ für $f(u)$ ein, so beginnt die Entwicklung von $(u^2-1)\frac{\partial f_1}{\partial u}$ mit dem Term $-\frac{(n+1)A_{n+1}}{u^n}$. Bedenkt man nun, dafs man setzen kann

$$(u^2-1)P'_n(u) = aP_{n+1}(u)+b\,P_{n-1}(u)+c\,P_{n-3}(u)+\cdots,$$

so folgt aus unserm Lemma, dafs auf der rechten Seite alle Coefficienten, mit Ausnahme von a und b, verschwinden. Die Bestimmung der Constanten a und b hat keine Schwierigkeiten. — Zur Herleitung der Gleichungen (29.) hat man nur (26.) mit u zu multipliciren, und ganz ähnliche Betrachtungen anzustellen. Diese Gleichungen stimmen übrigens im Wesentlichen mit denen überein, deren sich *Gaufs* in den artt. 17. und 18. seiner Abhandlung bedient.

Differentiirt man die Gleichung (28.), so folgt wegen (19.)

$$P'_{n+1}(u)-P'_{n-1}(u) = (2n+1)P_n(u),$$

also auch

$$P'_{n-1}(u)-P'_{n-3}(u) = (2n-3)P_{n-2}(u),$$

u. s. f., woraus durch Addition

$$(30.)\qquad P'_{n+1}(u) = (2n+1)P_n(u)+(2n-3)P_{n-2}(u)+(2n-7)P_{n-4}(u)+\cdots$$

folgt. Vermöge dieser Formel geht die Gleichung (24.) in folgende über:

$$(31.)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\Big((u^2-1)\frac{\partial U}{\partial u}\Big)-n(n+1)\,U$$
$$+4\{(2n-1)P_{n-1}+(2n-5)P_{n-3}+(2n-9)P_{n-5}+\cdots\} = 0.$$

Um nun zur Bestimmung von $R_n(u)$ überzugehen, bemerke man, dafs die Gleichung (26.) durch Aenderung des Vorzeichens von u und nachfolgende Multiplication mit $(-1)^{n-1}$ folgende Gestalt annimmt:

$$P_n(u)\lg\frac{u+1}{u-1} = (-1)^{n+1}Q_n(-u)+(-1)^{n-1}R_n(-u),$$

woraus durch Vergleichung mit (26.) $R_n(-u)=(-1)^{n-1}R_n(u)$ folgt. Da somit $R_n(u)$ nur die Potenzen u^{n-1}, u^{n-3}, u^{n-5} etc. enthalten kann, so hat es die Form

$$R_n(u) = a_1P_{n-1}(u)+a_3P_{n-3}(u)+a_5P_{n-5}(u)+\cdots$$

Setzt man dies in (31.) für U ein, so folgt:

$$\begin{aligned} 0 = a_1[(n-1)n-n(n+1)]P_{n-1} &+ a_3[(n-3)(n-2)-n(n+1)]P_{n-3} \\ +4(2n-1)P_{n-1} \qquad & \qquad +4(2n-5)P_{n-3} \\ & + a_5[(n-5)(n-6)-n(n+1)]P_{n-5}+\cdots \\ & \qquad +4(2n-9)P_{n-5} \qquad +\cdots, \end{aligned}$$

und hieraus

$$a_1 = 2\frac{2n-1}{1.n},\quad a_3=2\frac{2n-5}{3(n-1)},\quad a_5=2\frac{2n-9}{5(n-2)},\quad \text{u. s. w.}$$

Damit sind die verlangten Funktionen f, f_1, f_2 vollständig bestimmt; es ist nämlich:

$$(32.)\quad \begin{cases} f(u) = P_n(u) = \dfrac{\partial^n(u^2-1)^n}{2^n\Gamma(n+1)\partial u^n}, \\ f_1(u) = R_n(u) = 2\left\{\dfrac{2n-1}{1.n}P_{n-1}(u)+\dfrac{2n-5}{3(n-1)}P_{n-3}(u) \right. \\ \qquad\qquad\qquad \left. +\dfrac{2n-9}{5(n-2)}P_{n-5}(u)+\cdots\right\}, \\ f_2(u) = Q_n(u) = P_n(u)\lg\dfrac{u+1}{u-1}-R_n(u) = \displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{P_n(x)\partial x}{u-x} \\ \qquad = 2\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}\dfrac{2s+1.2s+2\ldots 2s+n}{2s+1.2s+3\ldots 2s+2n+1}\cdot\dfrac{1}{u^{n+2s+1}}. \end{cases}$$

Den allgemeinen Ausdruck der Funktion $P_n(u)$ hat *Gaufs* in seiner Abhandlung gegeben, doch rührt die elegante, obenstehende Form derselben von *Jacobi* her. Auch findet man bei *Gaufs* den Ausdruck von $Q_n(u)$ sowohl in Form einer hypergeometrischen Reihe, wie in seiner Reduction auf einen algebraischen und einen transcendenten Theil.

Obgleich auf diese Weise die Coefficienten in der Gleichung (6.) explicite dargestellt sind, so giebt es doch mit Rücksicht darauf, dafs in den

Gröfsen $\frac{f_1(u)}{f'(u)}$ dort für u nur solche Werthe zu substituiren sind, welche $f(u)$ verschwinden machen, noch einfachere Darstellungsweisen für dieselben. Aus den Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial u}((u^2-1)P_n'(u)) = n(n+1)P_n(u),$$

$$\frac{\partial}{\partial u}((u^2-1)R_n'(u)) = n(n+1)R_n(u) - 4P_n'(u)$$

folgt durch Elimination von $n(n+1)$:

$$P_n\frac{\partial}{\partial u}((u^2-1)R_n') - R_n\frac{\partial}{\partial u}((u^2-1)P_n') + 4P_nP_n' = 0,$$

und hieraus durch theilweise Integration

$$(u^2-1)(P_nR_n' - R_nP_n') + 2P_n^2 = a.$$

Für $u=1$ ergiebt sich hieraus $a=2$, also ist identisch

$$(33.)\quad \frac{u^2-1}{2}\{P_n(u)R_n'(u) - R_n(u)P_n'(u)\} + P_n^2(u) = 1,$$

mithin für alle Werthe von u, für welche $P_n(u)=0$ ist:

$$(34.)\quad \frac{1-u^2}{2}P_n'(u)R_n(u) = 1.$$

Daraus folgt für die nämlichen Werthe von u:

$$(35.)\quad \frac{f_1(u)}{f'(u)} = \frac{R_n(u)}{P_n'(u)} = \frac{1-u^2}{2}(R_n(u))^2 = \frac{2}{(1-u^2)(P_n'(u))^2}.$$

Die erste dieser Darstellungen ist von *Gaufs* gegeben; die zweite dagegen hat den Vorzug, dafs sie die Berechnung der Coefficienten $\frac{f_1(u)}{f'(u)}$ blofs von der Funktion $P_n'(u)$ abhängig macht, deren numerischer Werth bei der Auflösung der Gleichung $P_n(u)=0$ gleichzeitig mit der Wurzel u bestimmt wird.

Sind $a_1, a_2, \dots a_n$ die Wurzeln der Gleichung $P_n(u)=0$, so ist

$$(36.)\quad P_n(u) = \frac{1.3.5\dots 2n-1}{1.2.3\dots n}(u-a_1)(u-a_2)\dots(u-a_n),$$

folglich nach der zweiten Darstellungsweise

$$(37.)\quad \frac{f_1(a_1)}{f'(a_1)} = \frac{2\left(\frac{1.2.3\dots n}{1.3.5\dots 2n-1}\right)^2}{(1-a_1)(1+a_1)[(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_n)]^2},$$

so dafs sämmtliche Coefficienten in einfache, leicht zu bildende Faktoren zerlegt sind. Ich bemerke noch folgende Formeln, welche sich unter der Vor-

aussetzung, dafs $P_n(u) = 0$ sei, aus (28.) und (29.) leicht ergeben:

$$(38.)\qquad (1-u^2)P'_n(u) = nP_{n-1}(u) = -(n+1)P_{n+1}(u),$$

$$(39.)\qquad \frac{f_1(u)}{f'(u)} = \frac{2(1-u^2)}{(nP_{n-1}(u))^2} = \frac{2(1-u^2)}{((n+1)P_{n+1}(u))^2}.$$

Diese Ausdrücke treten durch Auflösung in lineare Faktoren in eine interessante Beziehung zum Produkte

$$\frac{R_n(a_1)}{P'_n(a_1)}\cdot\frac{R_n(a_2)}{P'_n(a_2)}\cdots\frac{R_n(a_n)}{P'_n(a_n)}.$$

Dies vorangeschickt haben wir das Resultat, dafs, wenn $F(x)$ eine rationale ganze Funktion von x ist, welche den $(2n-1)^{\text{ten}}$ Grad nicht überschreitet, man die streng richtige Gleichung hat

$$(40.)\qquad \int_{-1}^{1} F(x)\,\partial x = \frac{R_n(a_1)}{P'_n(a_1)}F(a_1)+\frac{R_n(a_2)}{P'_n(a_2)}F(a_2)+\cdots+\frac{R_n(a_n)}{P'_n(a_n)}F(a_n).$$

Läfst sich ferner $F(x)$ in eine nach positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln, welche für alle zwischen -1 und 1 liegenden Werthe von x so stark convergirt, dafs man die Reihe, ohne ihren Werth merklich zu ändern, auf ihre $2n$ ersten Glieder reduciren kann, so gilt die Formel (40.) wieder ohne merklichen Fehler. Dasselbe gilt, wenn man vermöge der besondern Beschaffenheit von $F(x)$ alle auf das $2n^{\text{te}}$ folgenden Glieder in den sogenannten Rest der Reihe vereinigen mufs, wofern nur dieser Rest gegen $F(x)$ vernachlässigt werden darf.

Um hiervon eine Anwendung zu geben, werde ich die Interpolationsformel (2.) für den Fall, wo die Gröfsen $a_1, a_2, \ldots a_n$ die Wurzeln der Gleichung $P_n(u) = 0$ sind, in eine andere Form bringen. Ich erinnere zu dem Zwecke an die bekannten Formeln

$$\int_{-1}^{1} P_\mu(x)P_\nu(x)\,\partial x = 0,\qquad \int_{-1}^{1} P_\nu(x)P_\nu(x)\,\partial x = \frac{2}{2\nu+1},$$

von denen sich die erstere aus der Betrachtung des Produktes $P_m(u)\,Q_{m+p}(u)$ unter Anwendung der Gleichung (14.) leicht ergiebt. — Ist nun $\mu+\nu < 2n$ und auch $2\nu < 2n$, so mufs man mittelst der Formel (40.) den genauen Werth dieser Integrale erhalten, und es ist somit

$$(41.)\qquad \Sigma P_\mu(a)\,P_\nu(a)\frac{R_n(a)}{P'_n(a)} = 0$$

$$(42.)\qquad \Sigma P_\nu(a)\,P_\nu(a)\frac{R_n(a)}{P'_n(a)} = \frac{2}{2\nu+1},$$

wo die Summen sich auf die Werthe $a = a_1, a_2, \ldots a_n$ beziehen. Will man

jetzt die Funktion $F(x)$ durch eine Funktion $f(x)$ vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade ersetzen, welche mit ihr für die Werthe $x = a_1, a_2, \dots a_n$ übereinstimmen soll, so kann man setzen

$$f(x) = \beta P_0(x) + \beta_1 P_1(x) + \beta_2 P_2(x) + \cdots + \beta_{n-1} P_{n-1}(x),$$

und hat zur Bestimmung der Coefficienten $\beta, \beta_1, \dots \beta_{n-1}$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} F(a_1) &= \beta P_0(a_1) + \beta_1 P_1(a_1) + \beta_2 P_2(a_1) + \cdots + \beta_{n-1} P_{n-1}(a_1) \\ F(a_2) &= \beta P_0(a_2) + \beta_1 P_1(a_2) + \beta_2 P_2(a_2) + \cdots + \beta_{n-1} P_{n-1}(a_2) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F(a_n) &= \beta P_0(a_n) + \beta_1 P_1(a_n) + \beta_2 P_2(a_n) + \cdots + \beta_{n-1} P_{n-1}(a_n). \end{aligned}$$

Multiplicirt man diese der Reihe nach mit

$$P_\nu(a_1)\frac{R_n(a_1)}{P'_n(a_1)}, \qquad P_\nu(a_2)\frac{R_n(a_2)}{P'_n(a_2)}, \qquad \dots \qquad P_\nu(a_n)\frac{R_n(a_n)}{P'_n(a_n)}$$

und addirt, so fallen wegen (41.) alle β weg, deren Index von ν verschieden ist: da hingegen nach (42.) der Coefficient von β_ν gleich $\frac{2}{2\nu+1}$ ist, so folgt

$$\beta_\nu = \frac{2\nu+1}{2} \Sigma F(a) P_\nu(a) \frac{R_n(a)}{P'_n(a)},$$

wo die Summe wie oben zu interpretiren ist. Die so bestimmte Funktion $f(x)$ ist mit der durch die Gleichung (2.) definirten $\varphi(x)$ identisch, da beides rationale ganze Funktionen $(n-1)^{\text{te}}$ Grades sind, welche für n Werthe von x mit einander übereinstimmen. Es ist also

$$(43.) \qquad \varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \frac{2\nu+1}{2} P_\nu(x) \Sigma F(a) P_\nu(a) \frac{R_n(a)}{P'_n(a)}.$$

Ist $F(x)$ eine ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, so fällt diese Formel mit der bekannten Entwicklung zusammen. Setzt man z. B. $F(x) = \frac{P_n(x) - P_n(y)}{x-y}$, so ist $\varphi(x) = F(x)$, ferner $F(a_s) = \frac{P_n(y)}{y - a_s}$, mithin

$$\begin{aligned} \beta_\nu &= \frac{2\nu+1}{2} P_n(y) \Sigma \frac{P_\nu(a)}{y-a} \frac{R_n(a)}{P'_n(a)} \\ &= \frac{2\nu+1}{2} \left\{ P_\nu(y) \Sigma \frac{R_n(a)}{P'_n(a)} \frac{P_n(y)}{y-a} - P_n(y) \Sigma \frac{P_\nu(y) - P_\nu(a)}{y-a} \frac{R_n(a)}{P'_n(a)} \right\}. \end{aligned}$$

In diesem Ausdrucke ist die erste Summe gleich $R_n(y)$; die andere kann, da $\frac{P_\nu(y) - P_\nu(x)}{y-x}$ eine ganze Funktion von x ist, welche den $2n^{\text{ten}}$ Grad nicht erreicht, nach (40.) durch das Integral $\int_{-1}^{1} \frac{P_\nu(y) - P_\nu(x)}{y-x} \partial x = R_\nu(y)$ ersetzt

werden. Folglich ist

$$\beta_\nu = \frac{2\nu+1}{2}(P_\nu(y)R_n(y) - P_n(y)R_\nu(y))$$

und

$$\frac{P_n(x)-P_n(y)}{x-y} = \sum_0^{n-1}\frac{2\nu+1}{2}\{P_\nu(y)R_n(y) - P_n(y)R_\nu(y)\}P_\nu(x).$$

Setzt man hier tx und ty statt x und y, so überzeugt man sich leicht, dafs β_ν höchstens vom $(n-\nu-1)^{\text{ten}}$ Grade sein kann.

Die erzeugende Funktion der Ausdrücke

$$\Pi_m = P_n(u)R_{n+m}(u) - P_{n+m}(u)R_n(u),$$

nämlich $v = \sum_0^\infty \Pi_m x^m$, genügt der Differentialgleichung

$$(1-2ux+x^2)\frac{\partial x^n v}{\partial x} + (x-u)x^n v = 2x^n,$$

wie man durch Substitution der Reihe für v mittelst (29.) leicht verifizirt; und es findet sich

$$v = \frac{2}{x^n\sqrt{(1-2ux+x^2)}}\int_0^x \frac{x^n\partial x}{\sqrt{(1-2ux+x^2)}}.$$

Daraus ergiebt sich

$$\Pi_{m+1} = 2\sum_0^m \frac{P_s(u)P_{m-s}(u)}{n+s+1},$$

also wenn $\nu < n$:

$$P_\nu R_n - P_n R_\nu = 2\sum_0^{n-\nu-1}\frac{P_s P_{n-\nu-s-1}}{\nu+s+1},$$

wodurch die oben nachgewiesene Reduktion bewerkstelligt ist.

Eine interessantere, auch in der Folge nützliche Anwendung von (43.) ist folgende. Setzt man in dieser Formel

$$F(x) = \frac{n}{2}\cdot\frac{P_n(x)P_{n-1}(y) - P_n(y)P_{n-1}(x)}{x-y},$$

so erhält man wieder $\varphi(x) = F(x)$, da letztere Funktion in Bezug auf x ganz und vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade ist. Es ist aber

$$F(a_s) = \frac{n}{2}\cdot\frac{P_n(y)P_{n-1}(a_s)}{y-a_s},$$

folglich

$$\beta_\nu = \frac{n}{2}\cdot\frac{2\nu+1}{2}\sum\frac{P_n(y)}{y-a}\,\frac{P_\nu(a)P_{n-1}(a)R_n(a)}{P_n'(a)}.$$

Aus (38.) und (34.) folgt weiter

$$(1-a^2)P_n'(a) = nP_{n-1}(a),\quad (1-a^2)P_n'(a)R_n(a) = nP_{n-1}(a)R_n(a) = 2,$$

mithin

$$\beta_\nu = \frac{2\nu+1}{2}\Sigma\frac{P_n(y)}{y-a}\frac{P_\nu(a)}{P_n'(a)} = \frac{2\nu+1}{2}P_\nu(y).$$

Es ist daher identisch

$$(44.)\quad \frac{n}{2}\cdot\frac{P_n(x)P_{n-1}(y)-P_n(y)P_{n-1}(x)}{x-y} = \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1}\frac{2\nu+1}{2}P_\nu(x)P_\nu(y),$$

wie man auch durch Multiplication mit $x-y$ und Anwendung von (29.) verificiren kann.

3.

Sei jetzt, um zu dem in 1. angedeuteten allgemeinen Falle überzugehen, $f(u)$ eine Funktion vom $(m+n)^{\text{ten}}$ Grade, welche die Eigenschaft hat, dafs aus der Entwicklung von $f(u)\lg\frac{u+1}{u-1}$ die Terme $\frac{1}{u}, \frac{1}{u^2}, \dots \frac{1}{u^m}$ wegfallen, und sei wie früher

$$(1.)\quad f_1(u) = \int_{-1}^{1}\frac{f(x)-f(u)}{x-u}\partial x;$$

seien ferner $a_1, a_2, \dots a_{n+m}$ die Wurzeln der Gleichung $f(u)=0$, so giebt der Ausdruck

$$(2.)\quad \Omega = \sum_{s=1}^{s=n+m}\frac{f_1(a_s)}{f'(a_s)}F(a_s)$$

im Allgemeinen einen genäherten Werth des Integrals $\int_{-1}^{1}F(x)\partial x$, während er diesen Werth genau darstellt, so oft $F(x)$ eine ganze Funktion ist, welche den $(2m+n-1)^{\text{ten}}$ Grad nicht übersteigt.

Zur Bestimmung der Funktion $f(u)$ bietet sich zunächst ein Weg dar durch die Gleichungen 1. (14.), (15.), denen zufolge die erwähnte Eigenschaft von $f(u)$ durch die Gleichungen

$$(3.)\quad \int_{-1}^{1}f(x)\partial x = 0,\quad \int_{-1}^{1}f(x)x\,\partial x = 0,\quad \dots\quad \int_{-1}^{1}f(x)x^{m-1}\partial x = 0$$

bedingt wird.

Da diese Gleichungen nach dem in art. 2 Eingangs Bemerkten von einander unabhängig sind, so lassen sich aus ihnen m Coefficienten von $f(u)$ durch die übrigen $(n+1)$ ausdrücken. Geht man also auf die Wurzeln von $f(u)$ zurück, so sind durch die Gleichungen (3.) m dieser Wurzeln durch die übrigen n auf eine einzige Weise bestimmt; letztere dagegen bleiben vollkommen willkürlich. Genau gesprochen besteht also die vorliegende Aufgabe darin, dafs man diejenige Funktion $f(u)$ vom $(n+m)^{\text{ten}}$ Grade bestimmen

soll, welche den Gleichungen (3.) Genüge leistet, und für gegebene n Werthe von u verschwindet. Zugleich ist ersichtlich, dafs diese Aufgabe stets eine, und nur eine einzige Lösung zuläfst.

Gegenwärtige Methode gewährt demnach die Möglichkeit, bei der angenährten Integration einer *gegebenen* Funktion alle Vortheile zu vereinigen, welche einerseits aus der Berücksichtigung des numerischen Verlaufs dieser Funktion, und andererseits aus der Anwendung der *Gaufs*ischen Methode entspringen können. Man wird nämlich jene n willkürlichen Wurzeln so wählen, dafs für sie die Funktion $F(x)$ besonders einfache, oder auch solche Werthe annimmt, von denen ein grofser Einflufs auf den Werth des gesuchten Integrals zu erwarten ist.

Man kann aber auch in den Fall kommen, dafs der analytische Ausdruck von $F(x)$ unbekannt ist, während die Werthe $F(a_1)$, $F(a_2)$, ... $F(a_n)$ beispielsweise durch Beobachtungen bestimmt worden sind. Kann man es alsdann dahin bringen, auch noch die Werthe von $F(x)$ für die übrigen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ zu bestimmen, so gewährt die Formel (2.), abgesehen von den Beobachtungsfehlern, einen höhern Grad von Genauigkeit, als sich mit jenen n und irgend welchen andern m Zwischenwerthen im Allgemeinen würde erreichen lassen.

Seien also a_1, a_2, ... a_n die gegebenen Wurzeln von $f(x)$, und

$$(4.)\qquad y = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n),$$

so kann man setzen

$$(5.)\qquad f(x) = y(A_m x^m + A'_m x^{m-1} + \dots + A_m^{(m)}).$$

Setzt man ferner

$$(6.)\qquad \int_{-1}^{1} y x^s \partial x = Y_s,$$

so gehen die Gleichungen (3.) in folgende über:

$$\begin{aligned} 0 &= A_m Y_m + A'_m Y_{m-1} + \dots A_m^{(m)} Y_0 \\ 0 &= A_m Y_{m+1} + A'_m Y_m + \dots + A_m^{(m)} Y_1 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 &= A_m Y_{2m-1} + A'_m Y_{2m-2} + \dots A_m^{(m)} Y_{m-1}, \end{aligned}$$

und hieraus ergiebt sich, wenn $y_1, y_2, \dots y_m$ die Werthe von y für $x = x_1, x_2, \dots x_m$ vorstellen, und man von einem constanten Faktor absieht

$$(7.)\qquad f(x) = y\int_{-1}^{1(m)} y_1 y_2 \dots y_m (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_m) \\ \Pi(x_1, x_2, \dots x_m)\, x_1^0 x_2^1 \dots x_m^{m-1}\, \partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m,$$

wo $\Pi(x_1, x_2, \dots x_m) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)\dots$ ist. Ist $i_1, i_2, \dots i_m$ irgend eine Permutation der Zahlen 1, 2, ... m, so ist dies auch gleich

$$y\int_{-1}^{1(m)} y_1 y_2 \dots y_m (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_m)$$
$$\Pi(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots x_{i_m})\, x_{i_1}^0\, x_{i_2}^1 \dots x_{i_m}^{m-1}\,\partial x_1\,\partial x_2 \dots \partial x_m.$$

Bringt man aber in Π die Indices wieder in die frühere Ordnung, so erhält $x_{i_1}^0, x_{i_2}^1, \dots x_{i_m}^{m-1}$ dasselbe Vorzeichen, welches es in der Determinante

$$\Sigma \pm x_1^0 x_2^1 \dots x_m^{m-1} = \Pi(x_1, x_2, \dots x_m)$$

hat. Folglich ist auch

$$(8.)\qquad \Gamma(m+1).f(x)$$
$$= y\int_{-1}^{1(m)} y_1 y_2 \dots y_m (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_m)[\Pi(x_1, x_2, \dots x_m)]^2 \partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m.$$

Dies ist der allgemeine Ausdruck der Funktion $f(x)$, und es steht seiner Anwendung nichts im Wege, als die zahlreichen und unbequemen Integrationen, welche er involvirt. Ich werde daher für einige besondere Fälle seine entwickelte Form hersetzen. Es ist für

$$(9.)\quad \begin{cases} m=0 \quad f(x) = y \\ m=1 \quad f(x) = y\{xY_0 - Y_1\} \\ m=2 \quad f(x) = y\{x^2[Y_1^2 - Y_0 Y_2] - x[Y_1 Y_2 - Y_0 Y_3] + [Y_2^2 - Y_1 Y_3]\} \\ m=3 \quad f(x) = y\{x^3[Y_2^3 - Y_1 Y_2 Y_3 + Y_3^2 Y_0 - Y_1 Y_2 Y_3 + Y_1^2 Y_4 - Y_0 Y_2 Y_4] \\ \qquad\qquad - x^2[Y_2^2 Y_3 - Y_1 Y_3^2 + Y_0 Y_3 Y_4 - Y_1 Y_2 Y_4 + Y_1^2 Y_5 - Y_0 Y_2 Y_5] \\ \qquad\qquad + x[Y_0 Y_4^2 - Y_0 Y_3 Y_5 + Y_1 Y_2 Y_5 - Y_1 Y_3 Y_4 + Y_2 Y_3^2 - Y_2^2 Y_4] \\ \qquad\qquad - [Y_3^3 - Y_2 Y_3 Y_4 + Y_1 Y_4^2 - Y_2 Y_3 Y_4 + Y_2^2 Y_5 - Y_1 Y_3 Y_5]\} \\ \qquad\qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{cases}$$

Für gewisse Anwendungen ist es nöthig, die Gleichung (2.) in eine andere Form zu bringen. Sei

$$y = (x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n) = A(x),$$
$$f(x) = yB(x) = yA_m(x - b_1)(x - b_2)\dots(x - b_m),$$

so dafs die Gröfsen $b_1, b_2, \dots b_m$ mit den früher durch $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots a_{n+m}$ bezeichneten zusammenfallen. Sei ferner

$$(10.)\qquad \varphi(x) = \Sigma \frac{F(a)}{A'(a)} \frac{A(x)}{x-a},$$

$$(11.)\qquad \psi(x) = \Sigma \frac{F(a)}{A'(a)} \frac{A(x)B(x)}{(x-a)B(a)} + \Sigma \frac{F(b)}{B'(b)} \frac{A(x)B(x)}{(x-b)A(b)},$$

so ist die rechte Seite von (2.) nichts anderes als das von $x = -1$ bis

$x=1$ genommene Integral von $\psi(x)$. Man kann aber diese Funktion auch in die Form

$$(12.)\qquad \psi(x)=\varphi(x)+\Sigma\frac{F(b)-\varphi(b)}{A(b)B'(b)}\,\frac{A(x)B(x)}{x-b}$$

bringen, indem beide Ausdrücke für $x=a_1, a_2, \dots a_n, b_1, b_2, \dots b_m$ mit $F(x)$ übereinstimmen, und somit als Funktionen des $(n+m-1)^{\text{ten}}$ Grades identisch sein müssen. Dies festgestellt, erhalten wir statt der Gleichung (2.) folgende:

$$(13.)\qquad \Omega=\Sigma\frac{A_1(a)}{A'(a)}F(a)+\Sigma\frac{F(b)-\varphi(b)}{A(b)B'(b)}\int_{-1}^{1}\frac{A(x)B(x)}{x-b}\,\partial x,$$

welche für die Anwendung gegenwärtiger Methode einen neuen Gesichtspunkt darbietet. Betrachtet man nämlich

$$\int_{-1}^{1}\varphi(x)\,\partial x=\Sigma\frac{A_1(a)}{A'(a)}F(a)$$

als erste Annäherung an den Werth von $\int_{-1}^{1}F(x)\,\partial x$, so stellt sich der Ausdruck

$$\varDelta=\Sigma\frac{F(b)-\varphi(b)}{A(b)B'(b)}\int_{-1}^{1}\frac{A(x)B(x)}{x-b}\,\partial x$$

als die Correction dar, welche man an jener anzubringen hat, um einen genauern Werth zu erhalten.

So aufgefafst kommt also unsere Methode darauf hinaus, die Wurzeln $b_1, b_2, \dots b_m$ so auszuwählen, dafs die mittelst derselben berechnete Correction $\varDelta$ eine höhere Genauigkeit erreicht, als sich im Allgemeinen mittelst irgend welcher anderer m Wurzeln würde erzielen lassen.

Ist $k_s^{(m)}$ der bei der Integration von x^s begangene Fehler, so hat man nach art. 1 $k_0^{(m)}=k_1^{(m)}=\dots=k_{2m+n-1}^{(m)}=0$,

$$\frac{k_{2m+n}^{(m)}}{u^{2m+n+1}}+\frac{k_{2m+n+1}^{(m)}}{u^{2m+n+2}}+\dots=\frac{f_1(u)}{f(u)}=\frac{1}{f(u)}\sum_0^\infty\frac{1}{u^{m+s+1}}\int_{-1}^{1}x^{m+s}f(x)\,\partial x,$$

also

$$k_{2m+n}^{(m)}=\lim_{u=\infty}\frac{u^{m+1}f_1(u)}{\frac{f(u)}{u^{m+n}}}=\frac{1}{A_m}\int_{-1}^{1}x^m f(x)\,\partial x.$$

Aus (7.) folgt aber weiter, dafs

$$\int_{-1}^{1}x^m f(x)\,\partial x$$

$$=\int_{-1}^{1(m+1)}y_1y_2\dots y_{m+1}\,\Pi(x_1,x_2,\dots x_{m+1})\,x_1^0x_2'\dots x_{m+1}^m\,\partial x_1\,\partial x_2\dots\partial x_{m+1}$$

der Coefficient der höchsten Potenz von x in

$$\gamma\int_{-1}^{1(m+1)}\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_{m+1}(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{m+1})$$
$$\Pi(x_1, x_2, \dots x_{m+1})x_1^0 x_2^1 \dots x_{m+1}^m \partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_{m+1},$$

also nach der Bezeichnung der Formel (5.) gleich A_{m+1} ist. Folglich hat man allgemein

$$k_{2m+n}^{(m)} = \frac{A_{m+1}}{A_m},$$

also z. B.

$$k_n^{(0)} = Y_0, \qquad k'_{n+2} = \frac{\begin{vmatrix} Y_1 & Y_0 \\ Y_2 & Y_1 \end{vmatrix}}{Y_0}, \qquad k''_{n+4} = \frac{\begin{vmatrix} Y_2 & Y_1 & Y_0 \\ Y_3 & Y_2 & Y_1 \\ Y_4 & Y_3 & Y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Y_1 & Y_0 \\ Y_2 & Y_1 \end{vmatrix}}, \quad \text{etc.}$$

4.

Obgleich die Entwicklungen des vorigen art. für alle in der Praxis vorkommenden Fälle ausreichen dürften, so werde ich doch eine zweite Herleitung derselben nicht übergehen, da die gesuchten Ausdrücke auf einem andern Wege eine vollkommnere Gestalt annehmen.

Ist $f(x)$ eine ganze Funktion vom $(n+m)^{\text{ten}}$ Grade, so kann man stets setzen

$$f(x) = AP_{n+m}(x) + A_1 P_{n+m-1}(x) + \dots + A_{n+m-1}P_1(x) + A_{n+m}P_0(x).$$

Sollen nun aus der Entwicklung von $f(x)\lg\frac{x+1}{x-1}$ die Terme $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \dots \frac{1}{x^m}$ ausfallen, so sieht man aus den früher entwickelten Eigenschaften der Funktionen P, dafs $f(x)$ die Funktionen $P_0, P_1, \dots P_{m-1}$ nicht enthalten darf, und es ist daher der allgemeinste Ausdruck der Funktion $(n+m)^{\text{ten}}$ Grades, welche jener Bedingung genügt, dieser:

$$f(x) = AP_{n+m}(x) + A_1 P_{n+m-1}(x) + \dots + A_n P_m(x).$$

Diese Funktion soll ferner für $x = a_1, a_2, \dots a_n$ verschwinden. Wenn man daher von einem willkürlichen constanten Faktor absieht, so erhält man

$$(1.) \qquad f(x) = \Sigma \pm P_{n+m}(x) P_{n+m-1}(a_1) P_{n+m-2}(a_2) \dots P_m(a_n),$$

und es handelt sich darum, diese Determinante durch das Produkt

$$(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$$

wirklich zu dividiren. Für $n=1$ gelingt dies mittelst der Formel (44.)

art. 2. Setzt man nämlich dort $m+1$ statt n und a_1 statt y, so ergiebt sich

$$(2.)\qquad \frac{P_{m+1}(x)P_m(a_1)-P_m(x)P_{m+1}(a_1)}{x-a_1}=\frac{2}{2m+1}\cdot\frac{2m+1}{m+1}\sum_0^m\frac{2\nu+1}{2}P_\nu(x)P_\nu(a_1).$$

Ich werde jetzt einen Hülfssatz beibringen, durch welchen man von vorstehender Formel zur Division der Gleichung (1.) durch den Ausdruck

$$(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$$

gelangen kann.

Bezeichnet man die in (1.) rechts stehende Determinante durch Δ, so bilde man die Funktion

$$(3.)\qquad U=\frac{P_{n+m-1}(a_1)\dfrac{\partial\Delta}{\partial P_{n+m}(a_1)}}{(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_n)}+\frac{P_{n+m-1}(a_2)\dfrac{\partial\Delta}{\partial P_{n+m}(a_2)}}{(x-a_3)\dots(x-a_n)(x-a_1)}+\cdots$$
$$+\frac{P_{n+m-1}(a_n)\dfrac{\partial\Delta}{\partial P_{n+m}(a_n)}}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{n-1})},$$

also

$$(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)\,U$$
$$=(x-a_1)P_{n+m-1}(a_1)\frac{\partial\Delta}{\partial P_{n+m}(a_1)}+(x-a_2)P_{n+m-1}(a_2)\frac{\partial\Delta}{\partial P_{n+m}(a_2)}+\cdots$$
$$+(x-a_n)P_{n+m-1}(a_n)\frac{\partial\Delta}{\partial P_{n+m}(a_n)}.$$

Nun ist nach den bekannten Eigenschaften der Determinanten

$$P_{n+m-1}(x)\frac{\partial\Delta}{\partial P_{n+m}(x)}+P_{n+m-1}(a_1)\frac{\partial\Delta}{\partial P_{n+m}(a_1)}+\cdots+P_{n+m-1}(a_n)\frac{\partial\Delta}{\partial P_{n+m}(a_n)}=0,$$

mithin vorstehendes gleich

$$-\left\{xP_{n+m-1}(x)\frac{\partial\Delta}{\partial P_{n+m}(x)}+a_1P_{n+m-1}(a_1)\frac{\partial\Delta}{\partial P_{n+m}(a_1)}+\cdots\right\}.$$

Transformirt man hier die Faktoren der Partialdeterminanten mittelst der Formel (29. art. 2)

$$uP_{n+m-1}(u)=\frac{n+m}{2n+2m-1}P_{n+m}(u)+\frac{n+m-1}{2n+2m-1}P_{n+m-2}(u),$$

so zerstören sich alle Glieder, welche Faktoren von der Form

$$\frac{n+m-1}{2n+2m-1}P_{n+m-2}(u)$$

erhalten, und dieser Ausdruck ergiebt sich gleich

$$-\frac{n+m}{2n+2m-1}\left\{P_{n+m}(x)\frac{\partial\Delta}{\partial P_{n+m}(x)}+P_{n+m}(a_1)\frac{\partial\Delta}{\partial P_{n+m}(a_1)}+\cdots\right\}=-\frac{n+m}{2n+2m-1}\Delta.$$

Daraus folgt die Formel

$$(4.)\qquad \frac{\Delta}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)} = -\frac{2n+2m-1}{n+m}U.$$

Da die partiellen Determinanten $\frac{\partial\Delta}{\partial P_{n+m}(a_i)}$ von derselben Art wie Δ selber, aber eine Ordnung niedriger sind, so reducirt sich durch (4.) die Herstellung des Quotienten zur Linken auf die von n andern Quotienten derselben Gattung, in denen Zähler und Nenner um eine Ordnung niedriger sind.

Mittelst der Formeln (2.) und (4.) erhält man

$$\frac{\Sigma\pm P_{m+2}(x)P_{m+1}(a_1)P_m(a_2)}{(x-a_1)(x-a_2)}$$
$$= \frac{2m+3}{m+2}\left\{P_{m+1}(a_1)\frac{\Sigma\pm P_{m+1}(x)P_m(a_2)}{x-a_2} - P_{m+1}(a_2)\frac{\Sigma\pm P_{m+1}(x)P_m(a_1)}{x-a_1}\right\}$$
$$= \frac{2}{2m+1}\cdot\frac{2m+1.2m+3}{m+1.m+2}\sum_0^m\frac{2\nu+1}{2}P_\nu(x)\Sigma\pm P_{m+1}(a_1)P_\nu(a_2).$$

Ebenso ergiebt sich

$$\frac{\Sigma\pm P_{m+3}(x)P_{m+2}(a_1)P_{m+1}(a_2)P_m(a_3)}{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}$$
$$=\frac{2m+5}{m+3}\left\{P_{m+2}(a_1)\frac{\Sigma\pm P_{m+2}(x)P_{m+1}(a_2)P_m(a_3)}{(x-a_2)(x-a_3)}+P_{m+2}(a_2)\frac{\Sigma\pm P_{m+2}(x)P_{m+1}(a_3)P_m(a_1)}{(x-a_3)(x-a_1)}\right.$$
$$\left.+P_{m+2}(a_3)\frac{\Sigma\pm P_{m+2}(x)P_{m+1}(a_1)P_m(a_2)}{(x-a_1)(x-a_2)}\right\}$$
$$=\frac{2}{2m+1}\cdot\frac{2m+1.2m+3.2m+5}{m+1.m+2.m+3}\sum_0^m\frac{2\nu+1}{2}P_\nu(x)\Sigma\pm P_{m+2}(a_1)P_{m+1}(a_2)P_\nu(a_3).$$

Man kann auf diese Weise fortfahren, und es hat nicht die geringste Schwierigkeit, durch Induktion folgende allgemeine Formel nachzuweisen:

$$(5.)\qquad f(x) = \Sigma\pm P_{m+n}(x)P_{m+n-1}(a_1)\dots P_m(a_n)\times$$
$$= \frac{2}{2m+1}\cdot\frac{2m+1.2m+3\dots 2m+2n-1}{m+1.m+2\dots m+n}(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$$
$$\sum_0^m\frac{2\nu+1}{2}P_\nu(x)\Sigma\pm P_{m+n-1}(a_1)\dots P_{m+1}(a_{n-1})P_\nu(a_n).$$

Es ergiebt sich ferner unter Beibehaltung der frühern Bezeichnung

$$(6.)\qquad \begin{cases} f_1(x) = \Sigma\pm R_{m+n}(x)P_{m+n-1}(a_1)\dots P_m(a_n),\\ f_2(x) = \Sigma\pm Q_{m+n}(x)P_{m+n-1}(a_1)\dots P_m(a_n),\end{cases}$$

welche Determinanten durch Permutation der an den Funktionalzeichen befindlichen Indices zu bilden sind.

Setzt man zur Abkürzung

$$\Sigma \pm P_{m+n-1}(a_1) P_{m+n-2}(a_2) \dots P_m(a_n) = \mathfrak{A}_m,$$

so erhält man für den bei der Integration von x^{2m+n} begangenen Fehler $k_{2m+n}^{(m)}$, welcher mit dem in art. 3 bestimmten identisch sein mufs, in folgender Weise einen neuen Ausdruck. Da nämlich nach art. 1

$$\frac{k_{2m+n}^{(m)}}{u^{2m+n+1}} + \frac{k_{2m+n+1}^{(m)}}{u^{2m+n+2}} + \dots = \frac{f_1(u)}{f(u)}$$

ist, so folgt, dafs $k_{2m+n}^{(m)}$ die Gränze ist, welcher sich

$$u^{2m+n+1} \frac{Q_m(u) \dfrac{\partial f(x)}{\partial P_m(x)}}{P_{m+n}(u) \dfrac{\partial f(x)}{\partial P_{m+n}(x)}}$$

mit wachsendem u nähert. Man erhält

$$(7.) \quad k_{2m+n}^{(m)} = \frac{2}{2m+1} \cdot \frac{1.2 \dots m}{1.3 \dots 2m-1} \cdot \frac{1.2 \dots m+n}{1.3 \dots 2m+2n-1} \cdot \frac{\dfrac{\partial f(x)}{\partial P_m(x)}}{\dfrac{\partial f(x)}{\partial P_{m+n}(x)}}$$

$$= (-1)^n \frac{2}{2m+1} \cdot \frac{1.2 \dots m}{1.3 \dots 2m-1} \cdot \frac{1.2 \dots m+n}{1.3 \dots 2m+2n-1} \cdot \frac{\mathfrak{A}_{m+1}}{\mathfrak{A}_m}.$$

Bezeichnet man den Coefficienten von x^s in $P_s(x)$, nämlich $\dfrac{1.3 \dots 2s-1}{1.2 \dots s}$ durch γ_s, und setzt vorstehenden Ausdruck dem in art. 3 gefundenen gleich, so folgt:

$$\frac{A_{m+1}}{A_m} = \frac{2(-1)^n}{(2m+1)\gamma_m \gamma_{m+n}} \frac{\mathfrak{A}_{m+1}}{\mathfrak{A}_m},$$

mithin

$$\frac{A_m}{A_0} = \frac{(-1)^{mn} 2^m}{1.2 \dots 2m-1} \cdot \frac{1}{\gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_{m-1} \cdot \gamma_n \gamma_{n+1} \dots \gamma_{m+n-1}} \cdot \frac{\mathfrak{A}_m}{\mathfrak{A}_0}.$$

Es ist ferner $A_0 = 1$, und wie sich leicht findet

$$\mathfrak{A}_0 = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_{n-1} \Pi(a_1, a_2, \dots a_n),$$

folglich

$$(8.) \quad \mathfrak{A}_m = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}n(2m+n-1)} . 1.2 \dots m}{2^m} \gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_m \cdot \gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_{m+n-1} \Pi(a_1, a_2, \dots a_n) A_m.$$

Setzt man in diese Gleichung die Ausdrücke für $\mathfrak{A}_m$ und $1.2 \dots m A_m$ ein, indem man letztern aus art. 3 (8.) entnimmt, so folgt

$$\Sigma \pm P_{m+n-1}(a_1) \dots P_m(a_n)$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{1}{2}n(2m+n-1)}}{2^m} \gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_m \cdot \gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_{m+n-1} \Pi(a_1, a_2, \dots a_n)$$

$$\int_{-1}^{1(m)} \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_m [\Pi(x_1, x_2, \dots x_m)]^2 \partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m.$$

Dehnt man diese Formel auf $n+1$ Argumente $x, a_1, \dots a_n$ aus, so ergiebt sich

$$(9.)\qquad \Sigma \pm P_{m+n}(x) P_{m+n-1}(a_1) \dots P_m(a_n)$$
$$= \frac{(-1)^{\frac{1}{2}n(2m+n-1)}}{2^m} \gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_m \cdot \gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_{m+n} \Pi(a_1, \dots a_n, x)$$
$$\int_{-1}^{1(m)} y_1 y_2 \dots y_m (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_m)[\Pi(x_1, \dots x_m)]^2 \partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m,$$

wodurch der Zusammenhang zwischen den Formeln des gegenwärtigen und des vorigen art. dargelegt ist.

Ich werde jetzt noch einen dritten Ausdruck für $f(x)$ herleiten, der ebenfalls eigenthümlicher Natur ist. Integrirt man die Gleichung (1.) $m$mal hinter einander nach x von -1 bis x, ebenso $m$mal nach $a_1, a_2, \dots a_n$ von -1 bis a_1, -1 bis a_2, ... -1 bis a_n, und wendet dann in jedem Term der Determinante den *Jacobi*schen Satz

$$\int_{-1}^{x(m)} P_n(x) \partial x^m = (x^2-1)^m \frac{\Gamma(n-m+1)}{\Gamma(n+m+1)} \frac{\partial^m P_n(x)}{\partial x^m}$$

an, so erhält man

$$\int_{-1}^{x, a_1, \dots a_n (m(n+1))} f(x) (\partial x\, \partial a_1 \dots \partial a_n)^m$$
$$= \Sigma \pm \int_{-1}^{x(m)} P_{n+m}(x) \partial x^m \int_{-1}^{a_1 (m)} P_{n+m-1}(a_1) \partial a_1^m \dots \int_{-1}^{a_n (m)} P_m(a_n) \partial a_n^m$$
$$= \frac{\Gamma(1)\Gamma(2)\dots\Gamma(n+1)}{\Gamma(2m+1)\Gamma(2m+2)\dots\Gamma(2m+n)} [(x^2-1)(a_1^2-1)\dots(a_n^2-1)]^m$$
$$\Sigma \pm P_{n+m}^{(m)}(x) P_{n+m-1}^{(m)}(a_1) \dots P_m^{(m)}(a_n).$$

In dieser Determinante kann man aber zufolge eines bekannten Satzes alle Elemente auf ihren ersten Term reduciren. Schreibt man darauf die gemeinsamen Faktoren aller Elemente derselben Vertikalreihen heraus, so ergiebt sich vorstehendes

$$= c[(x^2-1)(a_1^2-1)\dots(a_n^2-1)]^m \Sigma \pm x^n a_1^{n-1} \dots a_n^0$$
$$= c[(x^2-1)(a_1^2-1)\dots(a_n^2-1)]^m \Pi(a_n, a_{n-1}, \dots a_1, x),$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$c = \frac{1}{[2^m \Gamma(m+1)]^{n+1}} \cdot \frac{(2m)_0 (2m+2)_1 (2m+4)_2 \dots (2m+2n)_n}{m_0 (m+1)_1 (m+2)_2 \dots (m+n)_n},$$

und μ_ν wie üblich den Coefficienten von x^ν in der Entwicklung von $(1+x)^\mu$ bezeichnet. Es ist demnach auch

$$(10.)\qquad \Sigma \pm P_{n+m}(x) P_{m+n-1}(a_1) \dots P_m(a_n)$$
$$= c \frac{\partial^{m(n+1)}}{(\partial x \partial a_1 \dots \partial a_n)^m} \{[(x^2-1)(a_1^2-1)\dots(a_n^2-1)]^m \Pi(a_n, a_{n-1}, \dots a_1, x)\},$$

oder wenn man

$$(11.)\quad \frac{\partial^{mn}}{(\partial a_1\,\partial a_2\ldots\partial a_n)^m}\{[(a_1^2-1)(a_2^2-1)\ldots(a_n^2-1)]^m\Pi(a_n, a_{n-1}, \ldots a_1, x)\} = V$$

setzt:

$$(12.)\quad \Sigma\pm P_{m+n}(x)P_{m+n-1}(a_1)\ldots P_m(a_n) = c\frac{\partial^m(x^2-1)^m V}{\partial x^m}.$$

Ist nun der Ausdruck V reell oder so beschaffen, dafs er durch Multiplication mit einer constanten Gröfse reell gemacht werden kann, so schliefst man aus dieser Gleichung nach bekannten Methoden, dafs zum Mindesten m Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ reell und zwischen den Gränzen -1 und $+1$ gelegen sein müssen. Sind also z. B. die gegebenen n Wurzeln $a_1, a_2, \ldots a_n$ reell und aufserhalb jener Gränzen belegen, so müssen die übrigen m Wurzeln echte Brüche sein. — Sind ferner alle Wurzeln der Gleichung $V=0$ reell, so sind es auch alle Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$, und die Anzahl der aufserhalb der Gränzen -1 und 1 liegenden Wurzeln ist in beiden dieselbe.

Hieraus ist es ersichtlich, dafs man gegenwärtiges Verfahren zur angenäherten Integration von $F(x)$ mit grofsem Vortheil z. B. dann wird anwenden können, wenn sich $F(x)$ für n bestimmte, aufserhalb des Integrationsintervalls, und für beliebig viele innerhalb desselben willkürlich vertheilte Werthe von x annähernd oder genau ermitteln läfst *).

---

*) Während die vorstehende Abhandlung des Herrn *Christoffel* bereits dem Druck übergeben war, kam der Redaktion dieser Zeitschrift eine von Herrn *C. Gustav Bauer* in München verfafste und als Habilitationsschrift besonders herausgegebene Abhandlung „Von den Integralen gewisser Differentialgleichungen, welche in der Theorie der Anziehung vorkommen" durch die Güte des Herrn Verfassers zu. Von den *Laplace*schen Kugelfunktionen ausgehend beschäftigt sich dieselbe mit den nämlichen Funktionen P, Q, R, welche in der *Christoffel*schen Arbeit eine so wesentliche Rolle spielen, und in einem Anhang enthält sie die Anwendung jener Funktionen auf die *Gaufs*ische mechanische Quadratur. Bei so naher Berührung des Gegenstandes der Untersuchung konnte es nicht fehlen, dafs die beiden gelehrten Herrn Verfasser, trotz der Verschiedenheit ihrer Ausgangspunkte und Methoden, doch in einigen ihrer Ergebnisse zusammentrafen. Zu diesen gehört die schöne in Gleichung (32.), pag. 68 enthalte Entwicklung der Funktionen R, welche indessen Herr *Christoffel* bereits in seiner 1856 hier erschienenen Inaugural-Dissertation „De motu permanenti electricitatis" pag. 53 veröffentlicht hat.

B.

6.

Zu den Doppeltangenten der Curven 4ter Ordnung.

(Von Herrn *O. Hesse* zu Heidelberg.)

In der Abhandlung „über die Doppeltangenten der Curven 4ter Ordnung" Bd. 49 liest man p. 324 und p. 326 die Sätze:

„Es giebt 1008 verschiedene Curven 3ter Ordnung, welche durch „die Berührungspunkte von 6 Doppeltangenten einer Curve 4ter Ordnung „hindurchgehen, unter denen nicht 3 Doppeltangenten enthalten sind, „deren Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt liegen."

„Es giebt 5040 verschiedene Curven 3ter Ordnung, welche durch „die Berührungspunkte von 6 Doppeltangenten einer Curve 4ter Ordnung „hindurchgehen. Durch die 12 Berührungspunkte dieser 6 Doppeltan„genten lassen sich 4 Paare Kegelschnitte legen. . . ."

Diese beiden Sätze widersprechen dem *Steiner*'schen Satze desselben Bandes p. 270 keineswegs, welcher also lautet:

„Unter den 28 Doppeltangenten einer Curve 4ten Grades giebt es, „im Allgemeinen, 6048 mal 6 solche, deren 12 Berührungspunkte zu„sammen in irgend einer eigentlichen, nicht in Theile zerfallenden, Curve „3ten Grades liegen."

Denn man erhält die von *Steiner* gefundene Zahl der genannten Curven 3ter Ordnung, wenn man die in den beiden ersten Sätzen hervorgehobenen Zahlen addirt. Diese Uebereinstimmung mag als eine neue Bestätigung der auf den verschiedensten Wegen gefundenen Resultate dienen.

Es ist aber wichtig die beiden Gattungen von 1008 und von 5040 Curven 3ter Ordnung von einander zu trennen wegen der Folgerungen, die sich aus ihnen ziehen lassen, wenn man die Lage der 6 Doppeltangenten näher in's Auge fafst, welche ihnen entsprechen.

Ich werde im Folgenden die Betrachtungen in Kürze andeuten, welche auf die genannten beiden Gattungen Curven 3ter Ordnung führen, um daraus neue Sätze über die Lage der Doppeltangenten der Curven 4ter Ordnung zu entwickeln.

Wenn man mit Δ die symmetrische Determinante bezeichnet:

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} \end{vmatrix}$$

in welchen $u_{\varkappa\lambda} = u_{\lambda\varkappa}$, so stellt unter der Voraussetzung, dafs die Componenten $u_{\varkappa\lambda}$ dieser Determinante lineare Ausdrücke seien der variabeln Coordinaten eines Punktes in der Ebene, die Gleichung:

$$\Delta = 0$$

eine beliebige Curve 4ter Ordnung dar.

Diese Gleichungsform der Curven 4ter Ordnung ist für die Untersuchung der Doppeltangenten dieser Curven von grofser Bedeutung. — Die wirkliche Zurückführung der Gleichung auf die genannte Form bleibt freilich ein schwieriges und bis jetzt noch nicht gelösetes Problem. — (Das entsprechende Problem bei den Curven 3ter Ordnung führt auf das der Wendepunkte und ist mit diesen zugleich gelöset Bd. 28 p. 89). Doch lassen sich schon aus der genannten Gleichungsform Schlüsse ziehen, die von geometrischem Interesse sind.

Setzt man nämlich:

$$a = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \alpha_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & \alpha_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & \alpha_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 \end{vmatrix} \quad c = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \gamma_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \gamma_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & \gamma_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & \gamma_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & 0 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \alpha_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & \alpha_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & \alpha_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & 0 \end{vmatrix}$$

so hat man die identische Gleichung:

$$\Delta U = ac - b^2,$$

in welcher U eine ganze homogene Function des 2ten Grades bedeutet, sowohl in Rücksicht auf die Gröfsen α als auf γ und u, Bd. 49 p. 251.

Aus der Form dieser identischen Gleichung ersieht man, dafs $a = 0$ die Gleichung einer Curve 3ter Ordnung ist, welche die gegebene Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ in jedem Schnittpunkte beider Curven zugleich berührt. Ebenso ist $U = 0$ die Gleichung eines Kegelschnittes, der von der Curve $a = 0$ in jedem Schnittpunkte beider Curven zugleich auch berührt wird, während $b = 0$ eine Curve 3ter Ordnung darstellt, welche durch alle jene Berührungspunkte hindurchgeht.

Dasselbe, was von der Curve $a=0$, gilt auch von der Curve 3ter Ordnung $c=0$.

Jede dieser Curven 3ter Ordnung $a=0$ und $c=0$ berührt also die gegebene Curve $\varDelta=0$ in 6 Punkten, und die Curve 3ter Ordnung $b=0$ geht durch diese 12 Berührungspunkte hindurch.

Die vier willkürlichen Constanten α, deren Verhältnisse in die Gleichung $a=0$ eingehen, lassen sich nun so bestimmen, dafs der Ausdruck a in drei lineare Factoren a_1 a_2 a_3 zerfällt, so dafs $a=a_1.a_2.a_3$. In dieser Voraussetzung werden $a_1=0$, $a_2=0$, $a_3=0$ die Gleichungen von drei Doppeltangenten der Curve 4ter Ordnung $\varDelta=0$, weil die in drei gerade Linien zerfallende Curve 3ter Ordnung $a=0$ nicht aufhört die gegebene Curve 4ter Ordnung $\varDelta=0$ in 6 Punkten zu berühren.

Bestimmt man auch die vier Constanten γ so, dafs c ebenfalls in drei lineare Factoren zerfällt $c=c_1.c_2.c_3$, so hat man 6 Doppeltangenten a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, c_3 der Curve 4ter Ordnung $\varDelta=0$, durch deren Berührungspunkte die Curve 3ter Ordnung $b=0$ hindurchgeht. Dieses ist eine von den 1008 Curven 3ter Ordnung, von denen der oben angegebene erste Satz handelt.

Da aber jede der Curven 3ter Ordnung $a=0$ und $c=0$ auch den Kegelschnitt $U=0$ in 3 verschiedenen Punkten berührt, so berühren die genannten 6 Doppeltangenten einzeln denselben Kegelschnitt, was auch aus der identischen Gleichung erhellet:

$$\varDelta U = a_1 a_2 a_3 c_1 c_2 c_3 - b^2.$$

Jeder dieser, durch die Berührungspunkte von 6 Doppeltangenten der Curve 4ter Ordnung $\varDelta=0$ gehenden, Curven $b=0$ entspricht also ein Kegelschnitt, den die 6 Doppeltangenten berühren. Daher hat man, gestützt auf den ersten oben angegebenen Satz, folgenden:

Unter den 28 Doppeltangenten einer Curve 4ter Ordnung giebt es, 1008 mal, 6 solcher Doppeltangenten, welche einen Kegelschnitt berühren.

Um zu der zweiten Gattung Curven 3ter Ordnung zu gelangen, welche durch die Berührungspunkte von 6 Doppeltangenten einer Curve 4ter Ordnung hindurchgehen, mufs man von einer anderen Gleichungsform der Curven 4ter Ordnung ausgehen.

Setzt man zu diesem Zwecke:

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix}$$

und läfst u_{11}, $u_{12} = u_{21}$, u_{22} beliebig gegebene Ausdrücke zweier Coordinaten respective der 1sten, 2ten und 3ten Ordnung bedeuten, so hat man die allgemeine Gleichung einer Curve 4ter Ordnung:

$$\Delta = 0.$$

— Die Zurückführung der vorigen Gleichungsform der Curven 4ter Ordnung auf diese ist Bd. 49 p. 305 kurz angedeutet worden. — Man hat nun die identische Gleichung Bd. 49 p. 305:

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \gamma_1 \\ u_{21} & u_{22} & \gamma_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 0 \end{vmatrix}^2$$

oder:

$$\Delta = ac - b^2,$$

wenn man setzt:

$$\alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2 = \gamma_1 = 1, \qquad \gamma_2 = m,$$

und:

$$-a = u_{11}, \qquad -b = u_{12} - u_{11}m, \qquad -c = u_{22} - 2u_{12}m + u_{11}m^2.$$

Die zuletzt angegebenen Ausdrücke bleiben respective von der 1sten, 2ten, 3ten Ordnung, wenn man m einen beliebigen linearen Ausdruck der Coordinaten bedeuten läfst. Ihre geometrische Bedeutung erhellet aus der zuletzt angegebenen identischen Gleichung. Es ist nämlich $a = 0$ die Gleichung einer Doppeltangente der Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$. $b = 0$ ist die Gleichung eines beliebigen Kegelschnittes, welcher durch die Berührungspunkte der genannten Doppeltangente hindurchgeht, und $c = 0$ ist eine Curve 3ter Ordnung, welche die Curve 4ter Ordnung in den übrigen 6 Punkten berührt, in welcher der Kegelschnitt die Curve 4ter Ordnung schneidet.

Die Gleichung $c = 0$ repräsentirt ein ganzes System Curven 3ter Ordnung, welche die Curve 4ter Ordnung $\Delta = 0$ in 6 verschiedenen Punkten berühren, weil den 3 in dem linearen Ausdrucke m enthaltenen Constanten beliebige Werthe zuertheilt werden können.

Verändert man nun m in den ebenfalls linearen Ausdruck m', so gehe b in b', c in c' über, und man hat wieder eine identische Gleichung:

$$\Delta = ac' - b'^2,$$

die eine gleiche Interpretation als die vorige zuläfst.

Zieht man aber diese identische Gleichung von der vorhergehenden ab, so erhält man die ebenfalls identische Gleichung:

$$0 = a(c-c')-(b+b')(b-b'),$$

aus welcher ersichtlich ist, dafs a ein Factor von $b+b'$ oder von $b-b'$ ist. Da es nun gleichgültig ist, welche von diesen Gröfsen das Produkt von a und einem anderen lineären Factor A ist, so wollen wir setzen $b-b'=aA$, wodurch aus der vorhergehenden Gleichung folgende identische Gleichung hervorgeht:

$$0 = (c-c')-A(b+b').$$

Diese Gleichung liefert den Beweis „dafs die beiden Curven 3ter Ordnung $c=0$, $c'=0$, von denen jede die Curve 4ter Ordnung $\Delta=0$ in 6 Punkten berührt, sich gegenseitig in 9 Punkten schneiden, wovon 6 in einem Kegelschnitt und die 3 übrigen in einer geraden Linie liegen."

Bezeichnet man den Ausdruck 3ter Ordnung $c-Ab$ mit d, so hat man nach der letzten identischen Gleichung:

$$d = c-Ab=c'+Ab';$$

daher:

$$d^2 = (c-Ab)(c'+Ab')$$

oder

$$cc'-d^2 = A(bc'-b'c+Abb'),$$

woraus endlich mit Berücksichtigung der früheren Gleichungen folgende identische Gleichung hervorgeht:

$$\Delta A^2 = cc'-d^2.$$

Aus dieser Gleichung ist ersichtlich, dafs die 12 Punkte, in welchen die beiden Curven 3ter Ordnung $c=0$ und $c'=0$ die Curve 4ter Ordnung $\Delta=0$ berühren, auf einer Curve 3ter Ordnung $d=0$ liegen.

Die Ausdrücke c und c' enthalten aber jeder 3 willkürliche Constanten, welche respective mit m und m' eingehen. Bestimmt man diese Constanten nun so, dafs eben so wohl c in das Produkt von drei linearen Factoren zerfällt, als c', so werden aus den beiden Curven $c=0$ und $c'=0$ 6 Doppeltangenten der Curve $\Delta=0$, durch deren Berührungspunkte eine Curve 3ter Ordnung $d=0$ hindurchgeht. Dieses ist aber gerade eine von den 5040 Curven dritter Ordnung, von denen der zweite oben angegebene Satz handelt. Da sich im Allgemeinen die Curven $c=0$ und $c'=0$ in

9 Punkten schneiden, von denen 6 in einem Kegelschnitt und die 3 anderen in einer geraden Linie liegen, so werden auch die 3 Doppeltangenten $c = 0$ die 3 Doppeltangenten $c' = 0$ in 9 solchen Punkten schneiden. Mit anderen Worten, die 6 Doppeltangenten bilden die Seiten eines *Pascal*'schen Sechseckes. Auf diese Weise entspricht jeder der 5040 Curven 3ter Ordnung ein *Pascal*'sches Sechseck. Man hat demnach den Satz:

Unter den 28 Doppeltangenten einer Curve 4ter Ordnung giebt es, 5040 mal, 6 solche Doppeltangenten, welche ein Pascal'sches Sechseck bilden.

Heidelberg, im December 1857.

7.

Démonstration géométrique de cette proposition, que toute fonction elliptique de première espèce peut être remplacée par deux fonctions elliptiques de seconde espèce, et Développement d'une formule relative à la rectification de l'hyperbole.

(Par M. *C. Küpper* à Trèves.)

I. **A** l'aide d'une construction géométrique de la substitution de ***Landen***, dont ***Jacobi*** a fait mention dans une lettre adressée à M. ***Hermite***, (vol. 32 pag. 178 de ce Journal) j'ai démontré ailleurs le théorème de ***Fugnano***; dans ce qui suit j'emploierai cette même construction, pour en déduire la proposition en question, ainsi qu'une formule pour l'arc de l'hyperbole.

Sur le diamètre d'un cercle soit pris un point fixe O (fig. 1); désignons par a, b les segments AO, BO, par p, p' les segments variables PO, $P'O$ d'une corde qui passe par O, par ω, ω' les angles PAB, $P'BA$, enfin par φ l'angle $P'OA$. On aura:

Fig. 1.

$$p+p' = (a+b)\sqrt{1-\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\sin\varphi^2},$$

$$p' = a\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin\omega'^2}.$$

Il est facile de s'assurer que

$$\frac{d\omega}{p} = \frac{d\omega'}{p'},$$

d'où l'on conclura:

$$(1.)\quad \frac{d\omega'}{p'} = \frac{d\omega+d\omega'}{p+p'} = \frac{d\varphi}{p+p'},$$

ce qui est la substitution de ***Landen***.

Mais cette équation peut s'écrire ainsi:

$$p'.d\varphi = (p'+p)d\omega',$$

ou

$$(p'+p)d\varphi+(p'-p)d\varphi = 2p'd\omega'+2p\,d\omega',$$

or

$$p.p' = a.b, \qquad p'-p = (a-b)\cos\varphi,$$

donc:

$$(p'+p)d\varphi + (a-b)\cos\varphi.d\varphi = 2p'.d\omega' + \frac{2ab}{p'}d\omega'.$$

En substituant pour $p'+p$ et p' leurs valeurs, on trouve par intégration:

$$(a+b)\int_0^{\varphi}\sqrt{1-\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\sin\varphi^2}.d\varphi + (a-b)\sin\varphi$$

$$= 2a\int_0^{\omega'}\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin\omega'^2}.d\omega' + 2b\int_0^{\omega'}\frac{d\omega'}{\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin\omega'^2}}.$$

Divisons par $a+b$, et posons

$$\frac{a-b}{a+b} = k, \qquad \frac{a^2-b^2}{a^2} = \frac{4k}{(1+k)^2} = k'^2,$$

il vient:

$$(2.) \qquad E(k,\varphi)+k\sin\varphi = (1+k)E(k',\omega')+(1-k)F(k',\omega').$$

L'équation (1.) donne:

$$(3.) \qquad F(k',\omega') = \frac{1+k}{2}F(k,\varphi).$$

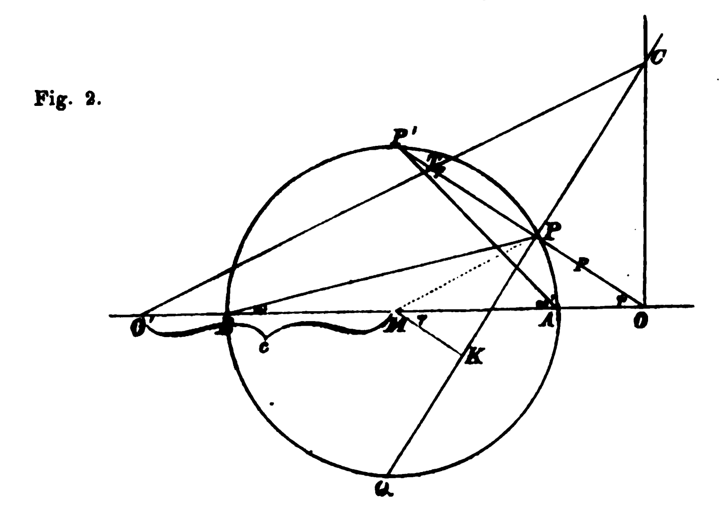
Donc, en remplaçant $F(k',\omega')$ dans (2.) par cette valeur, on a:

$$(4.) \qquad E(k,\varphi)+k\sin\varphi = (1+k)E(k',\omega')+\tfrac{1}{2}(1-k^2)F(k,\varphi).$$

II. En prenant (fig. 2.) O sur le prolongement de AB, et posant $AB=2a$, $OM=c$, $OA=c-a$, $OB=c+a$, $\angle MBP=\omega$, $\angle MAP'=\omega'$, $\angle AOP'=\psi$, $OP=p$, $OP'=p'$, on aura

$$p' = (c+a)\sqrt{1-\frac{4ac}{(c+a)^2}\sin\omega'^2},$$

Fig. 2.



et en y mettant k au lieu de $\frac{a}{c}$,

$$\frac{4ac}{(c+a)^2} = \frac{4k}{(1+k)^2} = k'^2,$$

$$p' = c(1+k)\sqrt{1-k'^2 \sin\omega'^2}.$$

On a encore

$$\frac{p'-p}{2} = a\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}\sin\psi^2} = c\sqrt{k^2-\sin\psi^2}.$$

Puis

$$\frac{p'+p}{2} = c.\cos\psi, \quad p.p' = c^2-a^2, \quad \psi = \omega'-\omega, \quad \operatorname{tg}\omega' : \operatorname{tg}\omega = c+a : c-a.$$

Et comme

$$\frac{d\omega'}{p'} = \frac{d\omega}{p}, \quad \frac{d\omega'-d\omega}{p'-p} = \frac{d\psi}{p'-p} = \frac{d\omega'}{p'},$$

il s'ensuit, que

$$\frac{p'-p}{2}d\psi + \frac{p'+p}{2}d\psi = p'\,d\omega' - p\,d\omega' = p'\,d\omega' - \frac{c^2-a^2}{p'}d\omega'.$$

De là, en intégrant de part et d'autre, on tire

$$(5.) \quad \int_0^\psi \sqrt{k^2-\sin\psi^2}.d\psi + \sin\psi = (1+k)E(k',\omega') - (1-k)F(k',\omega').$$

Les amplitudes ψ et ω' sont liées par l'équation

$$\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}(\omega'-\omega) = \frac{\operatorname{tg}\omega'-\operatorname{tg}\omega}{1+\operatorname{tg}\omega\operatorname{tg}\omega'} = \frac{a\sin 2\omega'}{c+a\cos 2\omega'} = \frac{\sin 2\omega'}{\frac{1}{k}+\cos 2\omega'}.$$

Transformons les fonctions $E(k',\omega')$, $F(k',\omega')$ à l'aide des formules (2, 3), et il résulte:

$$\int_0^\psi \sqrt{k^2-\sin\psi^2}\,d\psi = E(k,\varphi) - (1-k^2)F(k,\varphi) + k\sin\varphi - \sin\psi.$$

Mais à cause de

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin 2\omega'}{k+\cos 2\omega'}, \qquad \operatorname{tg}\psi = \frac{\sin 2\omega'}{\frac{1}{k}+\cos 2\omega'},$$

d'où

$$k\sin\varphi = \sin\psi,$$

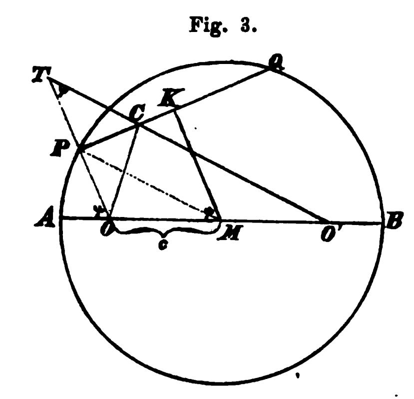
cette équation revient à:

$$(6.) \quad \int_0^\psi \sqrt{k^2-\sin\psi^2}\,d\psi = E(k,\varphi) - (1-k^2)F(k,\varphi).$$

Maintenant, pour avoir une expression de l'élément d'un arc d'Ellipse ou d'Hyperbole, je me rapporte à la description connue de ces coniques par

le côté d'un angle droit, dont le sommet parcourt la circonférence du cercle, décrit sur l'axe $AB = 2a$ comme diamètre, et dont l'autre côté passe constamment par le foyer de la conique.

Fig. 3.



Soit (fig. 2. et 3.) OPQ l'angle mobile, C le point de contact sur la conique, dont O, O' sont les foyers; du point M je mène à la tangente QP, qui est le prolongement de l'élément ds, la perpendiculaire $MK = r$, alors l'angle $KMA = \psi$ sera égal à l'angle que la normale au point C forme avec l'axe AB, l'angle $KMP = \varphi$ sera dans l'ellipse (fig. 3.) la moitié de l'angle OCO' formé par les rayons vecteurs du point C, et dans l'Hyperbole (fig. 2.) l'angle KMP sera le complément de la moitié de l'angle OCO'. Nommant c l'excentricité de la conique, le triangle OTO' (où $CT = CO$) donne entre les angles φ et ψ la relation:

$$\sin\varphi : \sin\psi = c : a.$$

Soit $C'K'$ ce que devient la projection CK du rayon CM sur la tangente, lorsque ψ devient $\psi + d\psi$, nous aurons évidemment

(fig. 3. dans l'ellipse) $\quad C'K' = CK - CC' + KK' = CK - ds + r.d\psi$, et

(fig. 2. dans l'hyperbole) $\quad C'K' = CK + CC' + KK' = CK + ds + r.d\psi$.

Mais $r = a\cos\varphi$, par conséquent la variation de la longueur CK sera donnée dans ces deux cas respectivement par

$$-ds + a.\cos\varphi.d\psi, \qquad \text{et} \qquad ds + a.\cos\varphi.d\psi.$$

En intégrant entre les limites 0 et ψ, on trouve donc pour l'ellipse

$$(7.) \qquad CK + s = a\int_0^{\psi}\cos\varphi.d\psi,$$

ou d'après la relation établie entre φ et ψ:

$$CK + s = a\int_0^{\psi}\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}\sin\psi^2}.d\psi,$$

ce qui démontre de nouveau le théorème de *Fagnano*.

Quant à l'hyperbole, on a également:

$$(8.) \qquad CK - s = a\int_0^{\psi}\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}\sin\psi^2}.d\psi = c\int_0^{\psi}\sqrt{k^2 - \sin\psi^2}.d\psi.$$

Pour la transformation de cette intégrale on peut recourir à une quelconque

des formules (5.) ou (6.). En prenant la dernière on obtient:

$$(9.)\qquad CK-s = c.E(k,\varphi)-c(1-k^2)F(k,\varphi).$$

Il est d'ailleurs très facile d'établir directement cette formule, car il ne s'agit que d'exprimer en fonction de φ la valeur:

$$CK-s = a\int_0^{\psi}\cos\varphi\,.\,d\psi = a\int_0^{\varphi}\cos\varphi\cdot\frac{d\psi}{d\varphi}\cdot d\varphi.$$

Or, $\sin\varphi:\sin\psi = c:a$, donc $\frac{d\psi}{d\varphi}=\frac{a}{c}\cdot\frac{\cos\varphi}{\cos\psi}$, et

$$a.\cos\varphi\frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{a^2.\cos\varphi^2}{c.\cos\psi}.$$

Remplaçons $a^2.\cos\varphi^2$ par

$$a^2-c^2\sin\psi^2 = a^2-c^2+c^2.\cos\psi^2;$$

il vient:

$$a.\cos\varphi\frac{d\psi}{d\varphi} = c.\cos\psi-\frac{c^2-a^2}{c}\cdot\frac{1}{\cos\psi} = c.\cos\psi-c(1-k^2)\frac{1}{\cos\psi}.$$

Or

$$\cos\psi = \sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}\sin\varphi^2} = \sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}.$$

Donc nous sommes revenu à l'équation (9.).

Trèves, 16 Mars 1857.

8.

Die Krümmungslinien der Wellenfläche zweiaxiger Krystalle, Zusatz zu dem Aufsatz im Band LIV dieses Journals.

(Von Herrn *P. Zech* in Stuttgart.)

Der Verfasser der Abhandlung über die Wellenfläche zweiaxiger Krystalle (Band LIV dieses Journals) hat in Nummer 11 derselben und zwar in den Worten: „oder die Tangenten an die Berührungskurve der Fläche F mit der Wellenfläche" etwas nicht Bewiesenes behauptet und wurde dadurch zu unrichtigen Folgerungen geführt. Er nimmt daher alles in Nummer 11 Gesagte hiermit zurück. Zugleich bemerkt er, dafs in Nummer 9 zweimal steht, „die Erzeugenden der Fläche G liegen *in* den Normalebenen der Kegel K_2", statt *parallel* den Normalebenen.

Stuttgart, Februar 1858.



9.

Zur Theorie der parallelen Curven.

(Von Herrn *R. Hoppe.*)

Je zwei parallele Curven haben eine gemeinschaftliche Evolute, und umgekehrt sind alle Evolventen einer und derselben Curve einander parallel. Infolge dieses Umstandes geht aus dem allgemeinen analytischen Ausdruck der Evoluten einer Curve sehr einfach der ihrer Parallelen hervor.

Es sei (um die angedeutete Uebertragung auszuführen) s der Bogen, ϱ der Krümmungsradius, ϑ' die Torsion einer Curve, l, m, n die Cosinus der Richtungswinkel ihrer Osculationsebene in Bezug auf ein rechtwinkliges System der xyz; und es mögen die diesen Zeichen beigesetzten Accente Differentialquotienten nach dem Bogen *derselben* Curve ausdrücken, auf welche die Zeichen sich beziehen. Ferner sollen die Zeichen ohne Index zur Evolute einer Curve, die gleichnamigen mit dem Index 1 zur Curve selbst gehören, so dafs der Punkt $x_1 y_1 z_1$ auf der Tangente im Punkte xyz liegt. Dann ist, wie ich in *Grunert's* Archiv f. Math. u. Phys. Bd. 25, H. 2 gezeigt habe, folgendes der Ausdruck der Evoluten in Elementen der Evolvente:

$$x = x_1 + \varrho_1^2 x_1'' - \varrho_1 l_1 \operatorname{tg}(\vartheta_1 + c)$$
$$y = y_1 + \varrho_1^2 y_1'' - \varrho_1 m_1 \operatorname{tg}(\vartheta_1 + c)$$
$$z = z_1 + \varrho_1^2 z_1'' - \varrho_1 n_1 \operatorname{tg}(\vartheta_1 + c)$$

wo die verschiedenen Werthe der Constanten c den verschiedenen Evoluten entsprechen, und die Gröfse

$$\vartheta_1 = \int \vartheta_1' \partial s_1$$

um sie geometrisch zu bestimmen, den Bogen ausdrückt, welchen der eine Endpunkt einer Geraden $= 1$ beschreibt, die bei variirendem s_1 senkrecht auf der Osculationsebene bleibt, während der andere Endpunkt fest ist.

Der Abstand der Punkte xyz und $x_1 y_1 z_1$ ist den aufgestellten Gleichungen zufolge

$$= \pm \frac{\varrho_1}{\cos(\vartheta_1 + c)}.$$

Nimmt man nun auf der Verbindungslinie beider Punkte, d. i. auf der Tangente der Evolute, in constanter Entfernung $= a$ von $x_1 y_1 z_1$ einen Punkt

$x_2 y_2 z_2$, so sind die geometrischen Oerter der zwei letztern parallele Curven, und man hat wegen der Eigenschaft gerader Linien

$$\frac{x_2 - x_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y - y_1} = \frac{z_2 - z_1}{z - z_1} = \pm \frac{a}{\varrho_1} \cos(\vartheta_1 + c).$$

Das Doppelzeichen der letzten Gröfse kann man ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit weglassen, weil es durch die willkürliche Constante c mit vertreten wird. Demnach ist

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + a\varrho_1 x_1'' \cos(\vartheta_1 + c) - a l_1 \sin(\vartheta_1 + c) \\ y_2 &= y_1 + a\varrho_1 y_1'' \cos(\vartheta_1 + c) - a m_1 \sin(\vartheta_1 + c) \\ z_2 &= z_1 + a\varrho_1 z_1'' \cos(\vartheta_1 + c) - a n_1 \sin(\vartheta_1 + c) \end{aligned}$$

der Ausdruck einer beliebigen Parallelen mit der Curve $x_1 y_1 z_1$, welcher durch seine zwei willkürlichen Constanten a und c seine vollständige Allgemeinheit anzeigt.

Berlin, den 30. August 1857.

10.

Theorie der homogenen Functionen dritten Grades von drei Veränderlichen.

(Von Herrn *S. Aronhold.*)

Der Verfasser dieser Abhandlung hatte die Absicht, ehe er die Theorie der homogenen Functionen dritter Ordnung von drei Veränderlichen der Oeffentlichkeit übergiebt, eine ganz allgemeine Theorie der homogenen Functionen auf Grund einer Schrift *), welche er der Königsberger Universität im Jahre 1851 überreicht hat, zu bearbeiten, allein Berufsgeschäfte, welche seine ganze Thätigkeit für die angewandte Mathematik in Anspruch nahmen, und noch fortdauern, hinderten ihn daran.

Um nun seinen Antheil an der Entwicklung der neueren Algebra nicht gänzlich aufzugeben, erlaubt sich der Verfasser seine Untersuchungen so vorzulegen, wie er sie in einer bereits ältern Bearbeitung besitzt, und wie sie im Grunde auch entstanden sind, und bittet um Entschuldigung wenn Weitläuftigkeiten dadurch entstehen mufsten, dafs der specielle Fall der allgemeinen Theorie vorangeht, und insbesondere, dafs eine allgemeine Theorie der Invarianten diesen Entwicklungen nicht vorausgehen konnte.

§. 1.

In den vorliegenden Untersuchungen werden folgende Bezeichnungen und Benennungen gebraucht werden:

Sind

$$x_1,\quad x_2,\quad x_3;\qquad u_1,\quad u_2,\quad u_3$$

zwei Systeme von *ursprünglichen* Variabeln und

$$X_1,\quad X_2,\quad X_3;\qquad U_1,\quad U_2,\quad U_3$$

zwei entsprechende Systeme von *neuen* Variabeln, welche in der gegenseitigen Beziehung stehen, dafs

$$(1.)\quad \begin{cases} x_1 = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 \\ x_2 = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 \\ x_3 = \gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + \gamma_3 X_3 \end{cases} \qquad (2.)\quad \begin{cases} U_1 = \alpha_1 u_1 + \beta_1 u_2 + \gamma_1 u_3 \\ U_2 = \alpha_2 u_1 + \beta_2 u_2 + \gamma_2 u_3 \\ U_3 = \alpha_3 u_1 + \beta_3 u_2 + \gamma_3 u_3 \end{cases}$$

---

*) „Ueber ein neues algebraisches Princip zur Behandlung der Transformationsprobleme homogener Functionen, vermittelst linearer Substitutionen".

ist, so soll 1) eine ***ursprüngliche Substitution*** und 2) die ***transponirte Substitution*** genannt werden.

Die Transposition eines linearen Substitutionssystems, welche darin besteht, dafs man einerseits die gleichvielten Horizontal- und Verticalreihen, andererseits die ursprünglichen und neuen Variabeln mit einander vertauscht, ist zuerst von ***Gaufs*** benutzt worden, nur schreibt derselbe beide Systeme mit ***denselben*** Variabeln, was für die vorliegenden Untersuchungen nicht zweckmäfsig sein würde.

Bezeichnet man die gemeinschaftliche Determinante beider Substitutionen durch:

$$r = \Sigma \pm \alpha_1 \beta_2 \gamma_3,$$

ferner durch

$$f(x_1, x_2, x_3) \quad \text{und} \quad f'(X_1, X_2, X_3)$$

zwei homogene Funktionen, welche durch die ursprüngliche Substitution in einander übergehen, so soll:

I) ***Invariante,*** diejenige Verbindung Δ aus den Coefficienten von f genannt werden, welche zu der entsprechenden aus den Coefficienten von f' gebildeten Δ' in der Beziehung

$$\Delta' = r^\lambda . \Delta$$

steht.

II) ***Covariante,*** diejenige Function φ der Coefficienten von f und der Variabeln x_1, x_2, x_3, welche, unter Anwendung der ***ursprünglichen*** Substitution (1.), zu der entsprechenden, aus den Coefficienten von f' und ihren Variabeln X_1, X_2, X_3 gebildeten Function φ' in der Beziehung

$$\varphi'(X_1, X_2, X_3) = r^\lambda . \varphi(x_1, x_2, x_3)$$

steht.

III) ***Zugehörige Form,*** diejenige Function Γ der Coefficienten von f und der Variabeln u_1, u_2, u_3, welche, unter Anwendung der ***transponirten*** Substitution (2.), zu der entsprechenden aus den Coefficienten von f' und den Variabeln U_1, U_2, U_3 gebildeten Function Γ' in der Beziehung

$$\Gamma'(U_1, U_2, U_3) = r^\lambda . \Gamma(u_1, u_2, u_3)$$

steht.

IV) ***Zwischenform,*** diejenige Function Θ der Coefficienten von f, welche gleichzeitig eine Function der Variabeln x_1, x_2, x_3 und u_1, u_2, u_3 ist, und unter Anwendung sowohl der ***ursprünglichen*** als der ***transponirten*** Substitution, zu der entsprechenden aus den Coefficienten von f' und den

beiderseitigen Variabeln X_1, X_2, X_3 und U_1, U_2, U_3 gebildeten Function Θ' in der Beziehung

$$\Theta'(U_1, U_2, U_3; X_1, X_2, X_3) = r^\lambda \Theta(u_1, u_2, u_3; x_1, x_2, x_3)$$

steht.

Die Benennungen (I) und (II) sind von Herrn *Sylvester* statt der älteren „Formendeterminante" und „Functionaldeterminante" in Vorschlag gebracht worden. Die Benennung (III) gebrauchte zuerst *Gaufs*. Die 4te Klasse ist bisher als eine besondere Klasse nicht beachtet worden. Die ganz besondere Wichtigkeit derselben wird aber aus dem Folgenden ersichtlich werden und ihre Bezeichnungsweise zweckmäfsig erscheinen, weil sie den Uebergang von (II) zu (III) bildet.

§. 2.

Die Betrachtung der vorstehenden 4 Functionenklassen mufs man sogleich auf ein System von homogenen Functionen ausdehnen, d. h. man mufs ein System gegebener homogener Functionen von denselben Variabeln voraussetzen, welche durch ein und dieselbe Substitution gleichzeitig in ein System entsprechender Functionen, der Reihe nach von denselben Ordnungen transformirt werden sollen, und die 4 Functionenklassen aus den gesammten Coefficienten des Systems herstellen. Ich will daher in diesem Falle die Invarianten, Covarianten, zugehörigen Formen und Zwischenformen, so oft Unterscheidungen nöthig werden, *simultane* Invarianten, Covarianten, zugehörige Formen und Zwischenformen nennen, so dafs die gewöhnlichen Determinanten simultane Invarianten für ein System *linearer* homogener Functionen sind und die erste Gattung bilden. Die nächste Gattung von Systemen erhält man, wenn man von den gegebenen homogenen Functionen nur *eine* die erste Ordnung überschreiten läfst, und der erste specielle Fall hiervon, nämlich die Zusammenstellung einer homogenen Function beliebiger Ordnung

$$f(x_1, x_2, x_3)$$

mit nur *einer* linearen

$$U = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3,$$

in welcher u_1, u_2, u_3 die Coefficienten sind, giebt einen sehr einfachen und charakteristischen Uebergang der 4 Functionenklassen in einander. Es gilt nämlich der folgende Satz:

Jede simultane Invariante der beiden Functionen f und U ist eine zugehörige Form für f, und jede simultane Covariante von f und U ist eine Zwischenform für f.

Der Beweis ergiebt sich sofort, wenn man die ursprüngliche Substitution (§. 1, 1) auf U anwendet, da dann, wie leicht ersichtlich ist, die Coefficienten der transformirten Form U' dieselben linearen Ausdrücke werden, welche die transponirte Substitution (§. 1, 2) bilden, d. h.

$$U' = U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3$$

wird. Bezeichnet man durch Γ eine simultane Invariante und durch Θ eine simultane Covariante für f und U, so genügen diese daher den Bedingungen:

$$\Gamma'(U_1, U_2, U_3) = r^{\lambda}\Gamma(u_1, u_2, u_3), \qquad \Theta'(U_1, U_2, U_3) = r^{\lambda}\Theta(u_1, u_2, u_3)$$

und werden dadurch respective zugehörige Form und Zwischenform für f.

Die Covarianten lassen sich aber auch als zugehörige Formen darstellen, wenn man beachtet, dafs, vermöge des Charakters der transponirten Substitution, die letztere durch nochmalige Transposition wieder die ursprüngliche Substitution wird, wenn man nur bei der zweiten Transposition wieder die ursprünglichen Variabeln gebraucht. Es folgt daher:

1) dafs die zugehörigen Formen der zugehörigen Formen Covarianten der ursprünglichen sind;

2) dafs die Covarianten der Covarianten Functionen derselben Art bleiben;

3) dafs die zugehörigen Formen der Covarianten und die Covarianten der zugehörigen Formen für die ursprüngliche Function zugehörige Formen sind;

4) dafs die Invarianten sowohl der Covarianten als der zugehörigen Formen zugleich Invarianten der ursprünglichen Formen sind;

5) dafs die lineare Function

$$U = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3$$

für alle homogenen Functionen derselben Variabeln gemeinschaftliche Zwischenform ist.

In Bezug auf (5.) wäre noch zu bemerken, dafs, weil

$$U' = U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3$$

vermöge (§. 1, 1) und (§. 1, 2) wird, $\lambda = 0$ d. h.

$$U' = r^0 . U$$

ist.

Ich setze nicht voraus, dafs die 4 Functionenklassen *ganze* Functionen sein müssen. Es wird im Gegentheil für rein algebraische Untersuchungen nothwendig, sowohl gebrochene als irrationale Functionen dieser Art zu unter-

suchen. Wenn man sich aber die Aufgabe stellt, die einfachsten derselben zu finden, aus welchen die übrigen sich zusammensetzen lassen, so wird man diese aus den rationalen und ganzen Functionen entnehmen müssen, für welche übrigens der Exponent λ in r^λ immer eine ganze positive Zahl sein mufs.

§. 3.

Es seien

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = \Sigma a_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda$$
$$f_2(x_1, x_2, x_3) = \Sigma b_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda$$
$$f_3(x_1, x_2, x_3) = \Sigma c_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda$$

drei homogene Functionen der zweiten Ordnung von den Variabeln x_1, x_2, x_3, und

$$a_{\varkappa\lambda} = a_{\lambda\varkappa}, \qquad b_{\varkappa\lambda} = b_{\lambda\varkappa}, \qquad c_{\varkappa\lambda} = c_{\lambda\varkappa},$$

so kann man, wie bekannt, für jede Function einzeln eine Invariante und eine zugehörige Form bilden, nämlich z. B. für die erste die Determinante:

$$(1.) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33}$$

als Invariante, und

$$(2.) \qquad \Gamma = \begin{Bmatrix} (a_{22}a_{33} - a_{23}^2)u_1^2 + (a_{33}a_{11} - a_{13}^2)u_2^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)u_3^2 \\ +2(a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23})u_2u_3 + 2(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})u_1u_3 \\ +2(a_{13}a_{23} - a_{12}a_{33})u_1u_2 \end{Bmatrix}$$

als zugehörige Form, und zwar ist letztere in Bezug auf die Variabeln von der zweiten Ordnung und ihre Coefficienten sind die partiellen Determinanten des Systems (1.).

Wir werden aber in der Folge auch die *simultanen* Invarianten und zugehörigen Formen für alle drei Functionen f_1, f_2, f_3 gebrauchen, und wollen daher alle, sowohl die vorstehenden (1.) und (2.) als die simultanen, aus einer einzigen Quelle ableiten, welche einerseits für alle Functionen gerader Ordnung benutzt werden kann und andrerseits einen Algorithmus liefert, der zur Ausführung einer Reihe von Darstellungen für die homogenen Functionen der dritten Ordnung unentbehrlich ist.

Theorem I.

Wenn man das Quadrat der Determinante

$$(3.)\quad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \Sigma \pm u_1 v_2 w_3$$

bildet, in welcher die Elemente willkürliche Gröfsen sind, und statt der Potenzen und Producte zweiter Ordnung:

$$u_\varkappa u_\lambda, \quad v_\varkappa v_\lambda, \quad w_\varkappa w_\lambda$$

die entsprechenden Coefficienten:

$$a_{\varkappa\lambda}, \quad b_{\varkappa\lambda}, \quad c_{\varkappa\lambda}$$

der drei homogenen Functionen f_1, f_2, f_3 substituirt, so erhält man eine Verbindung:

$$(a,\ b,\ c),$$

welche eine simultane Invariante der drei homogenen Functionen zweiter Ordnung ist.

Beweis.

Bezeichnet man die transformirten Formen von f_1, f_2, f_3 durch:

$$f_1'(X_1, X_2, X_3) = \Sigma a'_{\varkappa\lambda} X_\varkappa X_\lambda$$
$$f_2'(X_1, X_2, X_3) = \Sigma b'_{\varkappa\lambda} X_\varkappa X_\lambda$$
$$f_3'(X_1, X_2, X_3) = \Sigma c'_{\varkappa\lambda} X_\varkappa X_\lambda$$

so kann man zu den Coefficienten

$$a'_{\varkappa\lambda}, \quad b'_{\varkappa\lambda}, \quad c'_{\varkappa\lambda}$$

dadurch gelangen, dafs man zuerst die drei linearen Functionen

$$(4.)\quad \begin{cases} u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 \\ v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 \\ w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 \end{cases}$$

durch die ursprüngliche Substitution transformirt, die erhaltenen transformirten Formen quadrirt und dann in denselben die symbolische Substitution

$$(\alpha.)\quad u_\varkappa u_\lambda = a_{\varkappa\lambda}, \quad v_\varkappa v_\lambda = b_{\varkappa\lambda}, \quad w_\varkappa w_\lambda = c_{\varkappa\lambda}$$

ausführt. Nimmt man an, dafs die transformirten Formen von (4.) die folgenden sind:

$$(5.)\quad \begin{cases} U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3 \\ V_1 X_1 + V_2 X_2 + V_3 X_3 \\ W_1 X_1 + W_2 X_2 + W_3 X_3, \end{cases}$$

so werden mit $(\alpha.)$ auch die symbolischen Gleichungen

$$(\beta.) \qquad U_\varkappa U_\lambda = a'_{\varkappa\lambda}, \qquad V_\varkappa V_\lambda = b'_{\varkappa\lambda}, \qquad W_\varkappa W_\lambda = c'_{\varkappa\lambda}$$

gelten. Nach einem bekannten Determinantensatz ist aber

$$\Sigma \pm U_1 V_2 W_3 = r . \Sigma \pm u_1 v_2 w_3,$$

also auch

$$(\Sigma \pm U_1 V_2 W_3)^2 = r^2 . (\Sigma \pm u_1 v_2 w_3)^2;$$

substituirt man rechts die Werthe $(\alpha.)$, links die Werthe $(\beta.)$, so entsteht daher in Folge der Definition der Verbindung (a, b, c):

$$(6.) \qquad (a', b', c') = r^2 (a, b, c) \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Ich gehe nun zuvörderst zur Bildung von (a, b, c) über, welches auf den oben erwähnten Algorithmus führt. Es ist

$$(\Sigma \pm u_1 v_2 w_3)^2 = \{u_1(v_2 w_3 - v_3 w_2) + u_2(v_3 w_1 - v_1 w_3) + u_3(v_1 w_2 - v_2 w_1)\}^2$$

und mit Anwendung von $(\alpha.)$:

$$\begin{aligned}(v_2 w_3 - v_3 w_2)^2 &= v_2^2 w_3^2 + v_3^2 w_2^2 - 2 v_2 v_3 w_2 w_3 \\ &= b_{22} c_{33} + b_{33} c_{22} - 2 b_{23} c_{23} \\ (v_2 w_3 - v_3 w_2)(v_3 w_1 - v_1 w_3) &= v_2 v_3 w_1 w_3 + v_1 v_3 w_2 w_3 - v_3^2 w_1 w_2 - w_3^2 v_1 v_2 \\ &= b_{23} c_{13} + b_{13} c_{23} - b_{33} c_{12} - c_{33} b_{12}.\end{aligned}$$

Da sich die übrigen Potenzen und Producte durch Vertauschung der Indices ergeben, so kann man zunächst das Resultat der Substitution $(\alpha.)$ für die Potenzen und Producte $v_\varkappa v_\lambda$, $w_\varkappa w_\lambda$ allein angeben. Bezeichnet man dasselbe durch:

$$(7.) \qquad \Sigma u_\varkappa u_\lambda (b, c)^{\varkappa\lambda},$$

so ist vollständig:

$$(8.) \begin{cases} (b, c)^{11} = (v_2 w_3 - v_3 w_2)^2 = b_{22} c_{33} + b_{33} c_{22} - 2 b_{23} c_{23} \\ (b, c)^{22} = (v_3 w_1 - v_1 w_3)^2 = b_{33} c_{11} + b_{11} c_{33} - 2 b_{13} c_{13} \\ (b, c)^{33} = (v_1 w_2 - v_2 w_1)^2 = b_{11} c_{22} + b_{22} c_{11} - 2 b_{12} c_{12} \\ (b, c)^{23} = (v_2 w_3 - v_3 w_2)(v_3 w_1 - v_1 w_3) = b_{12} c_{13} + b_{13} c_{12} - b_{11} c_{23} - b_{23} c_{11} \\ (b, c)^{13} = (v_2 w_3 - v_3 w_2)(v_1 w_2 - v_2 w_1) = b_{23} c_{12} + b_{12} c_{23} - b_{22} c_{13} - b_{13} c_{22} \\ (b, c)^{12} = (v_3 w_1 - v_1 w_3)(v_1 w_2 - v_2 w_1) = b_{13} c_{23} + b_{23} c_{13} - b_{33} c_{12} - b_{12} c_{33} \end{cases}$$

und dieses ist das in der Folge häufig zu benutzende System. Setzt man demnach noch $u_\varkappa u_\lambda = a_{\varkappa\lambda}$, so folgt aus (7.):

$$(9.) \qquad (a, b, c) = \Sigma a_{\varkappa\lambda} (b, c)^{\varkappa\lambda}$$

in vollständig ausgerechneter Form.

Die Invariante (a, b, c) ist aber in Bezug auf die 3 Systeme $a_{\varkappa\lambda}$, $b_{\varkappa\lambda}$, $c_{\varkappa\lambda}$ symmetrisch; denn die Determinante (3.) selbst, aus welcher sie entstanden ist, bleibt bis auf das Vorzeichen unverändert, wenn man die Systeme $u_\varkappa$, $v_\varkappa$, $w_\varkappa$ mit einander vertauscht, und ihr *Quadrat* läfst auch das Vorzeichen ungeändert. Es ist also

$$(10.)\quad \begin{cases} \Sigma a_{\varkappa\lambda}(b, c)^{\varkappa\lambda} = \Sigma b_{\varkappa\lambda}(a, c)^{\varkappa\lambda} = \Sigma c_{\varkappa\lambda}(a, b)^{\varkappa\lambda} = \\ \Sigma a_{\varkappa\lambda}(c, b)^{\varkappa\lambda} = \Sigma b_{\varkappa\lambda}(c, a)^{\varkappa\lambda} = \Sigma c_{\varkappa\lambda}(b, a)^{\varkappa\lambda}, \end{cases}$$

weil wegen (8.) auch die partiellen Invarianten $(b, c)^{\varkappa\lambda}$ durch Vertauschung der Systeme $b_{\varkappa\lambda}$ und $c_{\varkappa\lambda}$ sich nicht ändern. Durch Specialisirung, indem man von den Systemen $a_{\varkappa\lambda}$, $b_{\varkappa\lambda}$, $c_{\varkappa\lambda}$ entweder je zwei oder alle drei einander gleich setzt, erhält man hiernach *10 von einander verschiedene Invarianten,* nämlich:

$$(11.)\quad \begin{cases} \text{drei wie } (a, a, a) = \Sigma a_{\varkappa\lambda}(a, a)^{\varkappa\lambda} \\ \text{sechs wie } (a, b, b) = \Sigma a_{\varkappa\lambda}(b, b)^{\varkappa\lambda} = \Sigma b_{\varkappa\lambda}(a, b)^{\varkappa\lambda} \\ \text{und eine } (a, b, c) = \Sigma a_{\varkappa\lambda}(b, c)^{\varkappa\lambda}. \end{cases}$$

Die speciellste derselben

$$(a, a, a) = \Sigma a_{\varkappa\lambda}(a, a)^{\varkappa\lambda}$$

ist aber nichts anderes, als die bekannte Invariante Δ (1.) der homogenen Function zweiten Grades von drei Veränderlichen, jedoch multiplicirt mit dem Factor 6, denn setzt man in (8.):

$$b_{\varkappa\lambda} = a_{\varkappa\lambda}, \qquad c_{\varkappa\lambda} = a_{\varkappa\lambda},$$

so entsteht:

$$\begin{aligned} (a, a)^{11} &= 2(a_{22}a_{33} - a_{23}^2) \\ (a, a)^{23} &= 2(a_{13}a_{12} - a_{23}a_{11}) \\ &\text{u. s. w.,} \end{aligned}$$

welche Ausdrücke die doppelten partiellen Determinanten des Systems (1.) sind. Man hat daher, wie bekannt:

$$\begin{aligned} \Delta &= \tfrac{1}{6}(a_{11}(a, a)^{11} + a_{12}(a, a)^{12} + a_{13}(a, a)^{13}) \\ \Delta &= \tfrac{1}{6}(a_{12}(a, a)^{12} + a_{22}(a, a)^{22} + a_{23}(a, a)^{23}) \\ \Delta &= \tfrac{1}{6}(a_{13}(a, a)^{13} + a_{23}(a, a)^{23} + a_{33}(a, a)^{33}), \end{aligned}$$

also durch Addition:

$$(12.)\quad 6\Delta = \Sigma a_{\varkappa\lambda}(a, a)^{\varkappa\lambda} = (a, a, a).$$

Die vorstehende Definition giebt ferner auch die unter (2.) bezeichnete zu-

gehörige Form, nämlich:

$$(13.)\qquad \Gamma = \tfrac{1}{2}\Sigma u_\varkappa u_\lambda (a,a)^{\varkappa\lambda}$$

und überdies *drei simultane zugehörige Formen* wie

$$\Sigma u_\varkappa u_\lambda (a,b)^{\varkappa\lambda},$$

welche den Gleichungen (10.) nämlich:

$$(14.)\qquad \begin{cases} \Sigma u_\varkappa u_\lambda (a,b)^{\varkappa\lambda} = \Sigma u_\varkappa u_\lambda (b,a)^{\varkappa\lambda} = \Sigma a_{\varkappa\lambda}(uu,b)^{\varkappa\lambda} \\ = \Sigma a_{\varkappa\lambda}(b,uu)^{\varkappa\lambda} = \Sigma b_{\varkappa\lambda}(a,uu)^{\varkappa\lambda} = \Sigma b_{\varkappa\lambda}(uu,a)^{\varkappa\lambda} \end{cases}$$

genügen.

Der Beweis hierfür folgt aus der §. 2 entwickelten Eigenschaft der zugehörigen Formen, da

$$(15.)\qquad \Sigma U_\varkappa U_\lambda (a',b')^{\varkappa\lambda} = r^2.\Sigma u_\varkappa u_\lambda (a,b)^{\varkappa\lambda}$$

ist.

§. 4.

Mit Hülfe der vorstehenden 10 Invarianten und 6 zugehörigen Formen, kann man fast alle Fragen beantworten, welche die Theorie der ternären quadratischen Formen algebraisch darbietet, andrerseits bilden sie die Basis für die cubischen Formen, und nur insofern werde ich sie hier weiter benutzen. Ehe ich jedoch darauf eingehe, ist es wesentlich die Frage zu beantworten, wie weit die vorstehende Theorie verallgemeinert werden kann. In der That kann man sie wörtlich auf homogene Functionen von beliebig vielen Variabeln und beliebiger Ordnung übertragen, indem man statt der Determinante (§. 3, 3) eine Determinante mit ebensovielen Elementen zu Grunde legt, als das Quadrat der Anzahl der Veränderlichen beträgt, und diese auf eine Potenz erhebt, welche der Ordnung der homogenen Function gleich ist; indessen ist hier ein wesentlicher Unterschied zwischen den Functionen gerader und ungerader Ordnung zu machen, man erhält zwar in beiden Fällen simultane Invarianten, will man aber daraus eine Invariante für eine *einzelne* Function ableiten, wie im Vorstehenden

$$\Delta = \tfrac{1}{6}\Sigma(a,a)^{\varkappa\lambda} a_{\varkappa\lambda},$$

so findet man, dafs durch Gleichsetzung der einzelnen Coefficientensysteme, wie $a_{\varkappa\lambda} = b_{\varkappa\lambda} = c_{\varkappa\lambda}$, jedesmal identisch Null entsteht, wenn die gegebene homogene Function von *ungerader* Ordnung ist, weil die simultanen Invarianten aus *ungeraden* Potenzen der Determinante entstehen, also *alternirend* sind, sobald die gegebene homogene Function von ungerader Ordnung ist; es

wird demnach schon für die cubischen Formen von 3 Veränderlichen ein anderer Angriffspunkt nothwendig, den wir sogleich darlegen werden. Wenn man eine homogene Function ungerader Ordnung in das Quadrat erhebt und für diese als Function *gerader* Ordnung die vorstehend definirte Invariante bildet, so erhält man zwar auch für die ursprüngliche Function eine Invariante, indessen ist diese nicht immer die einfachste, wie schon die folgende Theorie zeigen wird.

Von den ersten Grundformen der homogenen Functionen dritter Ordnung.

§. 5.

Es sei

$$(1.)\qquad f(x_1, x_2, x_3) = \Sigma a_{\varkappa\lambda\mu} x_\varkappa x_\lambda x_\mu$$

eine gegebene homogene Function der dritten Ordnung, und

$$a_{\varkappa\lambda\mu} = a_{\varkappa\mu\lambda} = a_{\mu\varkappa\lambda} = a_{\mu\lambda\varkappa} = a_{\lambda\varkappa\mu} = a_{\lambda\mu\varkappa},$$

also alle Coefficienten, welche zwei gleiche Indices haben mit dem Factor 3, und a_{123} mit dem Factor 6 versehen, sobald man die Summation (1.) ausführt.

Theorem 2.

Bezeichnet man durch:

$$(2.)\qquad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix}$$

ein unvollständiges System von Elementen, welches die 4 Determinanten

$$(3.)\quad \begin{cases} A = \Sigma\pm v_1 w_2 p_3, \quad B = -\Sigma\pm u_1 w_2 p_3, \quad C = \Sigma\pm u_1 v_2 p_3, \\ D = -\Sigma\pm u_1 v_2 w_3 \end{cases}$$

liefert, so erhält man eine Invariante von f, wenn man das Produkt

$$A.B.C.D$$

der vier in (2.) enthaltenen Determinanten bildet, welches in Bezug auf jedes der 4 Systeme von der dritten Ordnung ist, und statt der Potenzen und Produkte dritter Ordnung:

$$u_\varkappa u_\lambda u_\mu, \qquad v_\varkappa v_\lambda v_\mu, \qquad w_\varkappa w_\lambda w_\mu, \qquad p_\varkappa p_\lambda p_\mu$$

überall die entsprechenden Coefficienten

$$a_{\varkappa\lambda\mu}$$

der homogenen Function f setzt.

Die entstehende Function, welche ich durch $6S$ bezeichnen will, weil sie, wie nachher ersichtlich ist, den Factor 6 erhält, ist offenbar in Bezug auf die Gröfsen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ homogen und von der 4[ten] Ordnung, und soll genauer ***die erste Invariante*** genannt werden.

Das Product $ABCD$ ist eine *symmetrische* Verbindung der 4 Systeme, denn wenn auch jede Determinante einzeln das Zeichen bei der Vertauschung wechselt, so wird das Produkt $A.B.C.D$ doch aus einer geraden Anzahl Zeichenwechsel bestehen, mithin nicht alternirend sein; durch die angegebene Substitution kann in Folge dessen nicht Null entstehen. Bezeichnet man durch

$$(4.)\qquad f'(X_1, X_2, X_3) = \Sigma a'_{\varkappa\lambda\mu} X_\varkappa X_\lambda X_\mu$$

die transformirte Form von f, und bildet aus den Coefficienten dieselbe Invariante S', so ist sofort ersichtlich, dafs

$$(5.)\qquad S' = r^4.S$$

ist, denn wenn man wie §. 3 (4.) die vier linearen Functionen:

$$\begin{array}{l} u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 \\ v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 \\ w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 \end{array}$$

gleichzeitig transformirt, und die neuen Formen durch

$$\begin{array}{l} U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3 \\ V_1 X_1 + V_2 X_2 + V_3 X_3 \\ W_1 X_1 + W_2 X_2 + W_3 X_3 \\ P_1 X_1 + P_2 X_2 + P_3 X_3 \end{array}$$

bezeichnet, ihre Determinanten durch

$$A',\quad B',\quad C',\quad D',$$

so hat man

$$A' = r.A,\quad B' = r.B,\quad C' = r.C,\quad D' = r.D,$$

also

$$(6.)\qquad A'.B'.C'.D' = r^4.ABCD.$$

Setzt man aber wie in §. 3:

$$a_{\varkappa\lambda\mu} = u_\varkappa u_\lambda u_\mu,$$

so geht f' über in

$$(U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3)^3,$$

und Aehnliches gilt für die 3 andern Systeme; hieraus folgt durch dieselbe Schlufsweise wie dort, dafs

$$U_\varkappa U_\lambda U_\mu = a'_{\varkappa\lambda\mu}, \quad V_\varkappa V_\lambda V_\mu = a'_{\varkappa\lambda\mu}, \quad W_\varkappa W_\lambda W_\mu = a'_{\varkappa\lambda\mu}, \quad P_\varkappa P_\lambda P_\mu = a'_{\varkappa\lambda\mu}$$

gesetzt werden mufs, und daher (6.) in

$$6S' = 6.r^4 S$$

übergeht, w. z. b. w.

§. 6.

Ich will jetzt die Invariante S vollständig darstellen, d. h. die Multiplication der 4 Determinanten A, B, C, D ausführen. Wollte man hiezu den gewöhnlichen Weg einschlagen, so würde das Resultat nach complicirten Rechnungen in ganz aufgelöster Form erhalten werden, welche weiteren Operationen hinderlich ist. Mit Hülfe der §. 3 definirten Verbindungen und Operationen wird die Rechnung sehr einfach und das Resultat sehr übersichtlich.

Man bemerke, dafs die Invariante der quadratischen Formen §. 3 (9.)

$$(a, b, c) = \Sigma a_{\varkappa\lambda}(b, c)^{\varkappa\lambda}$$

durch die Substitution

$$a_{\varkappa\lambda} = u_\varkappa u_\lambda, \qquad b_{\varkappa\lambda} = v_\varkappa v_\lambda, \qquad c_{\varkappa\lambda} = w_\varkappa w_\lambda$$

in

$$(\Sigma \pm u_1 v_2 w_3)^2$$

übergeht, daher ist umgekehrt identisch:

$$(1.) \qquad (\Sigma \pm u_1 v_2 w_3)^2 = \Sigma w_\varkappa w_\lambda (uu, vv)^{\varkappa\lambda},$$

wo die Bezeichnung

$$(uu, vv)^{\varkappa\lambda}$$

der Bezeichnung §. 3 (8.)

$$(a, b)^{\varkappa\lambda}$$

entspricht. Auf ähnliche Weise läfst sich aber auch das Produkt

$$2\Sigma \pm u_1 v_2 w_3 \Sigma \pm u_1 v_2 p_3$$

darstellen, indem dasselbe aus (1.) hervorgeht, wenn man diese Gleichung in Bezug auf w_1, w_2, w_3 total differentiirt und statt der Incremente die entsprechenden p_1, p_2, p_3 substituirt, daher folgt

$$(2.) \qquad 2\Sigma \pm u_1 v_2 w_3 \Sigma \pm u_1 v_2 p_3 = \Sigma (w_\varkappa p_\lambda + w_\lambda p_\varkappa)(uu, vv)^{\varkappa\lambda}.$$

(Die Summe ist wie immer über *alle* Werthe 1, 2, 3 für $\varkappa$, λ auszudehnen.)

Es ist aber

$$D = -\Sigma \pm u_1 v_2 w_3, \qquad C = \Sigma \pm u_1 v_2 p_3,$$

also

$$(3.) \qquad 2CD = -\Sigma(w_\varkappa p_\lambda + p_\varkappa w_\lambda)(uu, vv)^{\varkappa\lambda},$$

ferner ebenso

$$2AB = -\Sigma(u_\varrho v_\sigma + u_\sigma v_\varrho)(ww, pp)^{\varrho\sigma},$$

wenn für ϱ, σ dasselbe gilt, was vorher für $\varkappa$, λ. Daher hat man

$$(4.) \qquad 4ABCD = \Sigma\Sigma(w_\varkappa p_\lambda + w_\lambda p_\varkappa)(ww, pp)^{\varrho\sigma}(u_\varrho v_\sigma + u_\sigma v_\varrho)(uu, vv)^{\varkappa\lambda}$$

und in dieser Form stellt sich das Produkt so geordnet dar, dafs man unverzüglich die Substitution der $a_{\varkappa\lambda\mu}$ ausführen kann.

Hierbei bemerke man ein für alle Mal, dafs die Coefficienten von f drei Gruppen bilden, je nachdem sie in einer bestimmten der partiellen Ableitungen:

$$(5.) \quad \begin{cases} \frac{1}{3}\frac{df}{dx_1} = a_{111}x_1^2 + a_{122}x_2^2 + a_{133}x_3^2 + 2a_{123}x_2x_3 + 2a_{113}x_1x_3 + 2a_{112}x_1x_2 \\ \frac{1}{3}\frac{df}{dx_2} = a_{211}x_1^2 + a_{222}x_2^2 + a_{233}x_3^2 + 2a_{223}x_2x_3 + 2a_{213}x_1x_3 + 2a_{212}x_1x_2 \\ \frac{1}{3}\frac{df}{dx_3} = a_{311}x_1^2 + a_{322}x_2^2 + a_{333}x_3^2 + 2a_{323}x_2x_3 + 2a_{313}x_1x_3 + 2a_{312}x_1x_2 \end{cases}$$

vorkommen; die partielle Ableitung nach x_ϱ hat nämlich alle Coefficienten, welche den festen Index ϱ besitzen, während die übrigen alle Combinationen der Zahlen 1, 2, 3 zu je zweien eingehen. Denkt man sich nun die 3 homogenen Functionen zweiten Grades §. 3 f_1, f_2, f_3 durch die vorstehenden (5.) der Reihe nach ersetzt, so wird man die Operationen, welche dort §. 3 (8.) durch

$$(b, c)^{\varkappa\lambda}$$

angedeutet sind, hier

$$(a_2, a_3)^{\varkappa\lambda}$$

schreiben müssen, und

$$\Sigma a_{\varkappa\lambda}(a, a)^{\varkappa\lambda}, \qquad \Sigma a_{\varkappa\lambda}(b, b)^{\varkappa\lambda}, \qquad \Sigma a_{\varkappa\lambda}(b, c)^{\varkappa\lambda}$$

respective ersetzen müssen durch:

$$\Sigma a_{1\varkappa\lambda}(a_1, a_1)^{\varkappa\lambda}, \qquad \Sigma a_{1\varkappa\lambda}(a_2, a_2)^{\varkappa\lambda}, \qquad \Sigma a_{1\varkappa\lambda}(a_2, a_3)^{\varkappa\lambda},$$

wobei beiläufig bemerkt sein mag, dafs diese Verbindungen für die homogene Function dritter Ordnung keine Invarianten sind aber eine später zu entwickelnde bestimmte Bedeutung haben. Die obige Bezeichnung vorausgesetzt, läfst sich nun leicht einsehen, dafs durch die angegebene symbolische Substitution

$$(6.) \quad \begin{cases} (u_\varrho v_\sigma + u_\sigma v_\varrho)(uu, vv)^{\varkappa\lambda} = 2(a_\varrho, a_\sigma)^{\varkappa\lambda} \\ (w_\varkappa p_\lambda + w_\lambda p_\varkappa)(ww, pp)^{\varrho\sigma} = 2(a_\varkappa, a_\lambda)^{\varrho\sigma} \end{cases}$$

wird. In der That ist z. B.

$$\begin{aligned}(u_\varrho v_\sigma + u_\sigma v_\varrho)(uu, vv)^{11} &= (u_\varrho v_\sigma + u_\sigma v_\varrho)(u_3^2 v_2^2 + u_2^2 v_3^2 - 2u_2 v_2 u_3 v_3)\\ &= u_\varrho u_3^2 . v_\sigma v_2^2 + u_\varrho u_2^2 . v_\sigma v_3^2 - 2u_\varrho u_2 u_3 . v_\sigma v_2 v_3\\ &\quad + u_\sigma u_3^2 . v_\varrho v_2^2 + u_\sigma u_2^2 . v_\varrho v_3^2 - 2u_\sigma u_2 u_3 . v_\varrho v_2 v_3\\ &= a_{\varrho 33} a_{\sigma 22} + a_{\varrho 22} a_{\sigma 33} - 2a_{\varrho 23} a_{\sigma 23}\\ &\quad + a_{\sigma 33} a_{\varrho 22} + a_{\sigma 22} a_{\varrho 33} - 2a_{\sigma 23} a_{\varrho 23}\\ &= (a_\varrho a_\sigma)^{11} + (a_\sigma a_\varrho)^{11} = 2(a_\varrho a_\sigma)^{11}.\end{aligned}$$

Wendet man daher (6.) auf (4.) an, so ergiebt sich

$$4ABCD = 4\Sigma\Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma}$$

oder nach Forthebung des Zahlenfactors 4, wenn man $ABCD = 6S$ setzt und eine der Summationen ausführt:

$$(7.)\quad 6S = \begin{cases} \Sigma(a_1 a_1)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{11} + \Sigma(a_2 a_2)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{22} + \Sigma(a_3 a_3)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{33} + \\ 2\Sigma(a_2 a_3)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{23} + 2\Sigma(a_1 a_3)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{13} + 2\Sigma(a_1 a_2)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{12}, \end{cases}$$

und es ist somit ein gesetzmäfsiges Resultat für die explicite Bildungsweise von S gegeben.

Eine genauere Untersuchung der 6 Summen auf der rechten Seite von (7.) zeigt aber, *dafs sie sämmtlich einander gleich sind, und dafs also viel einfacher*

$$(8.)\quad \begin{cases} S = \Sigma(a_1 a_1)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{11} = \Sigma(a_2 a_2)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa u_\lambda)^{22} = \Sigma(a_3 a_3)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{33} \\ \quad = 2\Sigma(a_2 a_3)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{23} = 2\Sigma(a_1 a_3)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{13} = 2\Sigma(a_1 a_2)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{12} \end{cases}$$

ist, und überdies

$$(9.)\qquad \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho_1\sigma_1} = 0$$

so oft ϱ, σ *von* ϱ_1, σ_1 *verschieden sind.*

Diese Sätze, welche Fundamentaleigenschaften der betrachteten Verbindungen darstellen, sollen im Folgenden entwickelt werden, nachdem wir einen Determinantensatz bewiesen haben, auf welchem sie beruhen.

§. 7.

Wenn man durch

$$u,\quad v,\quad w,\quad p$$

die 4 linearen Functionen

$$(1.)\quad \begin{cases} u = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 \\ v = v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 \\ w = w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 \\ p = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 \end{cases}$$

bezeichnet, deren 4 Determinanten die oben eingeführten

$$A = \Sigma\pm v_1 w_2 p_3, \qquad B = -\Sigma\pm u_1 w_2 p_3,$$
$$C = \Sigma\pm u_1 v_2 p_3, \qquad D = -\Sigma\pm u_1 v_2 w_3$$

sind, so läfst sich das Produkt

$$ABCD,$$

nachdem man es mit dem Quadrate einer beliebigen linearen Function

$$\vartheta = \vartheta_1 x_1 + \vartheta_2 x_2 + \vartheta_3 x_3$$

multiplicirt hat, immer wie folgt darstellen:

$$(2.)\quad \begin{cases} -ABCD(\vartheta_1 x_1+\vartheta_2 x_2+\vartheta_3 x_3)^2 = \\ ABwp(\Sigma\pm\vartheta_1 u_2 v_3)^2 + BCpu(\Sigma\pm\vartheta_1 v_2 w_3)^2 + ACvp(\Sigma\pm\vartheta_1 u_2 w_3)^2 \\ + ADvw(\Sigma\pm\vartheta_1 u_2 p_3)^2 + BDuw(\Sigma\pm\vartheta_1 v_2 p_3)^2 + CDuv(\Sigma\pm\vartheta_1 w_2 p_3)^2. \end{cases}$$

Die 6 Quadrate sind die 6 Determinanten, welche die Verbindung von ϑ mit je zwei der linearen Functionen (1.) liefert.

Da die Gröfsen ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3, x_1, x_2, x_3 in dieser Gleichung ganz beliebig sind, so erhält man aus (2.) ebensoviele Sätze, welche sich auf das unvollständige System

$$\begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{matrix}$$

beziehen, als Potenzen und Produkte der genannten Gröfsen auf beiden Seiten von (2.) sich vorfinden, indem man die Coefficienten gleicher Potenzen und Produkte einander gleich setzt. Z. B.

$$ABCD = w_1 p_1(\overline{u_2 v_3})^2 AB + u_1 p_1(\overline{v_2 w_3})^2 BC + v_1 p_1(\overline{u_2 w_3})^2 AC$$
$$+ v_1 w_1(\overline{u_2 p_3})^2 AD + u_1 w_1(\overline{v_2 p_3})^2 BD + u_1 v_1(\overline{w_2 p_3})^2 CD$$
$$0 = w_2 p_2(\overline{u_2 v_3})^2 AB + u_2 p_2(\overline{v_2 w_3})^2 BC + v_2 p_2(\overline{u_2 w_3})^2 AC$$
$$+ v_2 w_2(\overline{u_2 p_3})^2 AD + u_2 w_2(\overline{v_2 p_3})^2 BD + u_2 v_2(\overline{w_2 p_3})^2 CD,$$

wo der Kürze halber $\overline{u_2 v_3} = u_2 v_3 - u_3 v_2$ u. s. w. gesetzt ist.

Der Beweis des Satzes (2.) ist sehr einfach. Man bestimme nämlich vier Gröfsen ξ, η, ζ, λ so, dafs sie den Gleichungen

$$(3.)\quad \begin{cases} \xi u_1 + \eta v_1 + \zeta w_1 + \lambda p_1 = \vartheta_1 \\ \xi u_2 + \eta v_2 + \zeta w_2 + \lambda p_2 = \vartheta_2 \\ \xi u_3 + \eta v_3 + \zeta w_3 + \lambda p_3 = \vartheta_3 \end{cases}$$

Genüge leisten, was auf unendlich viele Arten geschehen kann, dann ist durch Auflösung von (3.) nach diesen Gröfsen, indem man immer je zwei eliminirt:

$$(4.)\quad \begin{cases} \xi B - \eta A = \Sigma \pm \vartheta_1 w_2 p_3; & \xi C - \zeta A = \Sigma \pm \vartheta_1 v_2 p_3 \\ \xi D - \lambda A = \Sigma \pm \vartheta_1 v_2 w_3; & \eta C - \zeta B = \Sigma \pm \vartheta_1 u_2 p_3 \\ \eta D - \lambda B = \Sigma \pm \vartheta_1 u_2 w_3; & \zeta D - \lambda C = \Sigma \pm \vartheta_1 u_2 v_3; \end{cases}$$

substituirt man diese Ausdrücke der Determinanten $\Sigma \pm \vartheta_1 w_2 p_3$ u. s. w. in die rechte Seite von (2.), so geht sie über in

$$ABwp(\zeta D - \lambda C)^2 + BCup(\xi D - \lambda A)^2 + ACvp(\eta D - \lambda B)^2$$
$$+ ADvw(\eta C - \zeta B)^2 + BDuw(\xi C - \zeta A)^2 + CDuv(\xi B - \eta A)^2,$$

was sich nach einem bekannten Determinantensatz in

$$(5.)\quad ABCD\Big\{(Au + Bv + Cw + Dp)\Big(\frac{\xi^2 u}{A} + \frac{\eta^2 v}{B} + \frac{\zeta^2 w}{C} + \frac{\lambda^2 p}{D}\Big) - (\xi u + \eta v + \zeta w + \lambda p)^2\Big\}^2$$

verwandeln läfst. Es ist aber wegen (1.)

$$Au + Bv + Cw + Dp = 0$$

und wegen (3.) mit Berücksichtigung von (1.)

$$\xi u + \eta v + \zeta w + \lambda p = \vartheta_1 x_1 + \vartheta_2 x_2 + \vartheta_3 x_3,$$

also geht (5.) über in

$$-ABCD(\vartheta_1 x_1 + \vartheta_2 x_2 + \vartheta_3 x_3)^2,$$

was zu beweisen war.

§. 8.

Wenn man in der Gleichung (2.) des vorigen §. die Substitution

$$u_\varkappa u_\lambda u_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu},\quad v_\varkappa v_\lambda v_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu},\quad w_\varkappa w_\lambda w_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu},\quad p_\varkappa p_\lambda p_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu}$$

auf beiden Seiten ausführt, so geht die linke Seite definitionsmäfsig in

$$-6S(\vartheta_1 x_1 + \vartheta_2 x_2 + \vartheta_3 x_3)^2$$

über, und von der rechten Seite übersieht man sogleich, dafs sämmtliche 6 Glieder einander gleich werden, weil jedes Glied aus dem andern durch blofse Vertauschung der 4 Systeme $u_\varkappa$, $v_\varkappa$, $w_\varkappa$, $p_\varkappa$ hervorgeht, und für jedes System *dieselben* Constanten $a_{\varkappa\lambda\mu}$ substituirt werden; es reicht also die Uebertragung eines z. B. des letzten Gliedes hin, dieses ist

$$uvCD(\Sigma \pm \vartheta_1 w_2 p_3)^2.$$

Nun hat man

$$(\Sigma \pm \vartheta_1 w_2 p_3)^2 = \Sigma \vartheta_\varrho \vartheta_\sigma (ww, pp)^{\varrho\sigma}\quad (\text{§. 6 (1.)}),$$

ferner

$$2CD = -\Sigma(w_\varkappa p_\lambda + w_\lambda p_\varkappa)(uu, vv)^{\varkappa\lambda} \quad (\S.\ 6\ (3.)),$$

also

$$2CD(\Sigma \pm \vartheta_1 w_2 p_3)^2 = -\Sigma\Sigma(w_\varkappa p_\lambda + w_\lambda p_\varkappa)(ww, pp)^{\varrho\sigma}\vartheta_\varrho\vartheta_\sigma(uu, vv)^{\varkappa\lambda},$$

aber wegen der zweiten Gleichung §. 6 (6.) und nach Fortlassung des Factors 2

$$CD(\Sigma \pm \vartheta_1 w_2 p_3)^2 = -\Sigma\Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma}\vartheta_\varrho\vartheta_\sigma(uu, vv)^{\varkappa\lambda}$$

und wenn man der Kürze halber

$$(1.) \qquad \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma}\vartheta_\varrho\vartheta_\sigma = \Theta_{\varkappa\lambda}$$

setzt:

$$CD(\Sigma \pm \vartheta_1 w_2 p_3)^2 = -\Sigma\Theta_{\varkappa\lambda}(uu, vv)^{\varkappa\lambda}.$$

Diese Gleichung mufs auf beiden Seiten mit

$$u.v = (u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3)(v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3) = \tfrac{1}{2}\Sigma(u_\varrho v_\sigma + u_\sigma v_\varrho)x_\varrho x_\sigma$$

multiplicirt werden, aber wegen §. 6 (6.) ist

$$(u_\varrho v_\sigma + u_\sigma v_\varrho)(uu, vv)^{\varkappa\lambda} = 2(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda},$$

also

$$\begin{aligned} uvCD(\Sigma \pm \vartheta_1 w_2 p_3)^2 &= -\tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma\Theta_{\varkappa\lambda}(uu, vv)^{\varkappa\lambda}(u_\varrho v_\sigma + u_\sigma v_\varrho)x_\varrho x_\sigma \\ &= -\Sigma\Sigma\Theta_{\varkappa\lambda}(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}x_\varrho x_\sigma. \end{aligned}$$

Die übrigen 5 Summen §. 7 (2.) geben dasselbe, daher hat man

$$-6S(\vartheta_1 x_1 + \vartheta_2 x_2 + \vartheta_3 x_3)^2 = -6\Sigma\Sigma\Theta_{\varkappa\lambda}(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}x_\varrho x\ ,$$

also

$$(2.) \qquad S(\vartheta_1 x_1 + \vartheta_2 x_2 + \vartheta_3 x_3)^2 = \Sigma\Sigma\Theta_{\varkappa\lambda}(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}x_\varrho x_\sigma.$$

Diese höchst merkwürdige identische Gleichung liefert nun die am Ende von §. 6 aufgestellten Sätze.

In der That giebt die Vergleichung des Coefficienten von $x_\varrho x_\sigma$ auf beiden Seiten von (2.) das Resultat:

$$(3.) \qquad S.\vartheta_\varrho\vartheta_\sigma = \Sigma\Theta_{\varkappa\lambda}(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}$$

und wenn man jetzt den Werth (1.) von $\Theta_{\varkappa\lambda}$ substituirt:

$$\begin{aligned} S.\vartheta_\varrho\vartheta_\sigma = \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}\{&(a_\varkappa a_\lambda)^{11}\vartheta_1^2 + (a_\varkappa a_\lambda)^{22}\vartheta_2^2 + (a_\varkappa a_\lambda)^{33}\vartheta_3^2 \\ &+ 2(a_\varkappa a_\lambda)^{23}\vartheta_2\vartheta_3 + 2(a_\varkappa a_\lambda)^{13}\vartheta_1\vartheta_3 + 2(a_\varkappa a_\lambda)^{12}\vartheta_1\vartheta_2\}. \end{aligned}$$

Diese Gleichung mufs für jeden Werth der willkührlichen Gröfsen ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 gelten, mithin mufs der Coefficient von $\vartheta_\varrho \vartheta_\sigma$ auf der rechten Seite $= S$, die Coefficienten der übrigen Potenzen und Produkte dieser Gröfsen aber müssen $= 0$ sein. Es sind daher die Relationen:

$$(4.)\qquad 0 = \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho_1 \sigma_1}(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda},$$

so oft ϱ_1, σ_1 von ϱ, σ verschieden sind, und

$$(5.)\qquad S = 2\Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma}(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} = \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\varrho}(a_\varrho a_\varrho)^{\varkappa\lambda},$$

wo im ersten Gliede der rechten Seite ϱ nicht $= \sigma$ ist, vollständig erwiesen.

Aus den Relationen (4.) und (5.) ergiebt sich aber die Auflösung des folgenden merkwürdigen Systems von Gleichungen des ersten Grades:

Theorem 3.

Wenn

$$\Theta_{11},\quad \Theta_{22},\quad \Theta_{33},\quad \Theta_{23},\quad \Theta_{13},\quad \Theta_{12}$$

ganz beliebige Gröfsen bedeuten, so bilden die folgenden Gleichungen mit den Unbekannten

$$U_{11},\quad U_{22},\quad U_{33},\quad U_{23},\quad U_{13},\quad U_{12}$$

ein derartiges System:

$$(6.)\begin{cases} \Theta_{11}=(a_1a_1)^{11}U_{11}+(a_1a_1)^{22}U_{22}+(a_1a_1)^{33}U_{33}+2(a_1a_1)^{23}U_{23}+2(a_1a_1)^{13}U_{13}+2(a_1a_1)^{12}U_{12} \\ \Theta_{22}=(a_2a_2)^{11}U_{11}+(a_2a_2)^{22}U_{22}+(a_2a_2)^{33}U_{33}+2(a_2a_2)^{23}U_{23}+2(a_2a_2)^{13}U_{13}+2(a_2a_2)^{12}U_{12} \\ \Theta_{33}=(a_3a_3)^{11}U_{11}+(a_3a_3)^{22}U_{22}+(a_3a_3)^{33}U_{33}+2(a_3a_3)^{23}U_{23}+2(a_3a_3)^{13}U_{13}+2(a_3a_3)^{12}U_{12} \\ \Theta_{23}=(a_2a_3)^{11}U_{11}+(a_2a_3)^{22}U_{22}+(a_2a_3)^{33}U_{33}+2(a_2a_3)^{23}U_{23}+2(a_2a_3)^{13}U_{13}+2(a_2a_3)^{12}U_{12} \\ \Theta_{13}=(a_1a_3)^{11}U_{11}+(a_1a_3)^{22}U_{22}+(a_1a_3)^{33}U_{33}+2(a_1a_3)^{23}U_{23}+2(a_1a_3)^{13}U_{13}+2(a_1a_3)^{12}U_{12} \\ \Theta_{12}=(a_1a_2)^{11}U_{11}+(a_1a_2)^{22}U_{22}+(a_1a_2)^{33}U_{33}+2(a_1a_2)^{23}U_{23}+2(a_1a_2)^{13}U_{13}+2(a_1a_2)^{12}U_{12}, \end{cases}$$

dafs sich dessen Auflösungen durch das System:

$$(7.)\ S.U_{\varrho\sigma}=(a_\varrho a_\sigma)^{11}\Theta_{11}+(a_\varrho a_\sigma)^{22}\Theta_{22}+(a_\varrho a_\sigma)^{33}\Theta_{33}+2(a_\varrho a_\sigma)^{23}\Theta_{23}+2(a_\varrho a_\sigma)^{13}\Theta_{13}+2(a_\varrho a_\sigma)^{12}\Theta_{12}$$

darstellen lassen, in welchem die Coefficienten wörtlich und genau in derselben Reihenfolge mit denen des ursprünglichen Systems übereinstimmen.

Der Beweis ergiebt sich auf der Stelle, wenn man die Gleichungen (6.) der Reihe nach mit

$$(a_\varrho a_\sigma)^{11},\quad (a_\varrho a_\sigma)^{22},\quad (a_\varrho a_\sigma)^{33},\quad (a_\varrho a_\sigma)^{23},\quad (a_\varrho a_\sigma)^{13},\quad (a_\varrho a_\sigma)^{12}$$

multiplicirt und alle addirt, indem dann wegen (4.) alle Coefficienten von U_{11}, U_{22} u. s. w. in der Summe verschwinden, mit Ausnahme des Coefficienten von $U_{\varrho\sigma}$, welcher wegen (5.) $= S$ ist.

Die gewöhnliche Auflösung des Systems (6.) würde die Coefficienten der Auflösung statt von der 2ten wie (7.) von der 10ten Ordnung geben, und die Determinante von der 12ten Ordnung, sie würde also die Gleichungen (7.) mit einem sich forthebenden Factor von der 8ten Ordnung liefern. Da diese Determinante, wie später gezeigt wird $= S^3$ ist, so ist der angegebene Factor $= S^2$.

Die Allgemeinheit, in welcher das vorstehende Theorem 3. bewiesen ist, läfst die Gültigkeit desselben auch dann noch erkennen, wenn man das System (6.) transponirt, d. h. die gleichvielten Horizontal- und Verticalzeilen mit einander vertauscht, obwohl dieselben einander nicht gleich sind. Substituirt man alsdann statt der 6 Unbekannten die Potenzen und Produkte:

$$x_1^2,\quad x_2^2,\quad x_3^2,\quad x_2x_3,\quad x_1x_3,\quad x_1x_2$$

und statt der Gröfsen auf der linken Seite die Potenzen und Produkte:

$$y_1^2,\quad y_2^2,\quad y_3^2,\quad y_2y_3,\quad y_1y_3,\quad y_1y_2$$

und läfst überdies diese Variabeln den Gleichungen:

$$\varDelta f(x_1, x_2, x_3) = 0, \qquad \varDelta f(y_1, y_2, y_3) = 0$$

genügen, wo $\varDelta f$ die hier in der Folge zu entwickelnde Functionaldeterminante des Herrn *Hesse* ist, so wird das Theorem der Ausdruck des bekannten Satzes von den conjugirten Punkten einer Curve dritter Ordnung, und man gelangt so zu einem bereits in dieser speciellen Fassung von Herrn *Hesse* *) gegebenem Resultat.

Obwohl die explicite Darstellung der 36 Coefficienten $(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}$ zu allgemeinen Entwicklungen nicht erforderlich ist, so will ich dieselbe dennoch hier geben, indem ich den Algorithmus §. 3 (8.) dazu benutze. Sie ist folgende:

---

*) S. dieses Journal Bd. 36, S. 164.

(8).

	$(aa)^{11}$	$(aa)^{23}$
$(a_1 a_1)$	$2(a_{122}a_{133} - a_{123}^2)$	$2(a_{112}a_{113} - a_{111}a_{123})$
$(a_2 a_2)$	$2(a_{222}a_{233} - a_{223}^2)$	$2(a_{122}a_{123} - a_{112}a_{223})$
$(a_3 a_3)$	$2(a_{223}a_{333} - a_{233}^2)$	$2(a_{123}a_{133} - a_{113}a_{233})$
$(a_2 a_3)$	$a_{222}a_{333} - a_{233}a_{223}$	$a_{122}a_{133} + a_{123}^2 - a_{112}a_{233} - a_{113}a_{223}$
$(a_1 a_3)$	$a_{122}a_{333} + a_{223}a_{133} - 2a_{123}a_{233}$	$a_{112}a_{133} - a_{111}a_{233}$
$(a_1 a_2)$	$a_{122}a_{233} + a_{133}a_{222} - 2a_{123}a_{223}$	$a_{122}a_{113} - a_{111}a_{223}$
	$(aa)^{22}$	$(aa)^{13}$
$(a_1 a_1)$	$2(a_{111}a_{133} - a_{113}^2)$	$2(a_{112}a_{123} - a_{122}a_{113})$
$(a_2 a_2)$	$2(a_{112}a_{233} - a_{123}^2)$	$2(a_{122}a_{223} - a_{123}a_{222})$
$(a_3 a_3)$	$2(a_{113}a_{333} - a_{133}^2)$	$2(a_{123}a_{233} - a_{133}a_{223})$
$(a_2 a_3)$	$a_{112}a_{333} + a_{113}a_{233} - 2a_{123}a_{133}$	$a_{122}a_{233} - a_{133}a_{222}$
$(a_1 a_3)$	$a_{111}a_{333} - a_{113}a_{133}$	$a_{112}a_{233} + a_{123}^2 - a_{113}a_{223} - a_{133}a_{122}$
$(a_1 a_2)$	$a_{111}a_{233} + a_{112}a_{133} - 2a_{113}a_{123}$	$a_{112}a_{223} - a_{113}a_{222}$
	$(aa)^{33}$	$(aa)^{12}$
$(a_1 a_1)$	$2(a_{111}a_{122} - a_{112}^2)$	$2(a_{113}a_{123} - a_{112}a_{133})$
$(a_2 a_2)$	$2(a_{112}a_{222} - a_{122}^2)$	$2(a_{123}a_{223} - a_{122}a_{233})$
$(a_3 a_3)$	$2(a_{113}a_{223} - a_{123}^2)$	$2(a_{133}a_{233} - a_{123}a_{333})$
$(a_2 a_3)$	$a_{112}a_{223} + a_{113}a_{222} - 2a_{122}a_{123}$	$a_{133}a_{223} - a_{122}a_{333}$
$(a_1 a_3)$	$a_{111}a_{223} + a_{113}a_{122} - 2a_{112}a_{123}$	$a_{113}a_{233} - a_{112}a_{333}$
$(a_1 a_2)$	$a_{111}a_{222} - a_{112}a_{122}$	$a_{113}a_{223} + a_{123}^2 - a_{112}a_{233} - a_{122}a_{133}$.

Setzt man

$$S = \Sigma(a_1 a_1)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{11},$$

so wird daher vermittelst dieser Tafel:

$$\begin{aligned} S = 4\{&(a_{122}a_{133} - a_{123}^2)^2 + (a_{222}a_{233} - a_{223}^2)(a_{111}a_{133} - a_{113}^2) \\ &+ (a_{223}a_{333} - a_{233}^2)(a_{111}a_{122} - a_{112}^2) + (a_{222}a_{333} - a_{223}a_{233})(a_{112}a_{113} - a_{111}a_{123}) \\ &+ (a_{122}a_{333} + a_{223}a_{133} - 2a_{123}a_{233})(a_{112}a_{123} - a_{113}a_{122}) \\ &+ (a_{122}a_{233} + a_{133}a_{222} - 2a_{123}a_{223})(a_{113}a_{123} - a_{112}a_{133})\}. \end{aligned}$$

Da man mit der eingeführten Bezeichnung operiren kann, so ist es nicht zweckmäſsig die Verbindungen zweiter Ordnung noch durch Auflösung der Parenthesen zu zerstören; in der That geht alsdann der vorstehende nach

einem einfachen Gesetz gebildete Ausdruck in den sehr complicirten über:

$$(9.)\quad \tfrac{1}{4}S = a_{123}^4 - 2a_{123}^2(a_{122}a_{133}+a_{113}a_{223}+a_{112}a_{233}) + a_{123}(3a_{113}a_{122}a_{233}+3a_{112}a_{133}a_{223}$$
$$+a_{112}a_{122}a_{333}+a_{113}a_{133}a_{222}+a_{223}a_{233}a_{111}-a_{111}a_{222}a_{333}) + a_{122}^2a_{133}^2+a_{113}^2a_{223}^2+a_{112}^2a_{233}^2$$
$$-a_{111}a_{133}a_{223}^2-a_{111}a_{122}a_{233}^2-a_{222}a_{112}a_{133}^2-a_{222}a_{233}a_{113}^2-a_{333}a_{113}a_{122}^2-a_{333}a_{223}a_{112}^2$$
$$+a_{111}a_{222}a_{133}a_{233}+a_{111}a_{333}a_{122}a_{223}+a_{222}a_{333}a_{112}a_{113}-a_{112}a_{122}a_{133}a_{233}$$
$$-a_{223}a_{233}a_{112}a_{113}-a_{113}a_{133}a_{223}a_{122},$$

mit welchem nicht eher Operationen ausgeführt werden können, als bis man ihn wieder rückwärts in die gesetzmäfsige Form gebracht hat. *) Dafs die Invariante S immer den Factor 4 erhält, ist a priori ersichtlich, weil die $(a_\varrho a_\varrho)^{\varkappa\lambda}$ mit gleichen unteren Indices den Factor 2 haben. Die Unterdrückung des Factors 4 bei der Bezeichnung ist jedoch nicht zweckmäfsig, weil man dann bei andern davon abhängigen Formen Zahlenfactoren einführen müfste, die dadurch vermieden sind.

Ich will nun noch ein System von sehr einfachen Relationen entwickeln, welche zwischen den 36 Verbindungen zweiter Ordnung bestehen.

Wenn man die Bedeutung der Bezeichnungsweise §. 6 (1.):

$$\Sigma(uu, vv)^{\varkappa\lambda} w_\varkappa w_\lambda = (\Sigma \pm u_1 v_2 w_3)^2$$

berücksichtigt, so ergiebt sich sofort, dafs

$$(uu, vv)^{11} = (\overline{u_2 v_3})^2;\ (uu, vv)^{22} = (\overline{u_2 v_3})(\overline{u_3 v_1});\ (uu, vv)^{33} = (\overline{u_2 v_3})(\overline{u_1 v_2})$$
$$(uu, vv)^{23} = (\overline{u_1 v_3})(\overline{u_1 v_2});\ (uu, vv)^{13} = (\overline{u_1 v_2})(\overline{u_2 v_3});\ (uu, vv)^{12} = (\overline{u_1 v_3})(\overline{u_2 v_3})$$

ist, wo der Kürze halber $\overline{u_2 v_3}$ u. s. w. die partiellen Determinanten $u_2 v_3 - u_3 v_2$ u. s. w. bedeuten.

Es werden daher die Gröfsen

$$(uu, vv)^{1\varrho}, \qquad (uu, vv)^{2\varrho}, \qquad (uu, vv)^{3\varrho}$$

mit einem gemeinschaftlichen Factor μ versehen sein, der selbst eine der partiellen Determinanten ist, so dafs sie sich respective in

$$\mu(\overline{u_2 v_3}), \qquad \mu(\overline{u_3 v_1}), \qquad \mu(\overline{u_2 v_2})$$

verwandeln lassen.

---

*) In meiner Abhandlung, Bd. 39, S. 152 dieses Journals, wo die obige Darstellung von S gegeben ist, habe ich die letzte Auflösung (9.) der Parenthesen nicht abdrucken lassen. Hierdurch scheint Herr *Cayley* zu der irrthümlichen Bemerkung in Phil. Transactions vol. 146, pag. 641 veranlafst worden zu sein, nach welcher *zuerst* Herr *Salmon* die entwickelten Ausdrücke gegeben haben soll. Herr *Salmon* hat sie in der That in einem spätern Bande dieses Journals (Bd. 42, S. 274) gegeben, aber mit Bezug auf meine Abhandlung.

Bildet man nun die Summe der Produkte

(10.) $(uu, vv)^{1\varrho}(u_\sigma v_1+u_1 v_\sigma)+(uu, vv)^{2\varrho}(u_\sigma v_2+u_2 v_\sigma)+(uu, vv)^{3\varrho}(u_\sigma v_3+u_3 v_\sigma)$,

so ist das Resultat:

$$\mu\{u_\sigma \Sigma\pm u_1 v_2 v_3+v_\sigma \Sigma\pm u_1 u_2 v_3\} = 0,$$

weil die Determinanten mit zwei gleichen Verticalzeilen verschwinden.

Es ist nun wegen §. 6 (6.)

$$(uu, vv)^{m\varrho}(u_\sigma v_m+u_m v_\sigma) = 2(a_\sigma a_m)^{m\varrho},$$

wenn man die Substitutionen

$$u_\varkappa u_\lambda u_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu}, \qquad v_\varkappa v_\lambda v_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu}$$

ausführt, daher giebt die Summe (10.) den folgenden Satz:

Wenn man statt ϱ, σ *allmälig alle Zahlen* 1, 2, 3 *setzt, so entstehen zwischen den 36 Verbindungen* $(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}$ *die folgenden 9 Gleichungen:*

$$(11.) \qquad (a_\sigma a_1)^{\varrho 1}+(a_\sigma a_2)^{\varrho 2}+(a_\sigma a_3)^{\varrho 3} = 0,$$

und überdies, wenn man je 3 geeignete addirt:

$$(12.) \qquad \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varrho\sigma} = 0.$$

§. 9.

Es bleibt schliefslich noch eine Eigenschaft der 36 Verbindungen $(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}$ nachzuweisen, welche ihnen eine selbsständige Stellung in der Theorie anweist, nämlich, dafs sie die Coefficienten einer *Zwischenform* §. 1. IV sind.

Theorem 4.

Wenn man das Quadrat der Determinante:

$$\Sigma\pm u_1 v_2 w_3 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

mit den beiden linearen Funktionen

$$v = v_1 x_1+v_2 x_2+v_3 x_3, \qquad w = w_1 x_1+w_2 x_2+w_3 x_3$$

multiplicirt, also

$$v.w.(\Sigma\pm u_1 v_2 w_3)^2$$

bildet, und dann die Substitution

$$v_\varkappa v_\lambda v_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu}, \qquad w_\varkappa w_\lambda w_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu}$$

ausführt, so entsteht eine Funktion Θ der Veränderlichen $x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3$, welche in Bezug auf beide Systeme von der 2ten Ordnung, und Zwischenform von f ist.

Es soll in der Folge Θ *die erste Zwischenform* genannt werden. Der Beweis ergiebt sich unmittelbar wie bei frühern Darstellungen §. 3 aus der Gleichung:

$$(\Sigma \pm U_1 V_2 W_3)^2 (V_1 X_1 + V_2 X_2 + V_3 X_3)(W_1 X_1 + W_2 X_2 + W_3 X_3)$$
$$= r^2 . (\Sigma \pm u_1 v_2 w_3)^2 (v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3)(w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3)$$

mit Berücksichtigung von §. 3 (4.), (5.).

Zur expliciten Darstellung von Θ bemerke man, dafs

$$(v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3)(w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3) = \tfrac{1}{2} \Sigma (v_\varrho w_\sigma + v_\sigma w_\varrho) x_\varrho x_\sigma$$

ist, und

$$(\Sigma \pm u_1 v_2 w_3)^2 = \Sigma u_\varkappa u_\lambda (vv, ww)^{\varkappa\lambda} \quad (\text{§. 6 (1.)}),$$

mithin durch Multiplication beider Gleichungen:

$$(1.) \quad (\Sigma \pm u_1 v_2 w_3)^2 (v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3)(w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3)$$
$$= \tfrac{1}{2} \Sigma \Sigma (v_\varrho w_\sigma + v_\sigma w_\varrho)(vv, ww)^{\varkappa\lambda} u_\varkappa u_\lambda x_\varrho x_\sigma .$$

Da nun nach §. 6 (6.):

$$(v_\varrho w_\sigma + v_\sigma w_\varrho)(vv, ww)^{\varkappa\lambda} = 2 (a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}$$

ist, so folgt:

$$(2.) \quad \Theta(u_1, u_2, u_3; x_1, x_2, x_3) = \Sigma \Sigma (a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} u_\varkappa u_\lambda x_\varrho x_\sigma .$$

Die Gleichung (2.) zeigt, dafs die Zwischenform Θ eine homogene Function zweiter Ordnung ist, und zwar sowohl der Variabeln x_1, x_2, x_3, als der Variabeln u_1, u_2, u_3, als auch in Bezug auf die Coefficienten von f, endlich, dafs ihre Coefficienten die 36 Fundamentalverbindungen zweiter Ordnung in der Tabelle von §. 8 sind. Obige symbolische Gleichung verwandelt sich aber wegen (2.) in:

$$(3.) \quad \begin{cases} \Sigma \Sigma (a'_\varrho a'_\sigma) U_\varkappa U_\lambda X_\varrho X_\sigma = r^2 . \Sigma \Sigma (a_\varrho a_\sigma) u_\varkappa u_\lambda x_\varrho x_\sigma \\ \text{oder} \qquad \Theta' = r^2 . \Theta . \end{cases}$$

Ich will nun eine zweite Bildungsweise der Function Θ angeben, welche sich vorzüglich zu ihrer Darstellung für specielle Formen von f eignet, und dadurch auch umgekehrt die Berechnung der Tabelle §. 8 leicht giebt.

Man bezeichne zu diesem Ende die 6 partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f

$$\tfrac{1}{6} \frac{d^2 f}{dx_1^2}, \quad \tfrac{1}{6} \frac{d^2 f}{dx_2^2}, \quad \tfrac{1}{6} \frac{d^2 f}{dx_3^2}, \quad \tfrac{1}{6} \frac{d^2 f}{dx_2 dx_3}, \quad \tfrac{1}{6} \frac{d^2 f}{dx_1 dx_3}, \quad \tfrac{1}{6} \frac{d^2 f}{dx_1 dx_2}$$

respective durch:

$$(4.)\quad A_{11},\quad A_{22},\quad A_{33},\quad A_{23},\quad A_{13},\quad A_{12},$$

so dafs

$$(5.)\quad A_{\varkappa\lambda} = a_{1\varkappa\lambda}x_1 + a_{2\varkappa\lambda}x_2 + a_{3\varkappa\lambda}x_3$$

ist, wie man sich sofort durch Differentiation überzeugt, und betrachte die Gröfsen $A_{\varkappa\lambda}$ als Coefficienten einer homogenen Function zweiten Grades, alsdann gilt der Satz:

Wenn man die zugehörige Form Γ §. 3 (2.) der homogenen Function zweiten Grades bildet, deren Coefficienten die Gröfsen $A_{\varkappa\lambda}$ sind, so entsteht die Zwischenform Θ dividirt durch 2, d. h. es ist mit der Bezeichnungsweise von §. 3 (13.):

$$(6.)\quad \Theta = \Sigma u_\varkappa u_\lambda (A, A)^{\varkappa\lambda}.$$

Beweis.

Nach §. 3 (10.) kann man in (6.) $u_\varkappa u_\lambda$ mit $A_{\varkappa\lambda}$ vertauschen, also

$$\Sigma u_\varkappa u_\lambda (A, A)^{\varkappa\lambda} = \Sigma A_{\varkappa\lambda}(uu, A)^{\varkappa\lambda}$$

schreiben, und daher wegen (5.):

$$\Sigma u_\varkappa u_\lambda (A, A)^{\varkappa\lambda} = \Sigma\Sigma a_{\varrho\varkappa\lambda} x_\varrho (uu, A)^{\varkappa\lambda},$$

wo die zweite Summation über $\varrho = 1, 2, 3$ auszudehnen ist. Unter fortwährender Anwendung des Vertauschungssatzes §. 3 (10.) erhält man nun:

$$\Sigma a_{\varrho\varkappa\lambda}(uu, A)^{\varkappa\lambda} = \Sigma A_{\varkappa\lambda}(uu, a_\varrho)^{\varkappa\lambda} = \Sigma\Sigma a_{\sigma\varkappa\lambda} x_\sigma (uu, a_\varrho)^{\varkappa\lambda},$$

wo die zweite Summation sich auf (6.) bezieht, mithin durch Substitution:

$$\Sigma u_\varkappa u_\lambda (A, A)^{\varkappa\lambda} = \Sigma\Sigma a_{\sigma\varkappa\lambda}(a_\varrho, uu)^{\varkappa\lambda} x_\varrho x_\sigma = \Sigma\Sigma (a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} u_\varkappa u_\lambda x_\varrho x_\sigma = \Theta,$$

w. z. b. w.

§. 10.

Zum Schlufs dieser Untersuchungen will ich das Vorstehende auf eine specielle Form als Beispiel anwenden und wähle hiezu die *Hesse*sche Form:

$$(1.)\quad f'(X_1, X_2, X_3) = a_1 X_1^3 + a_2 X_2^3 + a_3 X_3^3 + 6a_4 X_1 X_2 X_3 \text{ *)},$$

in welche sich die allgemeine transformiren läfst.

Man findet durch Differentiation:

$$(2.)\quad \begin{cases} A_{11} = a_1 X_1, & A_{22} = a_2 X_2, & A_{33} = a_3 X_3, \\ A_{23} = a_4 X_1, & A_{13} = a_4 X_2, & A_{12} = a_4 X_3, \end{cases}$$

*) Die *Hesse*sche Form setzt $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ voraus, was im Allgemeinen erlaubt ist, indessen ist es einerseits um die Homogeneität der Formen nicht zu zerstören zweckmäfsig, dafs man von dieser Vereinfachung absieht, andrerseits kann es nöthig sein, auch die Formen zu untersuchen, für welche einer der Coefficienten a_1, a_2, a_3, $= 0$ ist.

also:

$$(3.)\begin{cases}\Theta = \Sigma U_\varkappa U_\lambda (AA)^{\varkappa\lambda} \\ = 2\begin{Bmatrix} U_1^2(a_2 a_3 X_2 X_3 - a_4^2 X_1^2) + U_2^2(a_1 a_3 X_1 X_3 - a_4^2 X_2^2) + U_3^2(a_1 a_2 X_1 X_2 - a_4^2 X_3^2) \\ +2U_2 U_3(a_4^2 X_2 X_3 - a_1 a_4 X_1^2) + 2U_1 U_3(a_4^2 X_1 X_3 - a_2 a_4 X_2^2) + 2U_1 U_2(a_4^2 X_1 X_2 - a_3 a_4 X_3^2)\end{Bmatrix}\end{cases}$$

und daher die Tabelle in §. 8:

$$(4.)\begin{cases}-2a_4^2 & 0 & 0 & -2a_1 a_4 & 0 & 0 \\ 0 & -2a_4^2 & 0 & 0 & -2a_2 a_4 & 0 \\ 0 & 0 & -2a_4^2 & 0 & 0 & -2a_3 a_4 \\ a_2 a_3 & 0 & 0 & a_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 a_3 & 0 & 0 & a_4^2 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 a_2 & 0 & 0 & a_4^2\end{cases}$$

Multiplicirt man die Glieder irgend einer Horizontalreihe mit den Gliedern der gleichvielten Verticalreihe, so findet man, wenn man beachtet, dafs die drei letzten Produkte in der S definirenden Summe doppelt vorkommen, sofort:

$$(5.)\qquad S' = 4(a_4^3 - a_1 a_2 a_3)\, a_4.$$

Es läfst sich beiläufig für das System (4.) die totale Determinante leicht bilden, weil zum gröfsten Theile ihre Elemente $=0$ sind, diese wird

$$8a_4^3(a_4^3 - a_1 a_2 a_3)^3,$$

d. h. bis auf einen Zahlenfactor $= S'^3$, wie in §. 8 behauptet ist; beachtet man noch, dafs

$$S'^3 = r^{12}. S^3$$

ist, so läfst sich schon hieraus die Richtigkeit der angegebenen Eigenschaft der ganzen Determinante für alle Fälle einsehen.

Wir werden das System (4.) in der Folge für alle anderen auf (1.) bezüglichen Darstellungen benutzen.

§. 11.

Theorem 5.

Wenn man in dem Produkte

$$(\Sigma \pm u_1 v_2 w_3)^2 (u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3)(v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3)(w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3)$$

die Potenzen und Produkte dritter Ordnung

$$u_\varkappa u_\lambda u_\mu, \qquad v_\varkappa v_\lambda v_\mu, \qquad w_\varkappa w_\lambda w_\mu$$

durch die entsprechenden

$$a_{\varkappa\lambda\mu}$$

ersetzt, und die dadurch entstehende Function dritter Ordnung der Variabeln

x_1, x_2, x_3 *durch*

$$\Delta f(x_1, x_2, x_3)$$

bezeichnet, so ist Δf eine Covariante von f.

Wir wiederholen nicht mehr den bereits oft geführten Beweis, welcher darauf beruht, dafs

$$(\Sigma \pm U_1 V_2 W_3)^2 = r^2 (\Sigma \pm u_1 v_2 w_3)^2$$

ist, und zur Folge hat, dafs

$$(1.) \quad \Delta' f(X_1, X_2, X_3) = r^2 . \Delta f(x_1, x_2, x_3)$$

wird.

Man gelangt aber zur sofortigen Bildung von Δf, welche wir die *erste Covariante* nennen wollen, wenn man beachtet, dafs die Function, welche im Theorem 4. die Zwischenform Θ definirt, sich nur durch den Factor $(u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3)$ von der vorliegenden unterscheidet, und dafs man also die Gleichung:

$$(2.) \quad \Delta f = \Theta (u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3)$$

unter der Voraussetzung:

$$u_\varkappa u_\lambda u_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu}$$

erhält. Mit Berücksichtigung von §. 9 (2.) ist also

$$\Delta f = \Sigma\Sigma (a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} u_\varkappa u_\lambda x_\varrho x_\sigma (u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3),$$

mithin:

$$\Delta f = \Sigma\Sigma (a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} x_\varrho x_\sigma (a_{1\varkappa\lambda} x_1 + a_{2\varkappa\lambda} x_2 + a_{3\varkappa\lambda} x_3) = \Sigma\Sigma (a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} a_{\tau\varkappa\lambda} x_\varrho x_\sigma x_\tau,$$

wenn man sich der Kürze halber eines einfachen Summenzeichens bedient, um anzudeuten, dafs man die Summe über alle Werthe 1, 2, 3 für ϱ, σ, τ auszudehnen hat.

Setzt man also

$$(3.) \quad \Delta f = \Sigma b_{\varrho\sigma\tau} x_\varrho x_\sigma x_\tau,$$

so ist

$$(4.) \quad b_{\varrho\sigma\tau} = \Sigma (a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} a_{\tau\varkappa\lambda}.$$

Da ferner nach der zweiten Darstellungsweise der Zwischenfunction Θ, §. 9 (6.)

$$\Delta f = \Sigma u_\varkappa u_\lambda (AA)^{\varkappa\lambda} (u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3)$$

ist, so folgt

$$\Delta f = \Sigma (AA)^{\varkappa\lambda} (a_{1\varkappa\lambda} x_1 + a_{2\varkappa\lambda} x_2 + a_{3\varkappa\lambda} x_3),$$

also wegen §. 9 (5.):

$$(5.) \quad \Delta f = \Sigma (AA)^{\varkappa\lambda} A_{\varkappa\lambda}.$$

Nun ist nach §. 3 (12.)

$$\Sigma (AA)^{\varkappa\lambda} A_{\varkappa\lambda} = 6 \Sigma \pm A_{11} A_{22} A_{33}$$

und die $A_{\varkappa\lambda}$ bedeuten die zweiten partiellen Differentialquotienten dividirt durch 6, mithin ist:

$$(6.)\quad \tfrac{1}{6}\Delta f(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} \frac{1}{6}\frac{d^2f}{dx_1^2}, & \frac{1}{6}\frac{d^2f}{dx_1dx_2}, & \frac{1}{6}\frac{d^2f}{dx_1dx_3} \\ \frac{1}{6}\frac{d^2f}{dx_2dx_1}, & \frac{1}{6}\frac{d^2f}{dx_2^2}, & \frac{1}{6}\frac{d^2f}{dx_2dx_3} \\ \frac{1}{6}\frac{d^2f}{dx_3dx_1}, & \frac{1}{6}\frac{d^2f}{dx_3dx_2}, & \frac{1}{6}\frac{d^2f}{dx_3^2} \end{vmatrix}.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dafs die erste Covariante die zuerst von Herrn *Hesse* in seinen Untersuchungen über die homogenen Functionen dritter Ordnung benutzte *Functionaldeterminante* ist.

Andrerseits giebt die Gleichung (4.) die Coefficienten derselben in expliciter Form, und zwar sind dieselben die simultanen Invarianten der drei homogenen Functionen zweiten Grades

$$\tfrac{1}{3}\frac{df}{dx_1}, \quad \tfrac{1}{3}\frac{df}{dx_2}, \quad \tfrac{1}{3}\frac{df}{dx_3},$$

wie sich aus Vergleichung der §. 6 (5.) gegebenen Entwicklung dieser Differentialquotienten, mit der Darstellung der angegebenen Invarianten §. 3 leicht einsehen läfst.

Die schon häufig benutzte Vertauschung §. 3 (10.) der 6 verschiedenen Formen einer solchen Invariante führt hier zu der Identität

$$(6.)\quad \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} a_{\tau\varkappa\lambda} = \Sigma(a_\varrho a_\tau)^{\varkappa\lambda} a_{\sigma\varkappa\lambda} = \text{u. s. w.},$$

d. h. wegen (3.) zu der für die Coefficienten von Δf geltenden Bedingung:

$$b_{\varrho\sigma\tau} = b_{\varrho\tau\sigma} = b_{\sigma\varrho\tau} = b_{\sigma\tau\varrho} = b_{\tau\varrho\sigma} = b_{\tau\sigma\varrho},$$

derjenigen entsprechend, die unter den Coefficienten von f besteht. Demnach haben in

$$\Delta f = \Sigma b_{\varrho\sigma\tau} x_\varrho x_\sigma x_\tau$$

alle Coefficienten mit zwei gleichen Indices den Factor 3, und b_{123} den Factor 6. Aufserdem ist einleuchtend, dafs diese Coefficienten homogene Functionen der dritten Ordnung der $a_{\varkappa\lambda\mu}$ sind.

§. 12.

Aus der vorstehenden Darstellung der Coefficienten von Δf, lassen sich jetzt auch alle Operationen für diese homogene Function dritter Ordnung ausführen und ich gehe daher zunächst zu einem Grundprinzipe über, welches sich an diese Function anknüpfen läfst.

Wenn man die zweiten Ableitungen von $\varDelta f$:

$$\tfrac{1}{6}\frac{d^2\varDelta f}{dx_1^2},\quad \tfrac{1}{6}\frac{d^2\varDelta f}{dx_2^2},\quad \tfrac{1}{6}\frac{d^2\varDelta f}{dx_3^2},\quad \tfrac{1}{6}\frac{d^2\varDelta f}{dx_2 dx_3},\quad \tfrac{1}{6}\frac{d^2\varDelta f}{dx_1 dx_3},\quad \tfrac{1}{6}\frac{d^2\varDelta f}{dx_1 dx_2}$$

respective durch

$$B_{11},\quad B_{22},\quad B_{33},\quad B_{23},\quad B_{13},\quad B_{12}$$

bezeichnet, so ist

$$(1.)\qquad B_{\varrho\sigma} = b_{1\varrho\sigma}x_1 + b_{2\varrho\sigma}x_2 + b_{3\varrho\sigma}x_3$$

und wegen §. 11 (4.)

$$B_{\varrho\sigma} = \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}a_{1\varkappa\lambda}x_1 + \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}a_{2\varkappa\lambda}x_2 + \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}a_{3\varkappa\lambda}x_3$$

oder, weil $A_{\varkappa\lambda} = a_{1\varkappa\lambda}x_1 + a_{2\varkappa\lambda}x_2 + a_{3\varkappa\lambda}x_3$:

$$(2.)\qquad B_{\varrho\sigma} = \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}A_{\varkappa\lambda}.$$

Geht man nun zu Theorem 3. §. 8 zurück, und setzt in den Gleichungen (6.) desselben

$$U_{\varkappa\lambda} = A_{\varkappa\lambda},$$

so folgt aus (2.), dafs

$$\Theta_{\varkappa\lambda} = B_{\varkappa\lambda}$$

wird, und in Folge dessen, wegen der Gleichung (7.) in jenem Theorem:

$$(3.)\qquad S.A_{\varrho\sigma} = \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}B_{\varkappa\lambda}$$

oder:

$$S(a_{1\varrho\sigma}x_1 + a_{2\varrho\sigma}x_2 + a_{3\varrho\sigma}x_3) = \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}(b_{1\varkappa\lambda}x_1 + b_{2\varkappa\lambda}x_2 + b_{3\varkappa\lambda}x_3),$$

also, durch Vergleichung der Coefficienten von x_τ:

$$(4.)\qquad S.a_{\varrho\sigma\tau} = \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}b_{\tau\varkappa\lambda}.$$

Diese höchst merkwürdige Gleichung zeigt zunächst, dafs man, ebenso wie auf der linken Seite

$$a_{\varrho\sigma\tau} = a_{\varrho\tau\sigma} = \text{u. s. w.}$$

ist, auch auf *der rechten Seite die Indices* ϱ, σ, τ nach Belieben vertauschen kann.

Ich will jetzt durch das Differentiationszeichen δ andeuten, dafs man eine Function der Gröfsen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ in Bezug auf diese total differentiirt, und statt der Incremente die entsprechenden Gröfsen $b_{\varkappa\lambda\mu}$ substituirt, und die Wiederholungen dieser Operation durch δ^2, δ^3, ... bezeichnen, dann ist

$$(5.)\qquad \delta f = \varDelta f,$$

ferner

$$\begin{aligned}\delta b_{\varrho\sigma\tau} &= \delta\Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} a_{\tau\varkappa\lambda}\\ &= \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}\delta a_{\tau\varkappa\lambda} + \Sigma(a_\varrho \delta a_\sigma) a_{\tau\varkappa\lambda} + \Sigma(\delta a_\varrho a_\sigma) a_{\tau\varkappa\lambda}\\ &= \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} b_{\tau\varkappa\lambda} + \Sigma(a_\varrho a_\tau)^{\varkappa\lambda} b_{\sigma\varkappa\lambda} + \Sigma(a_\sigma a_\tau)^{\varkappa\lambda} b_{\varrho\varkappa\lambda}, \quad \text{§. 3 (10.)}.\end{aligned}$$

Da nun unter (4.) bewiesen ist, dafs diese Summen einander gleich sind und jede $= S.a_{\varrho\sigma\tau}$ ist, so folgt

$$(6.)\qquad \delta b_{\varrho\sigma\tau} = 3Sa_{\varrho\sigma\tau},$$

oder

$$(7.)\qquad \delta\Delta f = 3S.f$$

und hieraus:

Theorem 6.

Wenn man die Functionen f und Δf nach den Gröfsen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ differentiirt und statt der Incremente die entsprechenden Gröfsen $b_{\varkappa\lambda\mu}$ substituirt, so gehen dieselben bis auf einen constanten Factor der für δf, $=1$, für $\delta\Delta f$, $=3S$ ist, in einander über.

§. 13.

Von dem vorstehenden Satze aus gelangt man a priori zu den Resultaten, welche die Grundlage der von Herrn *Hesse* aufgestellten Theorie bilden, und welche erst nach Ueberwindung aller Schwierigkeiten der Theorie der homogenen Functionen dritter Ordnung in jenen Untersuchungen ermittelt werden können.

Herr *Hesse* beweist nämlich den folgenden Satz:

Wenn man die Functionaldeterminante von

$$af + b\Delta f$$

bildet, wo a und b beliebige Constanten sind, so ergiebt sich immer ein Ausdruck von derselben Form:

$$\alpha f + \beta\Delta f.$$

Ich werde jetzt die Operation

$$\Delta(af + b\Delta f)$$

ausführen, ohne den vorstehenden Satz vorauszusetzen und dadurch nicht allein den Beweis desselben sondern auch die Bildung der Functionen α und β in schliefslicher Endform geben.

Man beachte, dafs die Operationen

$$\delta,\ \delta^2,\ \delta^3,\ \delta^4\ \ldots$$

durch Differentiation sofort ausgeführt werden können, also bekannte sind und wegen des Theorems 6. auf f angewandt, immer zu Ausdrücken von der Form:

$$\lambda f + \mu\Delta f$$

führen müssen. Es soll nun zunächst die Operation:

$$\Delta(af+b\Delta f)$$

auf die Bildung von δf, $\delta^2 f$, $\delta^3 f$, $\delta^4 f$ zurückgeführt werden.

Setzt man in §. 11 (5.) statt $A_{\varkappa\lambda}: aA_{\varkappa\lambda}+bB_{\varkappa\lambda}$ so ist:

$$\Delta(af+b\Delta f) = \Sigma(aA_{\varkappa\lambda}+bB_{\varkappa\lambda})(aA+bB,\, aA+bB)^{\varkappa\lambda}$$

oder nach Potenzen von a und b geordnet:

$$(1.)\quad \Delta(af+b\Delta f)$$
$$= a^3\Sigma A_{\varkappa\lambda}(AA)^{\varkappa\lambda}+3a^2b\Sigma B_{\varkappa\lambda}(AA)^{\varkappa\lambda}+3ab^2\Sigma A_{\varkappa\lambda}(BB)^{\varkappa\lambda}+b^3\Sigma B_{\varkappa\lambda}(BB)^{\varkappa\lambda}.$$

Dies ergiebt sich durch Anwendung der *Maclaurin*schen Reihe, oder auch durch directe Auflösung.

Nun ist

$$\Sigma A_{\varkappa\lambda}(AA)^{\varkappa\lambda} = \Delta f = \delta f,$$

also mit fortwährender Berücksichtigung der Definition von δ, nach welcher $\delta A_{\varkappa\lambda} = B_{\varkappa\lambda}$ ist:

$$\delta^2 f = 3\Sigma B_{\varkappa\lambda}(AA)^{\varkappa\lambda}$$
$$\delta^3 f = 6\Sigma A_{\varkappa\lambda}(BB)^{\varkappa\lambda}+9S.\Sigma A_{\varkappa\lambda}(AA)^{\varkappa\lambda},$$

wenn man beachtet, dafs wegen Theorem 6.

$$\delta B_{\varkappa\lambda} = 3S.A_{\varkappa\lambda}$$

ist; ferner

$$\delta^4 f = 6\Sigma B_{\varkappa\lambda}(BB)^{\varkappa\lambda}+36S.\Sigma B_{\varkappa\lambda}(AA)^{\varkappa\lambda}$$
$$+9.\delta S.\Sigma A_{\varkappa\lambda}(AA)^{\varkappa\lambda}+27S.\Sigma B_{\varkappa\lambda}(AA)^{\varkappa\lambda}.$$

Aus diesen 4 Gleichungen ergeben sich sofort die 4 Coefficienten von a^3, a^2b, ab^2, b^3 in (1.), nämlich

$$\Sigma A_{\varkappa\lambda}(AA)^{\varkappa\lambda} = \delta f$$
$$3\Sigma B_{\varkappa\lambda}(AA)^{\varkappa\lambda} = \delta^2 f$$
$$3\Sigma A_{\varkappa\lambda}(BB)^{\varkappa\lambda} = \tfrac{1}{2}(\delta^3 f-9S.\delta f)$$
$$\Sigma B_{\varkappa\lambda}(BB)^{\varkappa\lambda} = \tfrac{1}{6}(\delta^4 f-9\delta f.\delta S-21S.\delta^2 f),$$

also durch Substitution in (1.):

$$(2.)\quad \Delta(af+b\Delta f)$$
$$= \left(a^3-\frac{9ab^2}{2}S-\tfrac{3}{2}b^3.\delta S\right)\delta f+(a^2b-\tfrac{7}{2}Sb^3)\delta^2 f+\tfrac{1}{2}ab^2\delta^3 f+\frac{b^3}{6}\delta^4 f.$$

Die Werthe von δf, $\delta^2 f$, $\delta^3 f$, $\delta^4 f$ sind aber:

$$(3.)\quad \begin{cases} \delta f = \Delta f, & §. 12\ (5.) \\ \delta^2 f = 3S.f, & §. 12\ (7.) \\ \delta^3 f = 3f.\delta S + 3S.\Delta f \\ \delta^4 f = 3f.\delta^2 S + 6\Delta f.\delta S + 9S^2 f = f(9S^2 + 3\delta^2 S) + 6\Delta f.\delta S \end{cases}$$

und durch Substitution in (2.)

$$(4.)\quad \Delta(af + b\Delta f)$$

$$= \left(3Sa^2b + 3\frac{\delta S}{2}ab^2 + \left(\frac{\delta^2 S}{2} - 9S^2\right)b^3\right)f + (a^3 - 3Sab^2 - \tfrac{1}{2}\delta Sb^3)\Delta f,$$

mithin

$$(5.)\quad \begin{cases} \alpha = 3Sa^2b + 3\frac{\delta S}{2}ab^2 + \left(\frac{\delta^2 S}{2} - 9S^2\right)b^3, \\ \beta = a^3 - 3Sab^2 - \tfrac{1}{2}\delta Sb^3, \end{cases}$$

wodurch der *Hesse*sche Satz vollständig erledigt ist.

Da die Coefficienten von a^3, a^2b, ab^2, b^3 in (1.) auch selbständig vorkommen, so will ich noch ihre Werthe, welche durch Substitution von (3.) entstehen, hier hersetzen:

$$(6.)\quad \begin{cases} \Sigma A_{\varkappa\lambda}(AA)^{\varkappa\lambda} = \Delta f \\ \Sigma B_{\varkappa\lambda}(AA)^{\varkappa\lambda} = S.f \\ \Sigma A_{\varkappa\lambda}(BB)^{\varkappa\lambda} = \frac{\delta S}{2}f - S.\Delta f \\ \Sigma B_{\varkappa\lambda}(BB)^{\varkappa\lambda} = \left(\frac{\delta^2 S}{2} - 9S^2\right)f - \frac{\delta S}{2}\Delta f. \end{cases}$$

Die Auswerthung der Constanten δS, $\delta^2 S$ ist zwar sofort ersichtlich, es erfordert aber die ganze Theorie noch eine besondere vereinfachte und gesetzmäfsige Darstellung derselben in expliciter Form, die ich sehr bald geben werde. Ich bemerke nur, dafs in der Folge

$$(7.)\quad \tfrac{1}{4}\delta S = T$$

gesetzt wird, dafs sich ferner

$$(8.)\quad \delta^2 S = 24S^2$$

ergiebt, und dafs sich mit Berücksichtigung hiervon der schliefsliche Werth für $\Delta(af + b\Delta f)$ in

$$(9.)\quad \Delta(af + b\Delta f) = (3Sa^2b + 6Tab^2 + 3S^2b^3)f + (a^3 - 3Sab^2 - 2Tb^3)\Delta f$$

verwandelt.

§. 14.

Der Weg, welcher in diesen Entwicklungen eingeschlagen ist, führt naturgemäfs allmälig zu den wichtigsten der Function f bei- und unterge-

ordneten Formen. Es ist in der That im vorigen Paragraph die Entwicklung von δS noch anzugeben, und diese erfolgt durch die nun zu betrachtende *erste zugehörige Form von f.*

Theorem 7.

Wenn man wie in §. 5 *das Produkt der 4 Determinanten:*

$$A,\ B,\ C,\ D$$

des unvollständigen Systemes

$$\begin{matrix} u_1, & u_2, & u_3 \\ v_1, & v_2, & v_3 \\ w_1, & w_2, & w_3 \\ p_1, & p_2, & p_3 \end{matrix}$$

bildet, nämlich

$$ABCD = \Sigma\pm v_1 w_2 p_3 . \Sigma\pm u_1 w_2 p_3 . \Sigma\pm u_1 v_2 p_3 . \Sigma\pm u_1 v_2 w_3$$

und statt der Potenzen und Produkte der dritten Ordnung:

$$v_\varkappa v_\lambda v_\mu, \qquad w_\varkappa w_\lambda w_\mu, \qquad p_\varkappa p_\lambda p_\mu$$

die entsprechenden

$$a_{\varkappa\lambda\mu}$$

substituirt, die Produkte $u_\varkappa u_\lambda u_\mu$ *aber ungeändert läfst, so erhält man eine homogene Function dritter Ordnung der Veränderlichen* u_1, u_2, u_3, *welche eine zugehörige Form von f ist.*

Ferner

Wenn man das totale Differential der ersten Invariante S in Bezug auf die Gröfsen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ *bildet und statt der Incremente die entsprechenden Potenzen und Producte dritter Ordnung:*

$$u_\varkappa u_\lambda u_\mu$$

substituirt, so erhält man dieselbe zugehörige Form multiplicirt mit $\frac{3}{2}$ *).

*) Man kann sich sehr leicht davon überzeugen, dafs die Definitionen der zugehörigen Formen durch partielle Ableitungen der entsprechenden Invarianten, so wichtig sie auch für die Theorie bleiben, doch für wirkliche Auswerthungen unzweckmäfsig sind, weil sie für *specielle* Formen nicht gebraucht werden können. Sind nämlich einzelne Coefficienten von f der Null oder einem andern Zahlenwerthe gleich, so kann man die partiellen Ableitungen nicht anders berechnen, als dafs man zuvor die volle allgemeine Form differentiirt und dann die speciellen Zahlenwerthe substituirt, wodurch der Vortheil der Specialisirung fast gänzlich verloren geht. Dasselbe findet in noch gröfserm Mafse statt, wenn zwischen den Coefficienten von f Relationen existiren.

Wegen des zweiten Theiles dieses Theoremes soll die erste zugehörige Form durch

$$S_f(u_1, u_2, u_3)$$

bezeichnet werden; sie ist, wie aus demselben sogleich ersichtlich wird, nicht allein in Bezug auf die Variabeln, sondern auch in Bezug auf die Coefficienten $a_{\varkappa\lambda\mu}$ homogen und von der dritten Ordnung.

Da der erste Theil des Theoremes einerseits wie in §. 5 die Gültigkeit der Gleichung:

$$(1.)\qquad S'_f(U_1, U_2, U_3) = r^4 . S_f(u_1, u_2, u_3)$$

sofort darthut, andrerseits zur expliciten Darstellung derselben sofort führt, so will ich zunächst die Uebereinstimmung beider Definitionen beweisen, und dann die fernern Entwicklungen an die erste Definition knüpfen.

Es gilt die symbolische Gleichung §. 5:

$$6S = A.B.C.D,$$

daher auch in demselben Sinne:

$$6\frac{dS}{da_{\varkappa\lambda\mu}} = \frac{d(ABCD)}{d(u_\varkappa u_\lambda u_\mu)} + \frac{d(ABCD)}{d(v_\varkappa v_\lambda v_\mu)} + \frac{d(ABCD)}{d(w_\varkappa w_\lambda w_\mu)} + \frac{d(ABCD)}{d(p_\varkappa p_\lambda p_\mu)}.$$

Die 4 partiellen Ableitungen werden aber einander gleich, wenn man für die Produkte

$$u_\varkappa u_\lambda u_\mu,\quad v_\varkappa v_\lambda v_\mu,\quad w_\varkappa w_\lambda w_\mu,\quad p_\varkappa p_\lambda p_\mu$$

dieselben Gröfsen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ substituirt, also hat man

$$6\frac{dS}{da_{\varkappa\lambda\mu}} = 4\frac{d(ABCD)}{d(u_\varkappa u_\lambda u_\mu)}.$$

Es ist aber $ABCD$ in Bezug auf die Produkte $u_\varkappa u_\lambda u_\mu$ linear, daher wird $\frac{d(ABCD)}{d(u_\varkappa u_\lambda u_\mu)}$ nach dem ersten Theile des 7ten Theorems, gleich dem Coefficienten von $u_\varkappa u_\lambda u_\mu$ in $S_f(u_1, u_2, u_3)$, also ist dieser Coefficient

$$= \tfrac{6}{4}\frac{dS}{da_{\varkappa\lambda\mu}} = \tfrac{3}{2}\frac{dS}{da_{\varkappa\lambda\mu}}$$

und in Folge dessen:

$$S_f(u_1, u_2, u_3) = \tfrac{3}{2}\Sigma!\frac{dS}{da_{\varkappa\lambda\mu}} u_\varkappa u_\lambda u_\mu,$$

was zu beweisen war. Das Zeichen $\Sigma!$ soll andeuten, dafs man nicht in Bezug auf $\varkappa$, λ, μ, sondern in Bezug auf alle von einander verschiedenen Ableitungen von S, also ***einfach*** summirt.

Um nun die Function $S_f(u_1, u_2, u_3)$ nach dem ersten Theile des 7ten Theorems durch die Coefficienten $a_{\varkappa\lambda\mu}$ auszudrücken, hat man, da wegen §. 6 (4.):

$$4ABCD = \Sigma\Sigma(w_\varkappa p_\lambda + w_\lambda p_\varkappa)(ww, pp)^{\varrho\sigma}(u_\varrho v_\sigma + u_\sigma v_\varrho)(uu, vv)^{\varkappa\lambda}$$

ist, und wegen §. 6 (6.)

$$(w_\varkappa p_\lambda + w_\lambda p_\varkappa)(ww, pp)^{\varrho\sigma} = 2(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma},$$

die Gleichung:

$$(2.)\quad 2ABCD = \Sigma\Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma}(u_\varrho v_\sigma + u_\sigma v_\varrho)(uu, vv)^{\varkappa\lambda},$$

und wenn man die Summation über ϱ, σ ausführt und den Factor 2 auf der linken Seite gegen den auf der rechten Seite entstehenden fortbebt:

$$(3.)\quad ABCD =$$

$$\left\{\begin{aligned} & u_1(\Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{11}(uu, vv)^{\varkappa\lambda} v_1 + \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{12}(uu, vv)^{\varkappa\lambda} v_2 + \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{13}(uu, vv)^{\varkappa\lambda} v_3) \\ & + u_2(\Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{12}(uu, vv)^{\varkappa\lambda} v_1 + \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{22}(uu, vv)^{\varkappa\lambda} v_2 + \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{23}(uu, vv)^{\varkappa\lambda} v_3) \\ & + u_3(\Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{13}(uu, vv)^{\varkappa\lambda} v_1 + \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{23}(uu, vv)^{\varkappa\lambda} v_2 + \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{33}(uu, vv)^{\varkappa\lambda} v_3). \end{aligned}\right.$$

Es ist aber wegen §. 3 (10.) die Vertauschung

$$(4.)\quad \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma}(uu, vv)^{\varkappa\lambda} = \Sigma((aa)^{\varrho\sigma}, uu)^{\varkappa\lambda} v_\varkappa v_\lambda$$

erlaubt, wo, um die Bezeichnung zu erläutern, z. B.

$$((aa)^{\varrho\sigma}, uu)^{11} = (a_2 a_2)^{\varrho\sigma} u_3^2 + (a_3 a_3)^{\varrho\sigma} u_2^2 - 2(a_2 a_3)^{\varrho\sigma} u_2 u_3$$

ist. Substituirt man nun (4.) in (3.) und setzt

$$v_\varkappa v_\lambda v_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu},$$

so entsteht aus (3.):

$$(5.)\quad S_f(u_1, u_2, u_3) = \left\{\begin{aligned} & u_1 \Sigma\{((aa)^{11} a_1)^{\varkappa\lambda} + ((aa)^{12} a_2)^{\varkappa\lambda} + ((aa)^{13} a_3)^{\varkappa\lambda}\} u_\varkappa u_\lambda \\ & + u_2 \Sigma\{((aa)^{12} a_1)^{\varkappa\lambda} + ((aa)^{22} a_2)^{\varkappa\lambda} + ((aa)^{23} a_3)^{\varkappa\lambda}\} u_\varkappa u_\lambda \\ & + u_3 \Sigma\{((aa)^{13} a_1)^{\varkappa\lambda} + ((aa)^{23} a_2)^{\varkappa\lambda} + ((aa)^{33} a_3)^{\varkappa\lambda}\} u_\varkappa u_\lambda \end{aligned}\right\}$$

$$= \Sigma\Sigma((aa)^{\varrho\mu} a_\varrho)^{\varkappa\lambda} u_\varkappa u_\lambda u_\mu$$

in einer Form, die nach den Variabeln geordnet ist, und ein vollständig symmetrisches Gesetz darbietet.

Obwohl ich bald zeigen werde, dafs die in der ersten Darstellung (5.) vorkommenden Summen sich theilweise noch zusammenziehen lassen, so bietet doch diese Darstellung den grofsen Vortheil, *dafs die respective in* u_1, u_2, u_3 *multiplicirten Summen die mit dem Faktor* $\frac{1}{3}$ *versehenen Ableitungen von* S_f *nach* u_1, u_2, u_3 *sind.* Um dies zu beweisen bemerke man, dafs das Differential von S_f in Bezug auf die Variabeln u_1, u_2, u_3 dadurch gefunden

werden kann, dafs man

$$d(ABCD)$$

bildet, und dann die symbolische Substitution vollzieht. Es ist aber

$$d(ABCD) = ACDdB + ABDdC + ABCdD,$$

weil A von u_1, u_2, u_3 unabhängig ist. Die 3 Ausdrücke rechter Hand werden einander gleich, wenn man die Gröfsen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ substituirt, daher

$$dS_f(u_1, u_2, u_3) = 3ACDdB,$$

oder

$$dS_f(u_1, u_2, u_3) = 3\Sigma\pm v_1 w_2 p_3 \, \Sigma\pm u_1 v_2 p_3 \, \Sigma\pm u_1 v_2 w_3 \, \Sigma\pm du_1 w_2 p_3.$$

Das Produkt der beiden mittelsten Summen rechts giebt nach §. 6 (3.)

$$\Sigma\pm u_1 v_2 p_3 \, \Sigma\pm u_1 v_2 w_3 = -\tfrac{1}{2}\Sigma(w_\varkappa p_\lambda + w_\lambda p_\varkappa)(uu, vv)^{\varkappa\lambda}$$

und auf ähnliche Weise das Produkt der beiden äufsersten:

$$\Sigma\pm v_1 w_2 p_3 \, \Sigma\pm du_1 w_2 p_3 = -\tfrac{1}{2}\Sigma(v_\sigma du_\varrho + v_\varrho du_\sigma)(ww, pp)^{\varkappa\lambda},$$

also

$$4dS_f(u_1, u_2, u_3) = 3\Sigma\Sigma(w_\varkappa p_\lambda + w_\lambda p_\varkappa)(ww, pp)^{\varrho\sigma}(du_\varrho v_\sigma + du_\sigma v_\varrho)(uu, vv)^{\varkappa\lambda},$$

also analog mit (2.):

$$2dS_f(u_1, u_2, u_3) = 3\Sigma\Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma}(du_\varrho v_\sigma + du_\sigma v_\varrho)(uu, vv)^{\varkappa\lambda}$$

mit welchem Ausdrucke dieselben weitern Operationen vorzunehmen sind wie mit (2.). Es ergiebt sich aber alsdann das Resultat (5.) mit dem Unterschiede, dafs vor den Summen statt u_1, u_2, u_3 deren Incremente du_1, du_2, du_3 stehen, und dafs die ganze rechte Seite den Factor 3 hat, d. h. es wird

$$dS_f(u_1, u_2, u_3) = 3(du_1\Sigma_1 + du_2\Sigma_2 + du_3\Sigma_3),$$

wenn man der Kürze halber die 3 Summen in (5.) durch Σ_1, Σ_2, Σ_3 bezeichnet, so dafs

$$(6.)\quad \begin{cases} \frac{1}{3}\frac{dS_f(u_1, u_2, u_3)}{du_1} = \Sigma_1, \\ \frac{1}{3}\frac{dS_f(u_1, u_2, u_3)}{du_2} = \Sigma_2, \\ \frac{1}{3}\frac{dS_f(u_1, u_2, u_3)}{du_3} = \Sigma_3. \end{cases}$$

Bezeichnet man die zugehörige Form S_f in entwickelter Gestalt durch

$$S_f(u_1, u_2, u_3) = \Sigma s_{\varkappa\lambda\mu} u_\varkappa u_\lambda u_\mu$$

und setzt fest, dafs

$$s_{\varkappa\lambda\mu} = s_{\varkappa\mu\lambda} = s_{\lambda\varkappa\mu} = s_{\lambda\mu\varkappa} = s_{\mu\varkappa\lambda} = s_{\mu\lambda\varkappa}$$

ist, wie bei der Bezeichnung von f, so ist

$$\frac{1}{3}\frac{dS_f(u_1, u_2, u_3)}{du_\mu} = \Sigma s_{\varkappa\lambda\mu} x_\varkappa x_\lambda \quad (\S.\ 6\ (5.)),$$

wo μ constanter Index ist; da aber wegen (6.)

$$\frac{1}{3}\frac{dS_f(u_1, u_2, u_3)}{du_\mu} = \Sigma_\mu = \Sigma\{((aa)^{1\mu} a_1)^{\varkappa\lambda} + ((aa)^{2\mu} a_2)^{\varkappa\lambda} + ((aa)^{3\mu} a_3)^{\varkappa\lambda}\} u_\varkappa u_\lambda$$

ist, so folgt durch Vergleichung:

$$(7.)\qquad s_{\varkappa\lambda\mu} = ((aa)^{1\mu} a_1)^{\varkappa\lambda} + ((aa)^{2\mu} a_2)^{\varkappa\lambda} + ((aa)^{3\mu} a_3)^{\varkappa\lambda},$$

und weil $s_{\varkappa\lambda\mu}$ ungeändert bleibt, wenn man die Indices $\varkappa$, λ, μ mit einander vertauscht, so hat auch die rechte Seite von (7.) diese Eigenschaft. Dieser Satz ist sehr schwer a posteriori zu verificiren und deshalb für die Function S_f charakteristisch. Ueberhaupt ist diese gesetzmäfsige Darstellung der Coefficienten $s_{\varkappa\lambda\mu}$ nicht leicht auf einem andern Wege zu erreichen. Sie ist aber besonders wegen des zweiten Theils des 7ten Theorems wichtig, weil man jetzt nach demselben *die partielle Ableitung der Invariante S explicite dargestellt hat,* nämlich:

$$(8.)\quad \begin{cases} \dfrac{dS}{da_{\varkappa\varkappa\varkappa}} = \frac{2}{3} s_{\varkappa\varkappa\varkappa} = ((aa)^{1\varkappa} a_1)^{\varkappa\varkappa} + ((aa)^{2\varkappa} a_2)^{\varkappa\varkappa} + ((aa)^{3\varkappa} a_3)^{\varkappa\varkappa} \\ \dfrac{dS}{da_{\varkappa\varkappa\lambda}} = \frac{2}{3}.3 s_{\varkappa\varkappa\lambda} = 2\{((aa)^{1\varkappa} a_1)^{\varkappa\lambda} + ((aa)^{2\varkappa} a_2)^{\varkappa\lambda} + ((aa)^{3\varkappa} a_3)^{\varkappa\lambda}\} \\ \dfrac{dS}{da_{\varkappa\lambda\mu}} = \frac{2}{3}.6 s_{\varkappa\lambda\mu} = 4\{((aa)^{1\mu} a_1)^{\varkappa\lambda} + ((aa)^{2\mu} a_2)^{\varkappa\lambda} + ((aa)^{3\mu} a_3)^{\varkappa\lambda}\}, \end{cases}$$

je nachdem alle 3 Indices oder nur 2 einander gleich oder alle von einander verschieden sind. Da die 36 Verbindungen $(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}$ schon als bekannt vorausgesetzt werden können, so ist hiernach die Berechnung der Differentialquotienten von S leicht auszuführen.

§. 15.

Die Fundamentalgleichungen für die Verbindungen $(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}$ (§. 6 (8.) (9.)) führen zu einer Eigenschaft der Differentialquotienten von S nach den Gröfsen $a_{\varkappa\lambda\mu}$, welche allen Invarianten gemeinschaftlich ist, und von einem andern Standpunkt a priori entwickelt werden kann.

Theorem 8.

Wenn man in den folgenden 9 linearen Gleichungen

$$(1.)\quad \begin{cases} \Sigma a_{1\varkappa\lambda} s_{1\varkappa\lambda} = 2S, & \Sigma a_{1\varkappa\lambda} s_{2\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma a_{1\varkappa\lambda} s_{3\varkappa\lambda} = 0, \\ \Sigma a_{2\varkappa\lambda} s_{1\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma a_{2\varkappa\lambda} s_{2\varkappa\lambda} = 2S, & \Sigma a_{2\varkappa\lambda} s_{3\varkappa\lambda} = 0, \\ \Sigma a_{3\varkappa\lambda} s_{1\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma a_{3\varkappa\lambda} s_{2\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma a_{3\varkappa\lambda} s_{3\varkappa\lambda} = 2S \end{cases}$$

die 10 Gröfsen $s_{\varkappa\lambda\mu}$ als einfache Unbekannte betrachtet, so giebt es immer eine Lösung der Gleichungen, welche durch die partiellen Differentialquotienten von S darstellbar ist, nämlich

$$s_{\varkappa\varkappa\varkappa} = \tfrac{3}{2}\frac{dS}{da_{\varkappa\varkappa\varkappa}}, \qquad 3s_{\varkappa\varkappa\lambda} = \tfrac{3}{2}\frac{dS}{da_{\varkappa\varkappa\lambda}}, \qquad 6s_{\varkappa\lambda\mu} = \tfrac{3}{2}\frac{dS}{da_{\varkappa\lambda\mu}}.$$

Da die Anzahl der Gleichungen um eine geringer ist, als die Anzahl der Unbekannten, so existiren überhaupt nur zwei Lösungen derselben, welche von einander unabhängig sind; die zweite Lösung wird sich ebenfalls im Laufe dieser Untersuchungen ergeben.

Der Beweis des Theorems ist folgender:

Es seien ϱ und σ die constanten Indices über welche nicht summirt wird, so folgt aus der Gleichung (7.) des vorigen Paragraphen:

$$\Sigma\{((aa)^{1\varrho}a_1)^{\varkappa\lambda} + ((aa)^{2\varrho}a_2)^{\varkappa\lambda} + ((aa)^{3\varrho}a_3)^{\varkappa\lambda}\}u_\varkappa u_\lambda = \tfrac{1}{3}\frac{dS_f}{du_\varrho}$$
$$= s_{\varrho 11}u_1^2 + s_{\varrho 22}u_2^2 + s_{\varrho 33}u_3^2 + 2s_{\varrho 23}u_2u_3 + 2s_{\varrho 13}u_1u_3 + 2s_{\varrho 12}u_1u_2,$$

und wenn man statt der Potenzen und Produkte zweiter Ordnung $u_\varkappa u_\lambda$ die entsprechenden $a_{\sigma\varkappa\lambda}$ substituirt,

$$\Sigma s_{\varrho\varkappa\lambda}a_{\sigma\varkappa\lambda} = \Sigma((aa)^{1\varrho}a_1)^{\varkappa\lambda}a_{\sigma\varkappa\lambda} + \Sigma((aa)^{2\varrho}a_2)^{\varkappa\lambda}a_{\sigma\varkappa\lambda} + \Sigma((aa)^{3\varrho}a_3)^{\varkappa\lambda}a_{\sigma\varkappa\lambda}$$

also mit Hülfe des Vertauschungssatzes:

$$\Sigma s_{\varrho\varkappa\lambda}a_{\sigma\varkappa\lambda} = \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{1\varrho}(a_1a_\sigma)^{\varkappa\lambda} + \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{2\varrho}(a_2a_\sigma)^{\varkappa\lambda} + \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{3\varrho}(a_3a_\sigma)^{\varkappa\lambda}.$$

Ist nun ϱ von σ verschieden so sind diese 3 Summen wegen §. 6 (9.) = Null, und ist $\varrho = \sigma$, so ist wegen §. 6 (8.) eine der 3 Summen $= S$, die beiden andern $= \frac{1}{2}S$, mithin

$$(2.)\qquad \Sigma a_{\varrho\varkappa\lambda}s_{\sigma\varkappa\lambda} = 0, \qquad \Sigma a_{\varrho\varkappa\lambda}s_{\varrho\varkappa\lambda} = 2S,$$

wenn ϱ und σ verschieden sind, was zu beweisen war.

§. 16.

Nach §. 14 (5.) ist

$$(1.)\qquad S_f(u_1, u_2, u_3) = \Sigma\Sigma((aa)^{\varrho\mu}a_\varrho)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu,$$

wo die Summation über alle Werthe 1, 2, 3 für ϱ, $\varkappa$, λ, μ auszudehnen ist. Nach dem Vertauschungssatze ist aber auch

$$(2.)\qquad S_f(u_1, u_2, u_3) = \Sigma\Sigma((a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\mu}(a_\varrho, uu)^{\varkappa\lambda})u_\mu,$$

und beide Darstellungen zeichnen sich durch eine gewisse Symmetrie aus, die für allgemeine Entwicklungen schätzbar ist.

Nichts destoweniger sind diese Formen für specielle Berechnungen bedeutend verkürzbar, indem sie den bei allen Determinanten und Invarianten vorkommenden Relationen genügen. Es gilt hier das folgende Theorem:

Theorem 9.

Wenn man in (1.) *die Summation in Bezug auf* ϱ *unterläfst und* $\varrho = 1$, 2 *oder* 3 *setzt, so wird*

$$(3.)\quad \Sigma((aa)^{1\mu}a_1)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu = \Sigma((aa)^{2\mu}a_2)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu = \Sigma((aa)^{3\mu}a_3)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu = \tfrac{1}{3}S_f(u_1, u_2, u_3)$$

und

$$(4.)\quad \Sigma((aa)^{\varrho\mu}a_\sigma)u_\varkappa u_\lambda u_\mu = 0,$$

wo ϱ *und* σ *verschiedene aber constante Indices sind.*

Um dieses Theorem von dem hier zu Grunde liegenden Principe aus zu beweisen, soll allein das Produkt:

$$B.C.D = -\Sigma u_1 w_2 p_3 \Sigma u_1 v_2 p_3 \Sigma u_1 v_2 w_3$$

ohne A gebildet werden, welches in Bezug auf jedes der Systeme $v_\varkappa$, $w_\varkappa$, $p_\varkappa$ nur von der zweiten Ordnung ist, und dann sollen statt der Potenzen und Produkte zweiter Ordnung:

$v_\varkappa v_\lambda$	die	entsprechenden		$a_{1\varkappa\lambda}$
$w_\varkappa w_\lambda$	-	-	-	$a_{2\varkappa\lambda}$
$p_\varkappa p_\lambda$	-	-	-	$a_{3\varkappa\lambda}$

substituirt werden.

Es ist, §. 6 (3.),

$$2CD = -\Sigma(uu, vv)^{\varkappa\lambda}(w_\varkappa p_\lambda + w_\lambda p_\varkappa)$$

oder nach Ausführung der Substitution für $v_\varkappa v_\lambda$

$$(5.)\quad 2CD = -\Sigma(uu, a_1)^{\varkappa\lambda}(w_\varkappa p_\lambda + w_\lambda p_\varkappa).$$

Da

$$B = -\{u_1(w_2p_3 - w_3p_2) + u_2(w_3p_1 - w_1p_3) + u_3(w_1p_2 - w_2p_1)\}$$

ist, und nach Ausführung einer sehr einfachen Multiplication

$$(6.)\quad \begin{cases} (w_2p_3 - w_3p_2)(w_\varkappa p_\lambda + w_\lambda p_\varkappa) = (a_\varkappa a_\lambda)^{11} \\ (w_3p_1 - w_1p_3)(w_\varkappa p_\lambda + w_\lambda p_\varkappa) = (a_\varkappa a_\lambda)^{12} \\ (w_1p_2 - w_2p_1)(w_\varkappa p_\lambda + w_\lambda p_\varkappa) = (a_\varkappa a_\lambda)^{13} \end{cases}$$

wird, nachdem für $w_\varkappa w_\lambda$ und $p_\varkappa p_\lambda$ die Substitution ausgeführt ist, so folgt:

$$(7.)\quad 2BCD = u_1\Sigma(uu, a_1)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{11} + u_2\Sigma(uu, a_1)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{12} + u_3\Sigma(uu, a_1)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{13}$$

oder nach dem Vertauschungssatze:

$$2BCD = u_1\Sigma((aa)^{11}a_1)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda + u_2\Sigma((aa)^{12}a_1)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda + u_3\Sigma((aa)^{13}a_1)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda$$
$$= \Sigma((aa)^{1\mu}a_1)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu.$$

Man ändert das Produkt BCD nicht, wenn man zuerst BD bildet und mit C multiplicirt, oder BC bildet und mit D multiplicirt, im ersten Falle würde sich

$$2BCD = \Sigma((aa)^{2\mu}a_2)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu,$$

im zweiten

$$2BCD = \Sigma((aa)^{3\mu}a_3)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu$$

ergeben, mithin ist

$$\Sigma((aa)^{1\mu}a_1)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu = \Sigma((aa)^{2\mu}a_2)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu = \Sigma((aa)^{3\mu}a_3)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu;$$

die Summe dieser 3 Summen ist aber =

$$\Sigma\Sigma((aa)^{\varrho\mu}a_\varrho)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu = S_f(u_1, u_2, u_3),$$

daher ist jede derselben $= \frac{1}{3}S_f(u_1, u_2, u_3)$ w. z. b. w.

Hätte man statt $v_\varkappa v_\lambda = a_{1\varkappa\lambda}$ zu setzen, was zu Gleichung (5.) führte,

$$v_\varkappa v_\lambda = a_{\varrho\varkappa\lambda}$$

substituirt, wo $\varrho = 2$ oder 3 sein soll, so würde sich auf demselben Wege

$$2BCD = \Sigma((aa)^{1\mu}a_\varrho)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu$$

ergeben haben; bildet man aber, wenn $\varrho = 3$, zuerst BD und multiplicirt mit C, so würden die (6.) entsprechenden Gleichungen, z. B. die erste:

$$(8.)\quad (v_2p_3 - v_3p_2)(v_\varkappa p_\lambda + v_\lambda p_\varkappa) = v_2v_\varkappa p_3p_\lambda + v_2v_\lambda p_3p_\varkappa - v_3v_\varkappa p_2p_\lambda - v_3v_\lambda p_2p_\varkappa$$
$$= a_{32\varkappa}a_{33\lambda} + a_{32\lambda}a_{33\varkappa} - a_{33\varkappa}a_{32\lambda} - a_{33\lambda}a_{32\varkappa}$$
$$= 0,$$

und ebenso die übrigen; bildet man ferner, wenn $\varrho = 2$, zuerst BC und multiplicirt mit D, so würden sich wieder die (6.) entsprechenden Gleichungen (8.) analog ergeben, daher folgt

$$\Sigma((aa)^{1\mu}a_\varrho)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu = 0,$$

wenn $\varrho = 2$ oder 3 ist, und überhaupt die Gleichung (4.).

Als Controlle der vorstehenden oder der Gleichung (4.) kann man bemerken, dafs sie durch Substitution von

$$u_\varkappa u_\lambda u_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu}$$

in

$$\Sigma((aa)^{\varrho\mu}a_\sigma)^{\varkappa\lambda}a_{\varkappa\lambda\mu} = 0$$

oder durch Vertauschung und durch Substitution von 1, 2, 3 für μ in

$$\Sigma(aa)^{\varrho 1}(a_\sigma a_1)^{\varkappa\lambda}+\Sigma(aa)^{\varrho 2}(a_\sigma a_2)^{\varkappa\lambda}+\Sigma(aa)^{\varrho 3}(a_\sigma a_3)^{\varkappa\lambda} = 0$$

übergeht, welche Gleichung wirklich wegen §. 6 (9.) erfüllt ist; doch kann aus (4.) nicht das Verschwinden der einzelnen Summen des vorstehenden Ausdruckes abgeleitet werden.

Man erhält schliefslich noch Relationen zwischen den Bestandtheilen der Function S_f, wenn man die Relationen für S (§. 6 (8.), (9.)) nach den Coefficienten $a_{\varkappa\lambda\nu}$ differentiirt, statt der Incremente die entsprechenden Potenzen und Produkte $u_\varkappa u_\lambda u_\mu$ substituirt und beachtet, dafs zugleich S in $\frac{3}{4}S_f$ übergeht.

Wendet man diese Operation auf S_f selbst an, setzt aber statt der Potenzen und Produkte $u_\varkappa u_\lambda u_\mu$ zuvor die davon verschiedenen $\eta_\varkappa\eta_\lambda\eta_\mu$, so erhält man eine Function der Variabeln u_1, u_2, u_3 und η_1, η_2, η_3, *deren Coefficienten das doppelte der zweiten Ableitungen von S sind*, vorausgesetzt, dafs man den nach der Differentiation sich vorfindenden Zahlenfactor 3 fortläfst; in der That kann man auf eine sehr einfache und gesetzmäfsige Weise diese Differentiation ausführen, wenn man bemerkt, dafs wegen (3.) die Function $\frac{1}{3}S_f$ nach den Coefficienten $a_{1\varkappa\lambda}$ geordnet und differentiirt

$$\Sigma((aa)^{1\mu}uu)^{\varkappa\lambda}\,da_{1\varkappa\lambda}\,u_\mu,$$

nach den Coefficienten $a_{2\varkappa\lambda}$ geordnet und differentiirt

$$\Sigma((aa)^{2\mu}uu)^{\varkappa\lambda}\,da_{2\varkappa\lambda}\,u_\mu,$$

nach den Coefficienten $a_{3\varkappa\lambda}$ geordnet und differentiirt

$$\Sigma((aa)^{3\mu}uu)^{\varkappa\lambda}\,da_{3\varkappa\lambda}\,u_\mu$$

giebt. Bezeichnet man also

$$\tfrac{1}{3}\Sigma\frac{dS_f(u_1,u_2,u_3)}{da_{\varkappa\lambda\tau}}\eta_\varkappa\eta_\lambda\eta_\tau \text{ durch } S_{1f}(u_1, u_2, u_3; \eta_1, \eta_2, \eta_3),$$

so giebt die Summe der vorstehenden Ausdrücke

$$S_{1f}(u_1, u_2, u_3; \eta_1, \eta_2, \eta_3)$$
$$= \Sigma((aa)^{1\mu}uu)^{\varkappa\lambda}\eta_1\eta_\varkappa\eta_\lambda u_\mu+\Sigma((aa)^{2\mu}uu)^{\varkappa\lambda}\eta_2\eta_\varkappa\eta_\lambda u_\mu+\Sigma((aa)^{3\mu}uu)^{\varkappa\lambda}\eta_3\eta_\varkappa\eta_\lambda u_\mu$$

oder

$$(9.)\quad \begin{cases} S_{1f}(u_1,u_2,u_3;\eta_1,\eta_2,\eta_3) = \Sigma((aa)^{\tau\mu}uu)^{\varkappa\lambda}\eta_\varkappa\eta_\lambda\eta_\tau u_\mu \\ \qquad = \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\tau\mu}\eta_\tau u_\mu(\eta\eta, uu)^{\varkappa\lambda}. \end{cases}$$

In dem speciellen Falle, wo die Variabeln η und u einander gleich sind, giebt die letzte Form $S_{1f}=0$, weil $(\eta\eta, uu)^{\varkappa\lambda}=(uu, uu)^{\varkappa\lambda}=0$ wird; man erhält daher den Satz:

Wenn man die Invariante S zweimal nach den Gröfsen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ differentiirt, und jedesmal statt der Incremente die entsprechenden Potenzen und Produkte $u_\varkappa u_\lambda u_\mu$ substituirt, so entsteht identisch Null.

Die Coefficienten der Form (9.) sind übrigens die ersten Ableitungen der $s_{\varkappa\lambda\mu}$ dividirt durch 3, letztere aber die ersten Ableitungen von S multiplicirt mit $\frac{3}{2}$, also sind die Coefficienten von (9.) wirklich die Hälften der zweiten Ableitungen von S.

Von den zweiten Grundformen der homogenen Functionen dritter Ordnung von drei Veränderlichen.

§. 17.

Aus den Sätzen des §. 2 geht hervor, dafs man durch jede für eine Covariante, zugehörige Form oder Zwischenform gebildete Grundform eine solche auch für die ursprüngliche Function erhält. Geht man insbesondere von denjenigen bekannten Formen aus, welche in Bezug auf die Variabeln von *derselben* Ordnung sind, wie die ursprüngliche Function, so hat man auf diese die Theorie der *ersten* Grundformen nur wörtlich anzuwenden, um neue zu erhalten.

Es läfst sich dieser Satz auch noch dahin erweitern, dafs, wie sogleich ersichtlich ist, jede aus einem Functionensystem gebildete simultane Grundform ebenfalls Grundform der ursprünglichen wird, wenn dasselbe aus der ursprünglichen Form und ihren bereits bekannten bei- und zugeordneten Formen besteht. Man kann denselben daher als zweckmäfsigen Ausgangspunkt für eine weitere Entwickelung der Theorie anwenden, wenngleich nicht zu verkennen ist, dafs Originaldefinitionen auch der zweiten Formen, selbst wenn sie complicirter sind, zur Entwickelung der Uebergänge solcher Formen, welche ganz oder theilweise von einander abhangen, von grofser Wichtigkeit sind. Ich werde die Theorie nach beiden Richtungen verfolgen, und zunächst einen sehr einfachen Satz über die Bildung simultaner Grundformen hervorheben.

Theorem 10.

Wenn $\varDelta_a$ eine Grundform für die homogene Function f der p^{ten} Ordnung bedeutet, deren Coefficienten durch die Buchstaben a bezeichnet werden, und $\varDelta_{ab}$ eine simultane Grundform für f und eine zweite homogene Function φ der p^{ten} Ordnung, deren Coefficienten durch b bezeichnet werden, so kann man immer eine Form $\varDelta_{ab}$ dadurch erhalten,

dafs man Δ_a nach den Coefficienten a differentiirt und statt der Incremente die entsprechenden b substituirt.

Es folgt hieraus unmittelbar, dafs man die Differentiationen so oft wiederholen kann, als die Ordnung von Δ_a in Bezug auf die Gröfsen a beträgt, wofern Δ_a eine ganze Function ist.

Der Beweis des Satzes ergiebt sich sofort, wenn man bemerkt, dafs die *entsprechende* Grundform für die Function $f+h.\varphi$, wo h eine Constante bedeutet, nämlich Δ_{a+hb}, der Gleichung

$$\Delta'_{a'+hb'} = r^{\lambda}.\Delta_{a+hb}$$

genügt, wenn der Voraussetzung gemäfs,

$$\Delta'_{a'} = r^{\lambda}.\Delta_a$$

gesetzt wird. In Folge davon müssen alle Coefficienten der Potenzen von h in der Entwickelung von Δ_{a+hb} *dieselbe* Eigenschaft haben, der Coefficient von h giebt aber die im Theorem bezeichnete Form Δ_{ab}, und die übrigen sind durch die höheren Differentialquotienten darstellbar, wie die *Maclaurin*sche Reihe lehrt. Es ergiebt sich überdies, dafs der Exponent λ in r^{λ} für alle diese Grundformen derselbe ist.

§. 18.

Wenn man die beiden Functionen

$$(1.)\quad \begin{cases} f(x_1, x_2, x_3) = \Sigma a_{\varkappa\lambda\mu}\, x_\varkappa x_\lambda x_\mu \\ \Delta f(x_1, x_2, x_3) = \Sigma b_{\varkappa\lambda\mu}\, x_\varkappa x_\lambda x_\mu \end{cases}$$

zu Grunde legt, und auf dieselben das 10[te] Theorem anwendet, d. h. jede Form, die in Beziehung auf f Grundform ist, nach den Gröfsen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ differentiirt und statt der Incremente die entsprechenden $b_{\varkappa\lambda\mu}$ substituirt, so ist diese Operation keine andere als die bereits in §. 12 betrachtete, welche dort durch δ bezeichnet wurde. Behält man jetzt diese Bezeichnung bei und bemerkt, dafs wegen §. 11 (1.)

$$\Delta' f(X_1, X_2, X_3) = r^2.\Delta f(x_1, x_2, x_3)$$

ist, also die Coefficienten $b'_{\varkappa\lambda\mu}$ den Factor r^2 mit sich führen, so giebt jede Grundform Δ für f, welche der Gleichung

$$\Delta' = r^{\lambda}.\Delta$$

genügt, eine neue $\delta\Delta$, für welche die Gleichung:

$$(2.)\quad \delta\Delta' = r^{\lambda+2}.\delta\Delta$$

stattfindet, daher folgt:

Theorem 11.

Wenn man auf die ersten Grundformen: die Invariante S, die Zwischenform Θ, die zugehörige Form S_f und die Covariante Δf, welche

den Gleichungen:

$$(3.)\quad S' = r^4 S,\quad \Theta' = r^2\Theta,\quad S'_f = r^4 S_f,\quad \Delta' f = r^2 \Delta f$$

Genüge leisten, die Operation δ anwendet, und die Bezeichnungen:

$$(4.)\quad T = \tfrac{1}{6}\delta S,\quad H = \tfrac{1}{2}\delta\Theta,\quad T_f = \tfrac{1}{6}\delta S_f$$

einführt, überdies bemerkt, dafs wegen §. 12 (7.)

$$(5.)\quad \tfrac{1}{2}\delta\Delta f = f.S$$

ist, so entstehen die Grundformen:

T als zweite Invariante,
H als zweite Zwischenform,
T_f als zweite zugehörige Form,
$f.S$ als zweite Covariante,

von denen die letztere abgesehen vom constanten Factor S, die ursprünglich gegebene homogene Function ist, und man erhält:

$$(6.)\quad T' = r^6.T,\quad H' = r^4.H,\quad T'_f = r^6.T_f,\quad f'.S' = r^4.f.S,$$

wo die Exponenten von r überall um zwei Einheiten höher sind, als in den für die ersten Grundformen stattfindenden Gleichungen (3.).

Die Ausführung der Differentiation δ ist in allen Fällen bereits im Vorstehenden gegeben, so dafs man die explicite Form sogleich hinschreiben kann; bemerkt man nämlich, dafs nach §. 14 (8.):

$$\tfrac{1}{4}\frac{dS}{da_{\varkappa\lambda\mu}} = 6s_{\varkappa\lambda\mu},$$

$$\tfrac{1}{4}\frac{dS}{da_{\varkappa\lambda\lambda}} = 3s_{\varkappa\lambda\lambda},$$

$$\tfrac{1}{4}\frac{dS}{da_{\varkappa\varkappa\varkappa}} = s_{\varkappa\varkappa\varkappa},$$

ist, so folgt

$$\tfrac{1}{4}\delta S = \Sigma s_{\varkappa\lambda\mu} b_{\varkappa\lambda\mu},$$

mithin:

$$(7.)\quad T = \tfrac{1}{6}\delta S = \tfrac{1}{6}\Sigma s_{\varkappa\lambda\mu} b_{\varkappa\lambda\mu}.$$

Man erhält also $6T$, wenn man in S_f, statt der Produkte $u_\varkappa u_\lambda u_\mu$ die entsprechenden $b_{\varkappa\lambda\mu}$ substituirt, folglich wegen §. 16 (1.):

$$(8.)\quad 6T = \Sigma\Sigma((aa)^{\varrho\sigma}a_\varrho)^{\varkappa\lambda} b_{\sigma\varkappa\lambda} = \Sigma\Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma}(a_\varrho b_\sigma)^{\varkappa\lambda}.$$

Da ferner nach §. 16 (9.)

$$S_{1f} = \Sigma l\tfrac{1}{6}\frac{dS_f}{da_{\varkappa\lambda\tau 1}}\eta_\varkappa\eta_\lambda\eta_\tau = \Sigma\Sigma((aa)^{1\mu}uu)^{\varkappa\lambda}\eta_\varkappa\eta_\lambda\eta_\tau u_\mu$$

ist, so ergiebt sich $\frac{1}{3}\delta S_f$, wenn man in der vorstehenden Gleichung statt $\eta_\varkappa \eta_\lambda \eta_\tau$ die entsprechenden $b_{\varkappa\lambda\tau}$ substituirt, also

$$T_f = \tfrac{1}{3}\delta S_f = \Sigma\Sigma((a\,a)^{\tau\mu}uu)^{\varkappa\lambda}b_{\varkappa\lambda\tau}.u_\mu$$

oder

$$(9.)\qquad T_f(u_1, u_2, u_3) = \Sigma\Sigma((a\,a)^{\tau\mu}b_\tau)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu.$$

Man beachte, dafs sowohl bei (8.) als (9.) die *directen* Differentiationen die dreifachen Resultate in *nicht* zusammengezogener Form liefern würden, was besonders hervortritt, wenn man (9.) mit der Darstellung §. 16 (1.) von S_f vergleicht, die nach der gegenwärtigen Indicesbezeichnung

$$S_f = \Sigma\Sigma((a\,a)^{\tau\mu}\overline{a_\tau})^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu$$

geschrieben werden kann. Es zeigt nämlich (9.), dafs man nur in Bezug auf die durch $\overline{a_\tau}$ angedeuteten Gröfsen $a_{\varrho\sigma\tau}$ zu differentiiren hat, um $\frac{1}{3}dS_f$ zu erhalten.

Die Darstellung der zweiten Zwischenform ist sehr einfach; ich erinnere zu diesem Ende, dafs (§. 9 (4.)) und (§. 12 (1.))

$$(10.)\qquad \begin{cases} \frac{1}{6}\dfrac{d^2f}{dx_\varkappa dx_\lambda} = a_{1\varkappa\lambda}x_1 + a_{2\varkappa\lambda}x_2 + a_{3\varkappa\lambda}x_3 = A_{\varkappa\lambda}, \\ \frac{1}{6}\dfrac{d^2\Delta f}{dx_\varkappa dx_\lambda} = b_{1\varkappa\lambda}x_1 + b_{2\varkappa\lambda}x_2 + b_{3\varkappa\lambda}x_3 = B_{\varkappa\lambda} \end{cases}$$

gesetzt war, und dafs

$$\delta A_{\varkappa\lambda} = B_{\varkappa\lambda}$$

ist. Hieraus folgt, da $\Theta = \Sigma u_\varkappa u_\lambda (AA)^{\varkappa\lambda}$ (§. 9 (6.)) ist:

$$\begin{aligned}\delta\Theta = \delta\Sigma u_\varkappa u_\lambda(AA)^{\varkappa\lambda} &= \Sigma u_\varkappa u_\lambda(AB)^{\varkappa\lambda} + \Sigma u_\varkappa u_\lambda(BA)^{\varkappa\lambda} \\ &= 2\Sigma u_\varkappa u_\lambda(AB)^{\varkappa\lambda},\end{aligned}$$

folglich

$$(11.)\qquad H = \tfrac{1}{2}\delta\Theta = \Sigma u_\varkappa u_\lambda (AB)^{\varkappa\lambda}$$

oder auch mit Berücksichtigung von (10.):

$$(11.^*)\qquad H = \Sigma\Sigma u_\varkappa u_\lambda (a_\varrho b_\sigma)^{\varkappa\lambda}x_\varrho x_\sigma.$$

Ich werde jetzt die verkürzten Darstellungen der Invariante T und zugehörigen Form T_f geben und die Grundgesetze dieser Formen analog mit der Theorie der ersten Grundformen entwickeln und bemerke hierzu, dafs wiederum die Zwischenform H den Ausgangspunkt bildet.

§. 19.

Die Zwischenform H läfst sich durch folgende ursprüngliche Definition erhalten:

Theorem 12.

Wenn man

$$(1.)\quad \begin{cases} v = v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3 \\ w = w_1x_1+w_2x_2+w_3x_3 \\ p = p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3 \\ \vartheta = \vartheta_1x_1+\vartheta_2x_2+\vartheta_3x_3 \end{cases}$$

setzt, so ist immer die zweite Zwischenform H durch

$$(2.)\quad H = \Sigma\pm u_1v_2p_3\,\Sigma\pm u_1v_2w_3(\Sigma\pm\vartheta_1w_2p_3)^2 v.\vartheta,$$

oder irgend einen analogen durch Vertauschung der 4 Systeme v, w, p, ϑ gebildeten Ausdruck darstellbar, wenn nach Ausführung der Multiplication:

$$v_\varkappa v_\lambda v_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu};\quad w_\varkappa w_\lambda w_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu};\quad p_\varkappa p_\lambda p_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu};\quad \vartheta_\varkappa\vartheta_\lambda\vartheta_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu}$$

gesetzt wird.

Da alle 4 Systeme durch *dieselben* $a_{\varkappa\lambda\mu}$ ersetzt werden, so giebt die Vertauschung in (2.) wirklich immer dasselbe Resultat. Der Beweis des Theorems selbst ist sehr einfach: Man hat

$$\Sigma\pm u_1v_2p_3\,\Sigma\pm u_1v_2w_3 = \tfrac{1}{2}\Sigma(uu,vv)^{\varkappa\lambda}(w_\varkappa p_\lambda+w_\lambda p_\varkappa)$$
$$(\Sigma\pm\vartheta_1w_2p_3)^2 = \Sigma(pp,ww)^{\mu\tau}\vartheta_\mu\vartheta_\tau$$
$$v\vartheta = \Sigma\vartheta_\varrho v_\sigma x_\varrho x_\sigma,$$

also multiplicirt:

$$\begin{aligned} H &= \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma\Sigma(uu,vv)^{\varkappa\lambda}(p_\varkappa w_\lambda+p_\lambda w_\varkappa)(pp,ww)^{\mu\tau}\vartheta_\mu\vartheta_\tau\vartheta_\varrho v_\sigma x_\varrho x_\sigma, \\ &= \Sigma\Sigma\Sigma(uu,vv)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{\mu\tau}a_{\varrho\mu\tau}v_\sigma x_\varrho x_\sigma \quad (\text{§. 6 (6.)}) \\ &= \Sigma\Sigma\Sigma(uu,vv)^{\varkappa\lambda}b_{\varkappa\lambda\varrho}v_\sigma x_\varrho x_\sigma \quad (\text{§. 11 (4.)}). \end{aligned}$$

Die Ausführung der Summation über ϱ allein giebt wegen §. 18 (10.)

$$\begin{aligned} H &= \Sigma\Sigma(uu,vv)^{\varkappa\lambda}B_{\varkappa\lambda}v_\sigma x_\sigma = \Sigma\Sigma(uu,B)^{\varkappa\lambda}v_\varkappa v_\lambda v_\sigma x_\sigma \\ &= \Sigma\Sigma(uu,B)^{\varkappa\lambda}a_{\varkappa\lambda\sigma}x_\sigma \end{aligned}$$

und wenn man noch über σ summirt und wieder §. 18 (10.) benutzt,

$$H = \Sigma(uu,B)^{\varkappa\lambda}A_{\varkappa\lambda} = \Sigma(AB)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda,$$

was zu beweisen war.

§. 20.

Man kann die Determinantengleichung §. 7 (2.)

$$(1.)\quad \begin{cases} -ABCD\vartheta^2 = ABwp(\Sigma\pm\vartheta_1u_2v_3)^2+CDuv(\Sigma\pm\vartheta_1w_2p_3)^2 \\ \qquad\qquad +ACvp(\Sigma\pm\vartheta_1u_2w_3)^2+BDuw(\Sigma\pm\vartheta_1v_2p_3)^2 \\ \qquad\qquad +ADvw(\Sigma\pm\vartheta_1u_2p_3)^2+BCup(\Sigma\pm\vartheta_1v_2w_3)^2 \end{cases}$$

dazu benutzen um eine für die Folge *fundamentale* Umformung der Coefficienten

$$(AB)^{\varkappa\lambda}$$

von H zu finden.

Man bemerke zuvörderst, dafs (§. 14 Theorem 7.)

$$ABCD = S_f(u_1, u_2, u_3)$$

wird, wenn $v_\varkappa v_\lambda v_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu}$, $w_\varkappa w_\lambda w_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu}$, $p_\varkappa p_\lambda p_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu}$ gesetzt wird.

Differentiirt man

$$A.B.C.D$$

nach den Gröfsen u_1, u_2, u_3 und setzt statt der Incremente ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3, so ergiebt sich daher, wenn durch d diese Differentiation angedeutet wird:

$$d(A.B.C.D).\vartheta^2 = \left(\frac{dS_f}{du_1}\vartheta_1 + \frac{dS_f}{du_2}\vartheta_2 + \frac{dS_f}{du_3}\vartheta_3\right)\vartheta^2$$

und wenn man $\vartheta_\varkappa\vartheta_\lambda\vartheta_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu}$ setzt:

$$d(A.B.C.D)\vartheta^2 = \frac{dS_f}{du_1}\Sigma a_{1\varkappa\lambda}x_\varkappa x_\lambda + \frac{dS_f}{du_2}\Sigma a_{2\varkappa\lambda}x_\varkappa x_\lambda + \frac{dS_f}{du_3}\Sigma a_{3\varkappa\lambda}x_\varkappa x_\lambda$$

oder

$$d(A.B.C.D).\vartheta^2 = \tfrac{1}{3}\left\{\frac{dS_f}{du_1}\frac{df}{dx_1} + \frac{dS_f}{du_2}\frac{df}{dx_2} + \frac{dS_f}{du_3}\frac{df}{dx_3}\right\}.$$

Führt man dieselbe Operation auf der rechten Seite von (1.) aus, so ergeben sich 4 verschiedene Gruppen, von denen ich immer je ein Glied hersetzen will, nämlich:

$$(\alpha) = AdB.w.p(\Sigma\pm\vartheta_1 u_2 v_3)^2$$
$$(\beta) = 2AB.w.p(\Sigma\pm\vartheta_1 u_2 v_3)(\Sigma\pm\vartheta_1\vartheta_2 v_3)$$
$$(\gamma) = (CdD + DdC).u.v(\Sigma\pm\vartheta_1 w_2 p_3)^2$$
$$(\delta) = CD\vartheta v(\Sigma\pm\vartheta_1 w_2 p_3)^2.$$

Da jedes Glied dreifach vorkommt, und durch die Vertauschungen von v, w, p erhalten wird, überdies für die Producte immer *dieselbe* Substitution

$$v_\varkappa v_\lambda v_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu}, \quad w_\varkappa w_\lambda w_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu}, \quad p_\varkappa p_\lambda p_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu},$$

auszuführen ist, so werden diese drei Glieder immer einander gleich, daher ist zuvörderst

$$-\tfrac{1}{3}\left(\frac{dS_f}{du_1}\frac{df}{dx_1} + \frac{dS_f}{du_2}\frac{df}{dx_2} + \frac{dS_f}{du_3}\frac{df}{dx_3}\right) = 3(\alpha) + 3(\beta) + 3(\gamma) + 3(\delta).$$

Aber aus Ansicht von (β) ergiebt sich sogleich

$$(\beta) = 0 \text{ weil } \Sigma\pm\vartheta_1\vartheta_2 v_3 = 0$$

ist, ferner wird

$$(\delta) = -H,$$

nach der Definition (Theorem 12 (2.)); daher ist

$$\tfrac{1}{3}\left(\frac{dS_f}{du_1}\frac{df}{dx_1}+\frac{dS_f}{du_2}\frac{df}{dx_2}+\frac{dS_f}{du_3}\frac{df}{dx_3}\right)+3(\alpha)+3(\gamma) = 3.H$$

eine Umformungsgleichung der zweiten Zwischenform. Nun folgt aber auch leicht, dafs

$$(\gamma) = 0$$

ist, denn es ist ausführlich geschrieben:

$$\begin{aligned}(\gamma) &= (CdD+DdC)u.v(\Sigma\pm\vartheta_1 w_2 p_3)^2\\ &= -\{\Sigma\pm u_1 v_2 p_3\,\Sigma\pm\vartheta_1 v_2 w_3+\Sigma\pm u_1 v_2 w_3\,\Sigma\pm\vartheta_1 v_2 p_3\}\,u.v.(\Sigma\pm\vartheta_1 w_2 p_3)^2\end{aligned}$$

und nach der Substitution der $a_{\varkappa\lambda\mu}$ ist es gleichgültig ob man hierin ϑ mit w oder mit p vertauscht, daher ist auch

$$(\gamma)=-\tfrac{1}{3}\left\{\begin{aligned}&\Sigma\pm u_1 v_2 p_3\,\Sigma\pm\vartheta_1 v_2 w_3+\Sigma\pm u_1 v_2 w_3\,\Sigma\pm\vartheta_1 v_2 p_3\\ &+\Sigma\pm u_1 v_2 p_3\,\Sigma\pm w_1 v_2\vartheta_3+\Sigma\pm u_1 v_2\vartheta_3\,\Sigma\pm w_1 v_2 p_3\\ &+\Sigma\pm u_1 v_2\vartheta_3\,\Sigma\pm p_1 v_2 w_3+\Sigma\pm u_1 v_2 w_3\,\Sigma\pm p_1 v_2\vartheta_3\end{aligned}\right\}uv(\Sigma\pm\vartheta_1 w_2 p_3)^2;$$

da aber $\Sigma\pm\vartheta_1 v_2 w_3 = -\Sigma\pm w_1 v_2\vartheta_3$ u. s. w. ist, so heben sich die 6 Glieder der Parenthese gegenseitig auf, und es ist $(\gamma)=0$; somit bleibt:

$$(2.)\quad \tfrac{1}{3}\left(\frac{dS_f}{du_1}\frac{df}{dx_1}+\frac{dS_f}{du_2}\frac{df}{dx_2}+\frac{dS_f}{du_3}\frac{df}{dx_3}\right)-3(\alpha) = 3H.$$

Es ist endlich ausführlich geschrieben:

$$\begin{aligned}-(\alpha) &= \Sigma\pm v_1 w_2 p_3\,\Sigma\pm\vartheta_1 w_2 p_3(\Sigma\pm\vartheta_1 u_2 v_3)^2 wp\\ &= \tfrac{1}{2}\Sigma(ww,pp)^{\varkappa\lambda}(v_\varkappa\vartheta_\lambda+v_\lambda\vartheta_\varkappa).\Sigma(\vartheta\vartheta,vv)^{\mu\tau}u_\mu u_\tau.\tfrac{1}{2}\Sigma(w_\varrho p_\sigma+w_\sigma p_\varrho)x_\varrho x_\sigma\\ &= \tfrac{1}{4}\Sigma\Sigma\Sigma(ww,pp)^{\varkappa\lambda}(w_\varrho p_\sigma+w_\sigma p_\varrho)(\vartheta\vartheta,vv)^{\mu\tau}(v_\varkappa\vartheta_\lambda+v_\lambda\vartheta_\varkappa)u_\mu u_\tau x_\varrho x_\sigma\\ &= \Sigma\Sigma\Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{\mu\tau}u_\mu u_\tau x_\varrho x_\sigma\\ &= \Sigma\Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma}u_\varrho u_\sigma x_\varrho x_\sigma,\end{aligned}$$

indem man nur die Glieder zu berücksichtigen hat, in welchen $\mu,\tau=\varrho,\sigma$ ist, weil nach dem Fundamentaltheorem für S

$$\Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{\mu\tau} = 0$$

ist, wenn ϱ, σ und μ, τ von einander verschiedene, constante Indices sind.

Nach dem andern Theile des citirten Theorems ist aber

$$2\Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma} = S \quad\text{und}$$
$$\Sigma(a_\varrho a_\varrho)^{\varkappa\lambda}(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\varrho} = S,$$

daher wird

$$-(\alpha) = S\Sigma u_\varrho u_\sigma x_\varrho x_\sigma = S(u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3)^2$$

und die Gleichung (2.) geht über in:

$$(3.)\qquad H = \tfrac{1}{6}\left(\frac{dS_f}{du_1}\frac{df}{dx_1}+\frac{dS_f}{du_2}\frac{df}{dx_2}+\frac{dS_f}{du_3}\frac{df}{dx_3}\right)-S(u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3)^2,$$

welche die schliefsliche Transformation enthält.

Setzt man noch die Werthe von

$$\tfrac{1}{3}\frac{dS_f}{du_1}=\Sigma s_{1\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda,\quad \tfrac{1}{3}\frac{dS_f}{du_2}=\Sigma s_{2\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda,\quad \tfrac{1}{3}\frac{dS_f}{du_3}=\Sigma s_{3\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda$$

ein, so ergiebt sich

$$H=\Sigma(AB)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda=\tfrac{1}{2}\left(\frac{df}{dx_1}\Sigma s_{1\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda+\frac{df}{dx_2}\Sigma s_{2\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda+\frac{df}{dx_3}\Sigma s_{3\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda\right)$$
$$-S(u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3)^2,$$

also

$$(4.)\qquad (AB)^{\varkappa\lambda}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{df}{dx_1}s_{1\varkappa\lambda}+\frac{df}{dx_2}s_{2\varkappa\lambda}+\frac{df}{dx_3}s_{3\varkappa\lambda}\right)-Sx_\varkappa x_\lambda.$$

Da wegen (11.*) (§. 18)

$$(AB)^{\varkappa\lambda}=\tfrac{1}{2}\Sigma(a_\varrho b_\sigma+a_\sigma b_\varrho)^{\varkappa\lambda}x_\varrho x_\sigma$$

ist, wenn der Kürze halber $(a_\varrho b_\sigma+a_\sigma b_\varrho)^{\varkappa\lambda}$ statt $(a_\varrho b_\sigma)^{\varkappa\lambda}+(a_\sigma b_\varrho)^{\varkappa\lambda}$ geschrieben wird, ferner

$$\frac{df}{dx_1}=\Sigma a_{1\varrho\sigma}x_\varrho x_\sigma,\quad \frac{df}{dx_2}=\Sigma a_{2\varrho\sigma}x_\varrho x_\sigma,\quad \frac{df}{dx_3}=\Sigma a_{3\varrho\sigma}x_\varrho x_\sigma,$$

also

$$\tfrac{1}{3}\left(\frac{df}{dx_1}s_{1\varkappa\lambda}+\frac{df}{dx_2}s_{2\varkappa\lambda}+\frac{df}{dx_3}s_{3\varkappa\lambda}\right)=\Sigma x_\varrho x_\sigma(a_{1\varrho\sigma}s_{1\varkappa\lambda}+a_{2\varrho\sigma}s_{2\varkappa\lambda}+a_{3\varrho\sigma}s_{3\varkappa\lambda})$$

ist, so folgt:

Theorem 13.

Die Summe der Produkte der Coefficienten irgend einer zweiten Ableitung $\tfrac{1}{6}\dfrac{d^2f}{dx_\varrho dx_\sigma}$ *von f mit den entsprechenden einer zweiten Ableitung* $\tfrac{1}{6}\dfrac{d^2S_f}{du_\varkappa du_\lambda}$ *von* S_f, *nämlich:*

$$a_{1\varrho\sigma}s_{1\varkappa\lambda}+a_{2\varrho\sigma}s_{2\varkappa\lambda}+a_{3\varrho\sigma}s_{3\varkappa\lambda}=\tfrac{3}{2}\left(a_{1\varrho\sigma}\frac{dS}{da_{1\varkappa\lambda}}+a_{2\varrho\sigma}\frac{dS}{da_{2\varkappa\lambda}}+a_{3\varrho\sigma}\frac{dS}{da_{3\varkappa\lambda}}\right)$$

giebt, wenn ϱ, σ *von* $\varkappa$, λ *verschieden sind,*

$$(5.)\qquad a_{1\varrho\sigma}s_{1\varkappa\lambda}+a_{2\varrho\sigma}s_{2\varkappa\lambda}+a_{3\varrho\sigma}s_{3\varkappa\lambda}=\tfrac{1}{2}(a_\varrho b_\sigma+a_\sigma b_\varrho)^{\varkappa\lambda},$$

und so oft $\varrho,\sigma=\varkappa,\lambda$ *ist,*

$$(6.)\qquad a_{1\varkappa\lambda}s_{1\varkappa\lambda}+a_{2\varkappa\lambda}s_{2\varkappa\lambda}+a_{3\varkappa\lambda}s_{3\varkappa\lambda}=\tfrac{1}{2}(a_\varkappa b_\lambda+a_\lambda b_\varkappa)^{\varkappa\lambda}+S.$$

§. 21.

Ich werde jetzt die *ursprüngliche* Definition der Invariante T geben, und aus derselben eine doppelte Darstellung der zweiten zugehörigen Form T_f entwickeln.

Theorem 14.

Wenn man in den 3 Determinanten

$$A = \Sigma \pm v_1 w_2 p_3,\quad B = -\Sigma \pm u_1 w_2 p_3,\quad C = \Sigma \pm u_1 v_2 p_3$$

das ihnen gemeinschaftliche System

$$p_1,\quad p_2,\quad p_3$$

der Reihe nach durch

$$\begin{array}{ccc} \eta_1, & \eta_2, & \eta_3 \\ \zeta_1, & \zeta_2, & \zeta_3 \\ \vartheta_1, & \vartheta_2, & \vartheta_3 \end{array}$$

ersetzt, und die Ergebnisse respective durch

$$\begin{array}{ccc} A_\eta, & B_\eta, & C_\eta \\ A_\zeta, & B_\zeta, & C_\zeta \\ A_\vartheta, & B_\vartheta, & C_\vartheta \end{array}$$

bezeichnet, ferner wie früher

$$D = -\Sigma \pm u_1 v_2 w_3$$

setzt, so ist

$$(1.)\qquad 6T = A_\eta B_\zeta C_\vartheta D(\Sigma \pm \eta_1 \vartheta_2 \zeta_3)^2$$

oder auch gleich einem der 6 andern Ausdrücke, welche durch Vertauschung von η, ζ, ϑ aus dem vorstehenden hervorgehen, wenn man jedesmal nach Ausführung der Multiplication

$$u_\varkappa u_\lambda u_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu},\quad v_\varkappa v_\lambda v_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu},\quad w_\varkappa w_\lambda w_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu},$$
$$\eta_\varkappa \eta_\lambda \eta_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu},\quad \zeta_\varkappa \zeta_\lambda \zeta_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu},\quad \vartheta_\varkappa \vartheta_\lambda \vartheta_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu}$$

setzt.

Wiewohl sich die Ausführung der Multiplication aus den Entwicklungen des vorigen Paragraphen ergiebt, wenn man dort die Variabeln x_1, x_2, x_3 durch die partiellen Determinanten

$$x_1 = \overline{\eta_2 \zeta_3},\quad x_2 = \overline{\eta_3 \zeta_1},\quad x_3 = \overline{\eta_1 \zeta_2}$$

ersetzt, so will ich dieselbe dennoch vollständig geben, um dadurch ein allgemeineres Resultat ersichtlich zu machen, welches in der Folge gebraucht wird.

Man bilde

$$k = A_\eta (B_\zeta C_\vartheta + B_\vartheta C_\zeta) D(\Sigma \pm \eta_1 \vartheta_2 \zeta_3)^2$$

indem man den Vertauschungsausdruck von ϑ mit ζ hinzufügt; dann mufs erwiesen werden, dafs

$$6T = \tfrac{1}{2} k$$

ist.

Nun ist nach der Definition:

$$-\{B_\zeta C_\vartheta + B_\vartheta C_\zeta\} = \Sigma \pm u_1 w_2 \zeta_3 \Sigma \pm u_1 v_2 \vartheta_3 + \Sigma \pm u_1 w_2 \vartheta_3 \Sigma \pm u_1 v_2 \zeta_3$$

was offenbar aus

$$\Sigma \pm u_1 v_2 \zeta_3 \Sigma \pm u_1 v_2 \vartheta_3 = \tfrac{1}{2}\Sigma(uu, vv)^{\varrho\sigma}(\vartheta_\varrho \zeta_\sigma + \vartheta_\sigma \zeta_\varrho)$$

entsteht, wenn man letztere Gleichung nach v_1, v_2, v_3 differentiirt und statt der Incremente w_1, w_2, w_3 substituirt, daher wird

$$(2.)\qquad -\{B_\zeta C_\vartheta + B_\vartheta C_\zeta\} = \tfrac{1}{2}\Sigma(uu, (vw+wv))^{\varrho\sigma}(\vartheta_\varrho \zeta_\sigma + \vartheta_\sigma \zeta_\varrho),$$

ferner

$$(3.)\qquad -A_\eta . D = \Sigma \pm v_1 w_2 \eta_3 \Sigma \pm v_1 w_2 u_3 = \tfrac{1}{2}\Sigma(\eta_\mu u_\tau + \eta_\tau u_\mu)(vv, ww)^{\mu\tau}$$

$$(4.)\qquad (\Sigma \pm \eta_1 \vartheta_2 \zeta_3)^2 = \Sigma \eta_\varkappa \eta_\lambda (\vartheta\vartheta, \zeta\zeta)^{\varkappa\lambda};$$

also nach Multiplication der 3 Ergebnisse:

$$k = \tfrac{1}{4}\Sigma\Sigma\Sigma(uu, vw+wv)^{\varrho\sigma}(\vartheta_\varrho \zeta_\sigma + \vartheta_\sigma \zeta_\varrho)(\vartheta\vartheta, \zeta\zeta)^{\varkappa\lambda}\eta_\varkappa \eta_\lambda(\eta_\mu u_\tau + \eta_\tau u_\mu)(vv, ww)^{\mu\tau},$$

und wenn man zunächst für $\vartheta\vartheta\vartheta$ und $\zeta\zeta\zeta$ die Substitution ausführt:

$$k = \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma\Sigma(uu, vw+wv)^{\varrho\sigma}(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}\eta_\varkappa \eta_\lambda(\eta_\mu u_\tau + \eta_\tau u_\mu)(vv, ww)^{\mu\tau}.$$

Für $\eta\eta\eta$, uuu soll die Substitution zunächst nicht ausgeführt werden, man kann aber, da μ mit τ vertauscht werden darf, ohne dafs der Ausdruck sich ändert:

$$k = \Sigma\Sigma\Sigma(uu, (aa)^{\varkappa\lambda})^{\varrho\sigma}(v_\varrho w_\sigma + v_\sigma w_\varrho)(vv, ww)^{\mu\tau}\eta_\varkappa \eta_\lambda \eta_\mu u_\tau$$

schreiben, wenn man überdies den Vertauschungssatz anwendet, so dafs man nach Ausführung der Substitution für vvv, www:

$$(5.)\qquad k = 2\Sigma\Sigma\Sigma(uu, (aa)^{\varkappa\lambda})^{\varrho\sigma}(a_\varrho a_\sigma)^{\mu\tau}\eta_\varkappa \eta_\lambda \eta_\mu u_\tau$$

erhält, oder

$$(6.)\qquad \tfrac{1}{2}k = \Sigma\Sigma\Sigma((aa)^{\mu\tau}(aa)^{\varkappa\lambda})^{\varrho\sigma}u_\varrho u_\sigma u_\tau \eta_\varkappa \eta_\lambda \eta_\mu.$$

Man bemerke, dafs bei dieser Entwicklung weder eine Vertauschung der Systeme $\eta\eta\eta$ mit $\vartheta\vartheta\vartheta$ und $\zeta\zeta\zeta$ noch der Systeme uuu mit vvv und www vorausgesetzt ist, *so dafs sie auch dann noch gültig bleibt, wenn uuu und $\eta\eta\eta$ ganz beliebige Gröfsen bedeuten.* Ferner beachte man, dafs in der Gleichung (3.) das System u_1, u_2, u_3 durch jedes andere ersetzt werden kann, also auch durch die Differentiale:

$$du_1, \qquad du_2, \qquad du_3,$$

ohne dafs bei der Zusammenziehung ein anderer Effect entsteht, als dafs

$$(7.)\qquad \tfrac{1}{2}k = \Sigma\Sigma\Sigma((aa)^{\mu\tau}(aa)^{\varkappa\lambda})^{\varrho\sigma}u_\varrho u_\sigma du_\tau \eta_\varkappa \eta_\lambda \eta_\mu$$

wird.

Aus der Gleichung (6.) folgt nun das zu beweisende Theorem, denn setzt man jetzt noch:

$$u_\varrho u_\sigma u_\tau = a_{\varrho\sigma\tau}, \qquad \eta_\varkappa \eta_\lambda \eta_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu},$$

so wird

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{6}k &= \Sigma\Sigma\Sigma((aa)^{\mu\tau}(aa)^{\varkappa\lambda})^{\varrho\sigma} a_{\varrho\sigma\tau} a_{\varkappa\lambda\mu} \\ &= \Sigma\Sigma\Sigma((aa)^{\mu\tau} a_\tau)^{\varrho\sigma} (a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} a_{\nu\lambda\mu} \\ &= \Sigma s_{\varrho\sigma\mu} b_{\varrho\sigma\mu} = 6T \quad (\text{§. 18 (7.)}) \end{aligned}$$

weil

$$\begin{aligned} \Sigma((aa)^{\mu\tau} a_\tau)^{\varrho\sigma} &= s_{\varrho\sigma\mu} \quad (\text{§. 14 (7.)}) \\ \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} a_{\varkappa\lambda\mu} &= b_{\varrho\sigma\mu} \quad (\text{§. 11 (4.)}) \end{aligned}$$

ist.

§. 22.

Theorem 15.

Wenn man in dem die Function T definirenden Ausdruck

$$(1.) \qquad A_\eta B_\zeta C_\vartheta . D(\Sigma \pm \eta_1 \vartheta_2 \zeta_3)^2$$

entweder die Gröfsen

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3,$$

oder die Gröfsen

$$\eta_1, \quad \eta_2, \quad \eta_3$$

als die Variabeln betrachtet, und jedesmal für die übrigen Potenzen und Produkte dritter Ordnung die entsprechenden $a_{\varkappa\lambda\mu}$ setzt, so entsteht in beiden Fällen eine zugehörige Form.

Der Beweis ergiebt sich sofort aus der am Anfange dieser Abhandlung gegebenen Definition der zugehörigen Formen.

Bildet man die erste derselben, so hat man in der Gleichung (5.) des vorigen Paragraphen $\eta_\varkappa \eta_\lambda \eta_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu}$ zu setzen, dieses giebt

$$\Sigma\Sigma\Sigma(uu, (aa)^{\varkappa\lambda})^{\varrho\sigma} (a_\varrho a_\sigma)^{\mu\tau} a_{\varkappa\lambda\mu} u_\tau$$

oder

$$\begin{aligned} &\Sigma\Sigma\Sigma(uu, (aa)^{\mu\tau})^{\varrho\sigma} (a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} a_{\varkappa\lambda\mu} u_\tau \\ &= \Sigma\Sigma(uu, (aa)^{\mu\tau})^{\varrho\sigma} b_{\varrho\sigma\mu} u_\tau \\ &= \Sigma\Sigma(b_\mu (aa)^{\mu\tau})^{\varrho\sigma} u_\varrho u_\sigma u_\tau = T_f(u_1, u_2, u_3) \quad (\text{§. 18 (9.)}). \end{aligned}$$

Es entsteht also durch die ersten der angegebenen Operationen die schon definirte zweite zugehörige Form T_f. Die vorstehende Definition derselben giebt aber ohne alle Rechnung sofort eine sehr wichtige Eigenschaft derselben an.

Wenn man nämlich die Form (1.) nach u_1, u_2, u_3 total differentiirt,

so entsteht

$$A_\eta\{B_\zeta C_\vartheta dD + B_\zeta dC_\vartheta D + dB_\zeta C_\vartheta D\}(\Sigma \pm \vartheta_1 \eta_2 \zeta_3)^2,$$

welcher Ausdruck

$$= 3A_\eta B_\zeta C_\vartheta dD(\Sigma \pm \vartheta_1 \eta_2 \zeta_3)^2$$

geschrieben werden kann, weil aus einem der 3 Glieder die beiden andern folgen, wenn man die 5 Systeme v, w, η, ζ, ϑ passend vertauscht.

Hieraus folgt wegen (7.), dafs

$$dT_f(u_1, u_2, u_3) = 3\Sigma\Sigma(b_\mu(aa)^{\mu\tau})^{\varrho\sigma} u_\varrho u_\sigma du_\tau$$

$$= 3\{\Sigma(b_\mu(aa)^{\mu 1})^{\varrho\sigma} u_\varrho u_\sigma du_1 + \Sigma(b_\mu(aa)^{\mu 2})^{\varrho\sigma} u_\varrho u_\sigma du_2 + \Sigma(b_\mu(aa)^{\mu 3})^{\varrho\sigma} u_\varrho u_\sigma du_3,$$

d. h.

$$(2.) \quad \tfrac{1}{3}\frac{dT_f(u_1, u_2, u_3)}{du_\tau} = \Sigma(b_\mu(aa)^{\mu\tau})^{\varrho\sigma} u_\varrho u_\sigma,$$

wo τ constanter Index ist.

Setzt man nun

$$(3.) \quad T_f(u_1, u_2, u_3) = \Sigma t_{\varrho\sigma\tau} u_\varrho u_\sigma u_\tau,$$

indem man wie bei allen Bezeichnungen dieser Art die Gleichheit von

$$t_{\varrho\sigma\tau} = t_{\varrho\tau\sigma} = t_{\sigma\varrho\tau} = t_{\sigma\tau\varrho} = t_{\tau\varrho\sigma} = t_{\tau\sigma\varrho}$$

einführt, so ist

$$\tfrac{1}{3}\frac{dT_f(u_1, u_2, u_3)}{du_\tau} = \Sigma t_{\varrho\sigma\tau} u_\varrho u_\sigma,$$

wo τ constanter Index ist, also in Vergleichung mit (2.)

$$(3.^*) \quad t_{\varrho\sigma\tau} = \{(b_1(aa)^{1\tau})^{\varrho\sigma} + (b_2(aa)^{2\tau})^{\varrho\sigma} + (b_3(aa)^{3\tau})^{\varrho\sigma}\},$$

d. h. man kann in diesem Ausdrucke die Indices ϱ, σ, τ nach Belieben vertauschen, und erhält auf diese Weise eine ***einfache symmetrische Darstellung der Coefficienten von T_f***, von welchen sehr bald nachgewiesen werden soll, dafs sie die partiellen Ableitungen von T sind.

Fügt man ferner noch hinzu, dafs weil (§. 18 (4.))

$$\delta S_f = 3T_f$$

gesetzt war:

$$(4.) \quad \delta s_{\varrho\sigma\tau} = 3t_{\varrho\sigma\tau}$$

ist, so folgt aus §. 14 (7.):

$$3t_{\varrho\sigma\tau} = \delta\{(a_1(aa)^{1\tau})^{\varrho\sigma} + (a_2, aa)^{2\tau})^{\varrho\sigma} + (a_3(aa)^{3\tau})^{\varrho\sigma}\}$$

$$3t_{\varrho\sigma\tau} = (b_1(aa)^{1\tau})^{\varrho\sigma} + (b_2(aa)^{2\tau})^{\varrho\sigma} + (b_3(aa)^{3\tau})^{\varrho\sigma}$$

$$+ (a_1(ab+ba)^{1\tau})^{\varrho\sigma} + (a_2(ab+ba)^{2\tau})^{\varrho\sigma} + (a_3(ab+ba)^{3\tau})^{\varrho\sigma}.$$

Das erste Glied der rechten Seite ist aber wegen (3.*) $= t_{\varrho\sigma\tau}$, also

$$(5.)\qquad t_{\varrho\sigma\tau} = \tfrac{1}{3}\{(a_1(ab+ba)^{1\tau})^{\varrho\sigma} + (a_2(ab+ba)^{2\tau})^{\varrho\sigma} + (a_3(ab+ba)^{3\tau})^{\varrho\sigma}\},$$

es ist daher ersichtlich, dafs durch die Darstellungsweise (3.) die Berechnung des sehr complicirten Ausdruckes (5.) überflüssig wird, die Differentiation δ würde ihn aber erfordert haben. Die Verification der Identität von (3.) und (5.) ist a posteriori sehr schwer auszuführen, während sie aus dem hier benutzten Prinzipe ohne Weiteres folgt.

Geht man nun zum zweiten Theil des Theorems (15.) über, so ergiebt sich eine zugehörige Form, welche mit den Variabeln η_1, η_2, η_3 geschrieben aus §. 21 (6.) folgt, wenn man dort

$$u_\varrho u_\sigma u_\tau = a_{\varrho\sigma\tau}$$

setzt, nämlich

$$\mathfrak{T}_f = \Sigma\Sigma\Sigma((aa)^{\mu\tau}(aa)^{\varkappa\lambda})^{\varrho\sigma} a_{\varrho\sigma\tau}\eta_\varkappa\eta_\lambda\eta_\mu$$

oder auch

$$\mathfrak{T}_f = \Sigma\Sigma\Sigma(a_\tau(aa)^{\mu\tau})^{\varrho\sigma}(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}\eta_\varkappa\eta_\lambda\eta_\mu,$$

d. h. wegen der Definition von $s_{\varrho\sigma\mu}$ §. 14 (7.):

$$(6.)\qquad \mathfrak{T}_f = \Sigma\Sigma s_{\varrho\sigma\mu}(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} u_\varkappa u_\lambda u_\mu,$$

wenn man wieder u_1, u_2, u_3 als Variable schreibt. Die Werthe T_f und $\mathfrak{T}_f$ sind formell so von einander verschieden, dafs ein Zusammenhang beider nur durch höchst complicirte Transformation gewonnen werden kann. Die Berechnung beider Functionen für die specielle *Hessische* Form zeigt ihre Identität, woraus freilich auch im Allgemeinen die Identität hervorgeht. Indessen handelt es sich hier einerseits darum, den Zusammenhang der *Formenbildung* zu erkennen, andrerseits die Coefficienten von $\mathfrak{T}_f$ in ihrer einfachsten Form darzustellen. Nachdem ich sehr viel Zeit und Mühe auf die Entdeckung dieses Zusammenhanges verwandt hatte, der auch für alle hier folgenden Sätze fundamental ist, stellte sich derselbe in seiner einfachsten Form als das die Zwischenform H betreffende Theorem (13.) dar, aus welchem er sofort hervorgeht. Entnimmt man nämlich aus (5.)

$$\tfrac{1}{3}\frac{dT_f}{du_\tau} = \Sigma t_{\varrho\sigma\tau} u_\varrho u_\sigma = \tfrac{1}{3}\Sigma\Sigma(a_\varkappa, (ab+ba)^{\varkappa\tau})^{\varrho\sigma} u_\varrho u_\sigma,$$

wo τ ein constanter Index ist, so ist auch

$$\tfrac{1}{3}\frac{dT_f}{du_\tau} = \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma(a_\varkappa, uu)^{\varrho\sigma}(a_\varrho b_\sigma + a_\sigma b_\varrho)^{\varkappa\tau},$$

und wegen des 13ten Theorems:

$$\tfrac{1}{3}\frac{dT_f}{du_\tau} = \Sigma\Sigma(a_\varkappa, uu)^{\varrho\sigma}(a_{1\varrho\sigma}s_{1\varkappa\tau} + a_{2\varrho\sigma}s_{2\varkappa\tau} + a_{3\varrho\sigma}s_{3\varkappa\tau}) - S\Sigma(a_\varkappa, uu)^{\varkappa\tau},$$

indem nur dann das Glied mit S hinzutritt, wenn $\varrho, \sigma = \varkappa, \tau$ ist.

Es folgt aber aus §. 8. (10), wenn man dort $v_\varkappa v_\lambda v_\mu = a_{\varkappa\lambda\mu}$ setzt,

$$\Sigma(a_\varkappa, uu)^{\varkappa\tau} = (a_1, uu)^{1\tau} + (a_2, uu)^{2\tau} + (a_3, uu)^{3\tau} = 0;$$

daher ist

$$\tfrac{1}{3}\frac{dT_f}{du_\tau} = \Sigma\Sigma((a_\varkappa a_1)^{\varrho\sigma}s_{1\varkappa\tau} + (a_\varkappa a_2)^{\varrho\sigma}s_{2\varkappa\tau} + (a_\varkappa a_3)^{\varrho\sigma}s_{3\varkappa\tau})u_\varrho u_\sigma$$
$$= \Sigma\Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma}s_{\varkappa\lambda\tau}u_\varrho u_\sigma.$$

Bildet man nun

$$T_f = \tfrac{1}{3}\left(u_1\frac{dT_f}{du_1} + u_2\frac{dT_f}{du_2} + u_3\frac{dT_f}{du_3}\right),$$

so wird

$$(7.)\qquad T_f = \Sigma\Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma}s_{\varkappa\lambda\tau}u_\varrho u_\sigma u_\tau = \mathfrak{T}_f;$$

es ist daher die Identität der beiden zugehörigen Formen des funfzehnten Theorems erwiesen. Ferner aber ist dann auch

$$(8.)\qquad \tfrac{1}{3}\frac{d\mathfrak{T}_f}{du_\tau} = \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma}s_{\varkappa\lambda\tau}u_\varrho u_\sigma,$$

wo τ constanter Index ist, also folgt

$$(9.)\qquad t_{\varrho\sigma\tau} = \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma}s_{\varkappa\lambda\tau} = \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\tau}s_{\varkappa\lambda\sigma} = \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\sigma\tau}s_{\varkappa\lambda\varrho},$$

während aus (6.) hervorgehen würde, dafs der Coefficient von $u_\varrho u_\sigma u_\tau$ in $\mathfrak{T}_f$ mit seinem Zahlenfactor 6

$$= 2\Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma}s_{\varkappa\lambda\tau} + 2\Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\tau}s_{\varkappa\lambda\sigma} + 2\Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\sigma\tau}s_{\varkappa\lambda\varrho}$$

ist, wenn alle Indices verschieden sind.

Die Function $\mathfrak{T}_f$ läfst sich in Folge der Gleichung (7.) definiren durch

$$(10.)\qquad \tfrac{1}{3}\Sigma!\frac{d\Delta f}{da_{\varkappa\lambda\mu}}u_\varkappa u_\lambda u_\mu = \mathfrak{T}_f,$$

wenn man statt der Potenzen und Produkte $x_\varrho x_\sigma x_\tau$ die entsprechenden $s_{\varrho\sigma\tau}$ substituirt, denn es ist

$$\Delta f = \Sigma(AA)^{\varrho\sigma}dA_{\varrho\sigma}, \quad \text{also}$$

$$\Sigma!\frac{d\Delta f}{da_{\varkappa\lambda\mu}}u_\varkappa u_\lambda u_\mu = 3\Sigma!\Sigma(AA)^{\varrho\sigma}\frac{dA_{\varrho\sigma}}{da_{\varkappa\lambda\mu}}u_\varkappa u_\lambda u_\mu$$
$$= 3\Sigma(AA)^{\varrho\sigma}(u_\varrho u_\sigma u_1 x_1 + u_\varrho u_\sigma u_2 x_2 + u_\varrho u_\sigma u_3 x_3)$$
$$= 3\Sigma(AA)^{\varrho\sigma}u_\varrho u_\sigma(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3)$$
$$= 3\Sigma\Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma}u_\varrho u_\sigma(u_1x_1x_\varkappa x_\lambda + u_2x_2x_\varkappa x_\lambda + u_3x_3x_\varkappa x_\lambda)$$
$$= 3\Sigma\Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma}u_\varrho u_\sigma(u_1s_{1\varkappa\lambda} + u_2s_{2\varkappa\lambda} + u_3s_{3\varkappa\lambda})$$
$$= 3\mathfrak{T}_f.$$

Hieraus ergiebt sich aber (§. 9 (6.))

$$(11.)\qquad \Theta.u = \Sigma(AA)^{\varrho\sigma}u_\varrho u_\sigma(u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3) = \mathfrak{T}_f,$$

wenn man wiederum $x_\varrho x_\sigma x_\tau = s_{\varrho\sigma\tau}$ *setzt, und es läfst sich die Gleichung* (8.) *so aussprechen, dafs zugleich mit* $x_\varrho x_\sigma x_\tau = s_{\varrho\sigma\tau}$

$$(11.^*)\qquad \frac{d(\Theta.u)}{du_\tau} = \Theta.u_\tau$$

wird.

Es bleibt nun schliefslich noch zu untersuchen, in welcher Beziehung die Gröfsen $t_{\varkappa\lambda\mu}$, welche durch (3.*) oder (5.) oder (9.) definirt sind, zu den partiellen Ableitungen der Invariante T nach den Gröfsen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ stehen.

Bildet man die Function:

$$6\Sigma!\frac{dT}{da_{\varkappa\lambda\mu}}u_\varkappa u_\lambda u_\mu = \Sigma!\frac{d\Sigma s_{\varrho\sigma\tau}b_{\varrho\sigma\tau}}{da_{\varkappa\lambda\mu}}u_\varkappa u_\lambda u_\mu,$$

so erhält man jedenfalls eine zugehörige Form, es besteht aber das Resultat der Differentiation aus zwei Theilen, nämlich es ist

$$6\Sigma!\frac{dT}{da_{\varkappa\lambda\mu}}u_\varkappa u_\lambda u_\mu = \Sigma!\,\Sigma\frac{ds_{\varrho\sigma\tau}}{da_{\varkappa\lambda\mu}}b_{\varrho\sigma\tau}u_\varkappa u_\lambda u_\mu + \Sigma!\,\Sigma\frac{db_{\varrho\sigma\tau}}{da_{\varkappa\lambda\mu}}s_{\varrho\sigma\tau}u_\varkappa u_\lambda u_\mu.$$

Da aber wegen §. 16 (9.):

$$\tfrac{1}{3}\Sigma!\,\Sigma\frac{ds_{\varrho\sigma\tau}}{da_{\varkappa\lambda\mu}}\eta_\varrho\eta_\sigma\eta_\tau u_\varkappa u_\lambda u_\mu = \Sigma((aa)^{\tau\mu}uu)^{\varkappa\lambda}u_\mu\eta_\varkappa\eta_\lambda\eta_\mu$$

ist, so folgt, wenn man $\eta_\varrho\eta_\sigma\eta_\tau = b_{\varrho\sigma\tau}$ setzt,

$$\tfrac{1}{3}\Sigma!\,\Sigma\frac{ds_{\varrho\sigma\tau}}{da_{\varkappa\lambda\mu}}b_{\varrho\sigma\tau}u_\varkappa u_\lambda u_\mu = \Sigma((aa)^{\tau\mu}uu)^{\varkappa\lambda}b_{\varkappa\lambda\mu}u_\mu$$
$$= \Sigma((aa)^{\tau\mu}b_\mu)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu = T_f.$$

Dies ist der erste Theil, der zweite wird wegen (10.)

$$= \Sigma!\frac{d\Delta f}{da_{\varkappa\lambda\mu}}u_\varkappa u_\lambda u_\mu = 3\mathfrak{T}_f.$$

Daher erhält man

$$6\Sigma!\frac{dT}{da_{\varkappa\lambda\mu}}u_\varkappa u_\lambda u_\mu = 3T_f+3\mathfrak{T}_f$$

oder, da $\mathfrak{T}_f = T_f$ ist,

$$(12.)\qquad \Sigma!\frac{dT}{da_{\varkappa\lambda\mu}}u_\varkappa u_\lambda u_\mu = T_f = \mathfrak{T}_f.$$

Fafst man Alles zusammen, so entsteht schliefslich das folgende Theorem:

Theorem 16.

Die folgenden drei zugehörigen Formen:

$$T_f = \delta S_f = \Sigma t_{\varkappa\lambda\mu} u_\varkappa u_\lambda u_\mu,$$
$$\mathfrak{T}_f = \Theta . u \quad (x_\varrho x_\sigma x_\tau = s_{\varrho\sigma\tau}),$$
$$\Sigma ! \frac{dT}{da_{\varkappa\lambda\mu}} u_\varkappa u_\lambda u_\mu$$

sind einander gleich, also:

$$(13.) \quad \begin{cases} \dfrac{dT}{da_{\varkappa\lambda\mu}} = 6 t_{\varkappa\lambda\mu}, & \text{wenn } \varkappa, \lambda, \mu \text{ verschieden sind,} \\ \dfrac{dT}{da_{\varkappa\varkappa\lambda}} = 3 t_{\varkappa\varkappa\lambda}, & \text{wenn } \varkappa, \lambda \text{ verschieden sind,} \\ \dfrac{dT}{da_{\varkappa\varkappa\varkappa}} = t_{\varkappa\varkappa\varkappa} \end{cases}$$

und die Werthe dieser Differentialquotienten sind in drei verschiedenen Formen:

$$(14.) \quad \begin{cases} t_{\varkappa\lambda\mu} = ((aa)^{1\mu} b_1)^{\varkappa\lambda} + ((aa)^{2\mu} b_2)^{\varkappa\lambda} + ((aa)^{3\mu} b_3)^{\varkappa\lambda} \\ t_{\varkappa\lambda\mu} = \frac{1}{2}((ab+ba)^{1\mu} a_1)^{\varkappa\lambda} + \frac{1}{2}((ab+ba)^{2\mu} a_2)^{\varkappa\lambda} + \frac{1}{2}((ab+ba)^{3\mu} a_3)^{\varkappa\lambda} \\ t_{\varkappa\lambda\mu} = \Sigma (a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} s_{\varrho\sigma\mu} \end{cases}$$

darstellbar.

§. 23.

An diese Resultate knüpfen sich nun die Grundgesetze für die zweite Invariante.

Nach der Definition ist

$$\tfrac{1}{4}\delta S = T,$$

also

$$6T = \tfrac{3}{2}\delta S = \Sigma s_{\varkappa\lambda\mu} b_{\varkappa\lambda\mu},$$

d. h. gleich dem Werthe von S_f, wenn man

$$u_\varkappa u_\lambda u_\mu = b_{\varkappa\lambda\mu}$$

setzt. Diese Substitution giebt aber wegen (§. 16 (2.)):

$$6T = \Sigma\Sigma (a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma} (a_\varrho b_\sigma)^{\varkappa\lambda},$$

und wenn man die Summation über ϱ und σ ausführt:

$$(1.) \quad 6T = \begin{cases} \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{11}(a_1 b_1)^{\varkappa\lambda} + \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{12}(a_1 b_2)^{\varkappa\lambda} + \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{13}(a_1 b_3)^{\varkappa\lambda} \\ + \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{21}(a_2 b_1)^{\varkappa\lambda} + \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{22}(a_2 b_2)^{\varkappa\lambda} + \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{23}(a_2 b_3)^{\varkappa\lambda} \\ + \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{31}(a_3 b_1)^{\varkappa\lambda} + \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{32}(a_3 b_2)^{\varkappa\lambda} + \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{33}(a_3 b_3)^{\varkappa\lambda}, \end{cases}$$

wobei noch zu beachten ist, dafs

$$(a_\varrho b_\sigma)^{\varkappa\lambda} \quad \text{und} \quad (a_\sigma b_\varrho)^{\varkappa\lambda}$$

von einander verschieden sind.

Man kann aber auch das Theorem 9. (§. 16) benutzen, um T darzustellen. Setzt man in demselben

$$u_\varkappa u_\lambda u_\mu = b_{\varkappa\lambda\mu},$$

so ergiebt sich, weil dann

$$\tfrac{1}{3}S_f = \tfrac{6}{3}T = 2T$$

wird:

$$(2.)\qquad \Sigma((a\,a)^{\tau\mu}a_\tau)^{\varkappa\lambda}b_{\varkappa\lambda\mu} = \Sigma((a_\varkappa a_\lambda)^{\tau\mu}(a_\tau b_\mu)^{\varkappa\lambda}) = 2T,$$

$$(3.)\qquad \Sigma((a\,a)^{\tau\mu}a_\nu)^{\varkappa\lambda}b_{\varkappa\lambda\mu} = \Sigma((a_\varkappa a_\lambda)^{\tau\mu}(a_\nu b_\mu)^{\varkappa\lambda}) = 0,$$

wo τ und ν constante, von einander verschiedene Indices sind. Die Gleichungen (2.) treten mehr hervor, wenn man die Summation über μ ausführt; sie geben dann

$$(4.)\qquad \begin{cases} 2T = \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{11}(a_1 b_1)^{\varkappa\lambda} + \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{12}(a_1 b_2)^{\varkappa\lambda} + \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{13}(a_1 b_3)^{\varkappa\lambda} \\ 2T = \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{21}(a_2 b_1)^{\varkappa\lambda} + \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{22}(a_2 b_2)^{\varkappa\lambda} + \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{23}(a_2 b_3)^{\varkappa\lambda} \\ 2T = \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{31}(a_3 b_1)^{\varkappa\lambda} + \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{32}(a_3 b_2)^{\varkappa\lambda} + \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{33}(a_3 b_3)^{\varkappa\lambda} \end{cases}$$

und zeigen so, dafs *die drei Horizontalzeilen der rechten Seite von* (1.) *gleiche Summen haben.* Andrerseits ist wegen §. 22 (3.*):

$$\Sigma t_{\varkappa\lambda\tau}a_{\varkappa\lambda\nu} = \Sigma((a\,a)^{\tau\mu}b_\mu)^{\varkappa\lambda}a_{\varkappa\lambda\nu}$$

und

$$\Sigma((a\,a)^{\tau\mu}b_\mu)^{\varkappa\lambda}a_{\varkappa\lambda\nu} = \Sigma((a\,a)^{\tau\mu}a_\nu)^{\varkappa\lambda}b_{\varkappa\lambda\mu},$$

daher gehen die Gleichungen (2.) und (3.) in folgende über:

$$(5.)\qquad \Sigma t_{\varkappa\lambda\tau}a_{\varkappa\lambda\tau} = 2T,$$

$$(6.)\qquad \Sigma t_{\varkappa\lambda\tau}a_{\varkappa\lambda\nu} = 0,$$

und geben so das Theorem:

Theorem 17.

Wenn man in den 9 Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} \Sigma a_{1\varkappa\lambda}t_{1\varkappa\lambda} = 2T, & \Sigma a_{1\varkappa\lambda}t_{2\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma a_{1\varkappa\lambda}t_{3\varkappa\lambda} = 0, \\ \Sigma a_{2\varkappa\lambda}t_{1\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma a_{2\varkappa\lambda}t_{2\varkappa\lambda} = 2T, & \Sigma a_{2\varkappa\lambda}t_{3\varkappa\lambda} = 0, \\ \Sigma a_{3\varkappa\lambda}t_{1\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma a_{3\varkappa\lambda}t_{2\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma a_{3\varkappa\lambda}t_{3\varkappa\lambda} = 2T \end{array}$$

die 10 Gröfsen $t_{\varkappa\lambda\mu}$ als Unbekannte ansieht, so stellen die partiellen Ableitungen von T nach den Gröfsen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ ein System ihrer Lösun-

gen dar, nämlich

$$6t_{\varkappa\lambda\mu} = \frac{dT}{da_{\varkappa\lambda\mu}}, \quad 3t_{\varkappa\varkappa\lambda} = \frac{dT}{da_{\varkappa\varkappa\lambda}}, \quad t_{\varkappa\varkappa\varkappa} = \frac{dT}{da_{\varkappa\varkappa\varkappa}}.$$

Die Verbindung dieses Theorems mit Theorem 8. (§. 15.) giebt die beiden von einander unabhängigen Lösungen beider Systeme von Gleichungen. Da dieselben sich nur in den Constanten $2S$ und $2T$ der rechten Seite von einander unterscheiden, so kann man durch Division mit respective $2S$ und $2T$ beide Systeme von Gleichungen identificiren, und demgemäfs durch

$$\frac{s_{\varkappa\lambda\mu}}{2S}, \quad \frac{t_{\varkappa\lambda\mu}}{2T},$$

zwei Systeme von Lösungen des entstehenden Systemes angeben, ferner alle übrigen durch

$$\frac{s_{\varkappa\lambda\mu}}{2S} + M\cdot\frac{t_{\varkappa\lambda\mu}}{2T},$$

wo M ein willkührlicher Factor ist.

Man findet sofort zwei analoge Systeme von Gleichungen, wenn man in (5.) und (6.) statt der Coefficienten $t_{\varkappa\lambda\tau}$ diejenigen Werthe setzt, welche sie als Coefficienten von $\mathfrak{T}_f$ besitzen. Nach §. 22 (9.) wird dann

$$\Sigma t_{\varkappa\lambda\tau}\, a_{\varkappa\lambda\nu} = \Sigma\Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} s_{\varrho\sigma\tau}\, a_{\varkappa\lambda\nu},$$

wo immer τ und ν constante Indices sind; es ist aber definitionsmäfsig:

$$b_{\varrho\sigma\nu} = \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} a_{\varkappa\lambda\nu},$$

also auch

$$(7.)\quad \Sigma t_{\varkappa\lambda\tau}\, a_{\varkappa\lambda\nu} = \Sigma b_{\varrho\sigma\nu}\, s_{\varrho\sigma\tau},$$

und daher ergiebt sich wegen (5.) und (6.):

Theorem 18.

Wenn man in den 9 Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} \Sigma b_{1\varkappa\lambda} s_{1\varkappa\lambda} = 2T, & \Sigma b_{1\varkappa\lambda} s_{2\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma b_{1\varkappa\lambda} s_{3\varkappa\lambda} = 0 \\ \Sigma b_{2\varkappa\lambda} s_{1\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma b_{2\varkappa\lambda} s_{2\varkappa\lambda} = 2T, & \Sigma b_{2\varkappa\lambda} s_{3\varkappa\lambda} = 0 \\ \Sigma b_{3\varkappa\lambda} s_{1\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma b_{3\varkappa\lambda} s_{2\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma b_{3\varkappa\lambda} s_{3\varkappa\lambda} = 2T \end{array}$$

die 10 Gröfsen $s_{\varkappa\lambda\mu}$ als Unbekannte betrachtet, so ist ein System von Lösungen durch die partiellen Ableitungen von S nach den Gröfsen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ gegeben, nämlich

$$6s_{\varkappa\lambda\mu} = \tfrac{3}{2}\frac{dS}{da_{\varkappa\lambda\mu}}, \quad 3s_{\varkappa\varkappa\mu} = \tfrac{3}{2}\frac{dS}{da_{\varkappa\varkappa\mu}}, \quad s_{\varkappa\varkappa\varkappa} = \tfrac{3}{2}\frac{dS}{da_{\varkappa\varkappa\varkappa}}.$$

Der Charakter der Ausdrücke

$$\Sigma b_{\varrho\sigma\nu} s_{\varrho\sigma\tau}$$

tritt deutlicher hervor, wenn man die bekannten Werthe für $s_{\varrho\sigma\tau}$ substituirt. Ist nämlich μ ein veränderlicher Index, so wird

$$\Sigma b_{\varrho\sigma\nu} a_{\varrho\sigma\tau} = \Sigma b_{\varrho\sigma\nu}((aa)^{\tau\mu} a_\mu)^{\varrho\sigma} = \Sigma(a_\mu b_\nu)^{\varrho\sigma}(a_\varrho a_\sigma)^{\tau\mu}$$

und die Gleichungen (5.) und (6.) oder (2.) und (3.) nehmen die Form an:

$$(8.)\quad \begin{cases} 2T = \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\mu\tau}(a_\mu b_\tau)^{\varrho\sigma} \\ 0 \;\;= \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\mu\tau}(a_\mu b_\nu)^{\varrho\sigma}. \end{cases}$$

Führt man nun in der ersten Gleichung die Summation über μ aus und setzt statt τ allmälig 1, 2, 3, so entstehen die Gleichungen:

$$(9.)\quad \begin{cases} 2T = \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{11}(a_1 b_1)^{\varrho\sigma} + \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{12}(a_1 b_2)^{\varrho\sigma} + \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{13}(a_1 b_3)^{\varrho\sigma} \\ 2T = \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{21}(a_2 b_1)^{\varrho\sigma} + \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{22}(a_2 b_2)^{\varrho\sigma} + \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{23}(a_2 b_3)^{\varrho\sigma} \\ 2T = \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{31}(a_3 b_1)^{\varrho\sigma} + \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{32}(a_3 b_2)^{\varrho\sigma} + \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{33}(a_3 b_3)^{\varrho\sigma}, \end{cases}$$

welche zeigen, ***dafs auch die 3 Verticalzeilen** in (1.) **gleiche Summen haben.***

Schreibt man noch die Coefficienten von $\mathfrak{T}_f$ (§. 22 (9.))

$$t_{\varrho\sigma\tau} = \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma} s_{\varkappa\lambda\tau}$$

in ausgeführter Summation hin, nämlich

$$(10.)\quad t_{\varrho\sigma\tau} = (a_1 a_1)^{\varrho\sigma} s_{11\tau} + (a_2 a_2)^{\varrho\sigma} s_{22\tau} + (a_3 a_3)^{\varrho\sigma} s_{33\tau} + 2(a_2 a_3)^{\varrho\sigma} s_{23\tau} + 2(a_1 a_3)^{\varrho\sigma} s_{13\tau} + 2(a_1 a_2)^{\varrho\sigma} s_{12\tau}$$

und setzt für ϱ und σ allmälig die Combinationen von 1, 2, 3, so entstehen sechs Gleichungen von der Form der im Theorem 3. (§. 8) erwähnten, welche sich in Folge dessen sofort nach den $s_{\varkappa\lambda\tau}$ auflösen lassen und wegen §. 8 (7.)

$$(11.)\quad S.s_{\varrho\sigma\tau} = \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma} t_{\varkappa\lambda\tau}$$

geben, so dafs also

$$(12.)\quad \Sigma\Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma} t_{\varkappa\lambda\tau} u_\varrho u_\sigma = S\Sigma s_{\varrho\sigma\tau} u_\varrho u_\sigma = \tfrac{1}{3} S\frac{dS_f}{du_\tau}$$

wird. Diese Gleichungen liefern zunächst ein Ergänzungstheorem zum achtzehnten Theorem. Substituirt man nämlich in (12.) auf beiden Seiten statt $u_\varrho u_\sigma$ die entsprechenden $a_{\varrho\sigma\nu}$, wo ν wie τ ein constanter Index, und bemerkt, dafs nach §. 15 Theorem 8.

$$\Sigma a_{\varrho\sigma\tau} s_{\varrho\sigma\tau} = 2S, \qquad \Sigma a_{\varrho\sigma\nu} s_{\varrho\sigma\tau} = 0$$

ist, so giebt (12.)

$$\Sigma\Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma} t_{\varkappa\lambda\tau} a_{\varrho\sigma\nu} = 2S^2 \quad \text{oder} \quad = 0,$$

je nachdem $\tau = \nu$, oder τ von ν verschieden ist.

Aber

$$b_{\varkappa\lambda\nu} = \Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma} a_{\varrho\sigma\nu},$$

also

$$(13.) \qquad \Sigma b_{\varkappa\lambda\nu} t_{\varkappa\lambda\tau} = 2S^2 \quad \text{oder} \quad = 0,$$

mithin:

Theorem 19.

Wenn man in den 9 Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} \Sigma b_{1\varkappa\lambda} t_{1\varkappa\lambda} = 2S^2, & \Sigma b_{2\varkappa\lambda} t_{1\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma b_{3\varkappa\lambda} t_{1\varkappa\lambda} = 0, \\ \Sigma b_{1\varkappa\lambda} t_{2\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma b_{2\varkappa\lambda} t_{2\varkappa\lambda} = 2S^2, & \Sigma b_{3\varkappa\lambda} t_{2\varkappa\lambda} = 0, \\ \Sigma b_{1\varkappa\lambda} t_{3\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma b_{2\varkappa\lambda} t_{3\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma b_{3\varkappa\lambda} t_{3\varkappa\lambda} = 2S^2 \end{array}$$

die Gröfsen $t_{\varkappa\lambda\mu}$ als Unbekannte betrachtet, so ist ein System von Lösungen durch die partiellen Ableitungen von T nach den Gröfsen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ gegeben, nämlich:

$$t_{\varkappa\varkappa\varkappa} = \frac{dT}{da_{\varkappa\varkappa\varkappa}}, \qquad 3t_{\varkappa\varkappa\lambda} = \frac{dT}{da_{\varkappa\varkappa\lambda}}, \qquad 6t_{123} = \frac{dT}{da_{123}}.$$

Die Verbindung der Theoreme 18. und 19. erfolgt ebenso wie die angegebene Verbindung der Theoreme 8. und 17.

Die Gleichung (11.) liefert noch ein zweites bemerkenswerthes Resultat. Bildet man nämlich

$$\begin{aligned} \delta t_{\varrho\sigma\tau} &= \delta\Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma} s_{\tau\varkappa\lambda} \\ &= 2\Sigma(a_\varkappa b_\lambda)^{\varrho\sigma} s_{\tau\varkappa\lambda} + 3\Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma} t_{\tau\varkappa\lambda} \end{aligned}$$

und bemerkt, dafs wegen §. 20 (5.) (6.) und des 8ten Theorems:

$$\begin{aligned} \Sigma(a_\varkappa b_\lambda)^{\varrho\sigma} s_{\tau\varkappa\lambda} &= \Sigma(a_{1\varkappa\lambda} s_{1\varrho\sigma} + a_{2\varkappa\lambda} s_{2\varrho\sigma} + a_{3\varkappa\lambda} s_{3\varrho\sigma}) s_{\tau\varkappa\lambda} - S.s_{\tau\varrho\sigma} \\ &= 2Ss_{\tau\varrho\sigma} - Ss_{\tau\varrho\sigma} = Ss_{\tau\varrho\sigma} \end{aligned}$$

ist, so ergiebt sich

$$\delta t_{\varrho\sigma\tau} = 2Ss_{\varrho\sigma\tau} + 3\Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\varrho\sigma} t_{\tau\varkappa\lambda},$$

also wegen (11.):

$$\delta t_{\varrho\sigma\tau} = 5Ss_{\varrho\sigma\tau}.$$

Es folgt hieraus, dafs

$$(14.) \qquad \delta T_f = 5S.S_f,$$

ist, *also dafs sich durch Wiederholung der Operation δ immer nur Verbindungen aus S_f und T_f finden lassen.* Hiermit in Verbindung steht aber noch

ein anderes Resultat, welches in §. 13 (8.) bereits angegeben ist. Da nämlich

$$2T = \Sigma a_{1\varkappa\lambda} t_{1\varkappa\lambda}$$

ist, so wird

$$2\delta T = \Sigma b_{1\varkappa\lambda} t_{1\varkappa\lambda_1} + \Sigma a_{1\varkappa\lambda} \delta t_{1\varkappa\lambda},$$

aber wegen des 19ten Theorems

$$\Sigma b_{1\varkappa\lambda} t_{1\varkappa\lambda} = 2S^2$$

und wegen (14.)

$$\Sigma a_{1\varkappa\lambda} \delta t_{1\varkappa\lambda} = 5S\Sigma a_{1\varkappa\lambda} s_{1\varkappa\lambda} = 10S^2,$$

also

$$(15.) \quad \delta T = 6S^2.$$

Die 4 Systeme linearer Gleichungen, welche in den Theoremen 8, 17, 18, 19 behandelt sind, kommen bei fast allen Anwendungen der vorliegenden Theorie vor, daher ist hervorzuheben, dafs durch die gegebene Auswerthung der bezüglichen Ableitungen von S und T, ihre Lösungen in schliefslicher Endform vollständig dargestellt sind.

§. 24.

Als Beispiel der Anwendung der bisher entwickelten Theorie will ich für die *Hesse*sche Form die Invarianten, Covarianten, zugehörigen Formen und Zwischenformen berechnen, indem ich sie in der Fassung des §. 10 zu Grunde lege, und nur der Kürze halber die Variabeln und Coefficienten als ursprüngliche schreibe.

Es sei also

$$(1.) \quad f = a_1 x_1^3 + a_2 x_2^3 + a_3 x_3^3 + 6a_4 x_1 x_2 x_3$$

die gegebene Form, dann sind die Coefficienten $A_{\varkappa\lambda}$ der *quadratischen* Form:

$$(2.) \quad \Sigma A_{\varkappa\lambda} y_\varkappa y_\lambda = a_1 x_1 y_1^2 + a_2 x_2 y_2^2 + a_3 x_3 y_3^2 + 2a_4(x_1 y_2 y_3 + x_2 y_1 y_3 + x_3 y_1 y_2),$$

die zweiten Ableitungen von f nach den Variabeln, dividirt durch 6, und die zugehörige Form von (2.) ist *die erste Zwischenform* (§. 9 (6.)), nämlich

$$(3.) \begin{cases} \Theta = \Sigma(AA)^{\varkappa\lambda} u_\varkappa u_\lambda = \\ \quad (2a_2a_3x_2x_3 - 2a_4^2x_1^2)u_1^2 + (2a_1a_3x_1x_3 - 2a_4^2x_2^2)u_2^2 + (2a_1a_2x_1x_2 - 2a_4^2x_3^2)u_3^2 \\ + 2(2a_4^2x_2x_3 - 2a_1a_4x_1^2)u_2u_3 + 2(2a_4^2x_1x_3 - 2a_2a_4x_2^2)u_1u_3 \\ \qquad + 2(2a_4^2x_1x_2 - 2a_3a_4x_3^2)u_1u_2 \end{cases}$$

Hieraus ergiebt sich die *erste Covariante* $\Delta f = \Sigma(AA)^{\varkappa\lambda} A_{\varkappa\lambda}$ oder kürzer:

$$\Delta f = 3\{(AA)^{11} A_{11} + (AA)^{12} A_{12} + (AA)^{13} A_{13}\}$$

als folgende:

$$(4.)\qquad \varDelta f = -6a_4^2(a_1x_1^3+a_2x_2^3+a_3x_3^3)+6(2a_4^3+a_1a_2a_3)x_1x_2x_3.$$

Zur Berechnung von S_f nehme man die verkürzte Form §. 16 (3.)

$$\tfrac{1}{3}S_f = \Sigma((aa)^{1\mu}a_1)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu.$$

Setzt man der Kürze halber

$$(5.)\qquad (a_\varrho a_\sigma)^{11}u_1+(a_\varrho a_\sigma)^{12}u_2+(a_\varrho a_\sigma)^{13}u_3 = \alpha_{\varrho\sigma},$$

so ist

$$\tfrac{1}{3}S_f = \Sigma(\alpha a_1)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda = \Sigma(\alpha, uu)^{\varkappa\lambda}a_{1\varkappa\lambda},$$

also

$$(6.)\qquad \tfrac{1}{3}S_f = (\alpha, uu)^{11}a_1+2(\alpha, uu)^{23}a_4,$$

weil die übrigen Glieder mit Coefficienten multiplicirt sind, welche für die Form (1.) der Null gleich sind.

Es ist aber

$$(\alpha, uu)^{11} = \alpha_{22}u_3^2+\alpha_{33}u_2^2-2\alpha_{23}u_2u_3$$
$$(\alpha, uu)^{23} = \alpha_{13}u_1u_2+\alpha_{12}u_1u_3-\alpha_{11}u_2u_3-\alpha_{23}u_1u_3$$

und nach der Definition (5.):

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= -2a_4^2u_1 & \alpha_{23} &= a_2a_3u_1\\ \alpha_{22} &= -2a_2a_4u_3 & \alpha_{13} &= a_4^2u_3\\ \alpha_{33} &= -2a_3a_4u_2 & \alpha_{12} &= a_4^2u_2, \end{aligned}$$

wobei zu bemerken ist, dafs man die Coefficienten $(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}$, welche in (5.) vorkommen, aus (3.) entnehmen kann oder aus dem Schema §. 10 (4.).

Hieraus folgt die *erste zugehörige Form*

$$(7.)\qquad S_f = -6a_4(a_2a_3u_1^3+a_1a_3u_2^3+a_1a_2u_3^3)+6(4a_4^3-a_1a_2a_3)u_1u_2u_3.$$

Die erste Invariante S, welche bereits §. 10 berechnet ist, folgt aus (7.) von Neuem, nämlich, da $S_f=\Sigma s_{\varkappa\lambda\mu}u_\varkappa u_\lambda u_\mu$,

$$(8.)\qquad S = \tfrac{1}{6}\Sigma s_{\varkappa\lambda\mu}a_{\varkappa\lambda\mu} = 4a_4(a_4^3-a_1a_2a_3),$$

und die zweite Invariante T:

$$(9.)\qquad T = \tfrac{1}{6}\Sigma s_{\varkappa\lambda\mu}b_{\varkappa\lambda\mu} = 8a_4^6+20a_1a_2a_3a_4^3-a_1^2a_2^2a_3^2,$$

wo die Coefficienten $b_{\varkappa\lambda\mu}$ aus (4.) zu entnehmen sind.

Man bilde nun die zweiten Ableitungen von $\varDelta f$ nach den Variabeln, als Coefficienten der quadratischen Form:

$$\begin{aligned}(10.)\qquad \Sigma B_{\varkappa\lambda}y_\varkappa y_\lambda = &-6a_4^2(a_1x_1y_1^2+a_2x_2y_2^2+a_3x_3y_3^2)\\ &+2(2a_4^3+a_1a_2a_3)(x_1y_2y_3+x_2y_1y_3+x_3y_1y_2)\end{aligned}$$

und aus der Verbindung ihrer Coefficienten mit denen von (2.) die *zweite Zwischenform:*

$$(11.)\quad H = \Sigma(AB)^{\varkappa\lambda} u_\varkappa u_\lambda =$$
$$(-2a_4(2a_4^3+a_1a_2a_3)x_1^2-12a_2a_3a_4x_2x_3)u_1^2+$$
$$(-2a_4(2a_4^3+a_1a_2a_3)x_2^2-12a_1a_3a_4x_1x_3)u_2^2+$$
$$(-2a_4(2a_4^3+a_1a_2a_3)x_3^2-12a_1a_2a_4x_1x_2)u_3^2+$$
$$2(a_1(4a_4^3-a_1a_2a_3)x_1^2+2a_4(2a_4^3+a_1a_2a_3)x_2x_3)u_2u_3+$$
$$2(a_2(4a_4^3-a_1a_2a_3)x_2^2+2a_4(2a_4^3+a_1a_2a_3)x_1x_3)u_1u_3+$$
$$2(a_3(4a_4^3-a_1a_2a_3)x_3^2+2a_4(2a_4^3+a_1a_2a_3)x_1x_2)u_1u_2.$$

Diese Form giebt die sämmtlichen Gröfsen

$$(a_\varkappa b_\lambda + a_\lambda b_\varkappa)^{\varrho\sigma},$$

aus welchen, vermittelst der Definitionsgleichung

$$T_f = \tfrac{1}{3}\delta S_f = \Sigma((ab+ba)^{1\mu}a_1)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu + \Sigma((aa)^{1\mu}b_1)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu,$$

die zweite zugehörige Form T_f sich berechnen läfst, man gelangt aber wegen der oben bereits berechneten Gröfsen $\alpha_{\varkappa\lambda}$ etwas schneller zum Ziele, wenn man nach §. 18 (9.)

$$(12.)\quad T_f = \Sigma((aa)^{1\mu}b_1)u_\varkappa u_\lambda u_\mu + \Sigma((aa)^{2\mu}b_2)u_\varkappa u_\lambda u_\mu + \Sigma((aa)^{3\mu}b_3)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu$$

setzt. Es ist nämlich wegen (5.)

$$\Sigma((aa)^{1\mu}b_1)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu = \Sigma(\alpha, uu)^{\varkappa\lambda}b_{1\varkappa\lambda},$$

und weil wegen (4.)

$$b_{111} = -6a_4^2a_1, \qquad b_{123} = 2a_4^3+a_1a_2a_3$$

ist, und die übrigen $b_{1\varkappa\lambda}=0$ sind:

$$\Sigma((aa)^{1\mu}b_1)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu = -6(\alpha, uu)^{11}a_4^2a_1 + 2(\alpha, uu)^{23}(2a_4^3+a_1a_2a_3)$$
$$=6a_1a_4^2(2a_2a_4u_3^3+2a_3a_4u_2^3+2a_2a_3u_1u_2u_3)+2(2a_4^3+a_1a_2a_3)(4a_4^2u_1u_2u_3-a_2a_3u_1^3),$$

wenn man die obigen Werthe von $(\alpha, uu)^{11}$ und $(\alpha, uu)^{23}$ substituirt. Ordnet man diesen Ausdruck und bildet durch Vertauschung der Indices die beiden andern Summen von (12.), so entsteht:

$$(13.)\quad \begin{cases} \Sigma((aa)^{1\mu}b_1)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu = -2a_2a_3(2a_4^3+a_1a_2a_3)u_1^3+12a_1a_3a_4^3u_2^3+12a_1a_2a_4^3u_3^3 \\ \qquad\qquad +4a_4^2(4a_4^3+5a_1a_2a_3)u_1u_2u_3 \\ \Sigma((aa)^{2\mu}b_2)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu = 12a_2a_3a_4^3u_1^3-2a_1a_3(2a_4^3+a_1a_2a_3)u_2^3+12a_1a_2a_4^3u_3^3 \\ \qquad\qquad +4a_4^2(4a_4^3+5a_1a_2a_3)u_1u_2u_3 \\ \Sigma((aa)^{3\mu}b_3)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda u_\mu = 12a_2a_3a_4^3u_1^3+12a_1a_3u_2^3-2a_1a_2(2a_4^3+a_1a_2a_3)u_3^3 \\ \qquad\qquad +4a_4^2(4a_4^3+5a_1a_2a_3)u_1u_2u_3, \end{cases}$$

also durch Summation dieser drei Gleichungen die *zweite zugehörige Form:*

$$(14.)\qquad T_f = 2\{(10a_4^3 - a_1a_2a_3)(a_2a_3u_1^3 + a_1a_3u_2^3 + a_1a_2u_3^3) + 6a_4^2(4a_4^3 + 5a_1a_2a_3)u_1u_2u_3\}.$$

Von der absoluten Invariante.

§. 25.

Wenn man aus den Gleichungen

$$S' = r^4 S,$$
$$T' = r^6 T$$

die Determinante r eliminirt, so erhält man

$$(1.)\qquad \frac{S'^3}{T'^2} = \frac{S^3}{T^2}$$

d. h. eine Bedingung zwischen den Coefficienten der ursprünglichen und der transformirten Form, welche erfüllt sein mufs, wenn es möglich sein soll die eine in die andere zu transformiren.

Die Function $\frac{S^3}{T^2}$ will ich in der Folge die *absolute Invariante* nennen und durch J bezeichnen; sie ist eine gebrochene Function der Coefficienten, deren Zähler und Nenner von derselben und zwar 12ten Ordnung in Bezug auf die Coefficienten sind. Die Bezeichnung „absolut" gebe ich ihr, weil sie, für die transformirte Form gebildet, von den Substitutionscoefficienten gänzlich unabhängig bleibt, während die andern Invarianten noch die Determinante r der Substitutionscoefficienten enthalten, also weil $J' = J$ ohne Vermittlung von r ist.

Wenn man verlangt, dafs durch lineare Substitutionen die Functionen

$$f = \Sigma a_{\varkappa\lambda\mu} x_\varkappa x_\lambda x_\mu, \qquad f' = \Sigma a'_{\varkappa\lambda\mu} X_\varkappa X_\lambda X_\mu$$

in einander transformirt werden sollen, und das gewöhnliche Verfahren dabei angewendet wird, welches darin besteht, dafs man die Substitution in f einsetzt und die erhaltene Form mit f' identificirt, so erhält man zehn Gleichungen von der Form:

$$(2.)\qquad a'_{\varkappa\lambda\mu} = a_{111}\alpha_\varkappa\alpha_\lambda\alpha_\mu + a_{112}(\alpha_\varkappa\alpha_\lambda\beta_\mu + \alpha_\lambda\alpha_\mu\beta_\varkappa + \alpha_\mu\alpha_\varkappa\beta_\lambda) + \cdots,$$

aus welchen man die 9 Substitutionscoefficienten $\alpha_\varkappa$, β_λ, γ_μ eliminiren kann. Es folgt daher, dafs immer eine Relation zwischen den Coefficienten $a'_{\varkappa\lambda\mu}$ und $a_{\varkappa\lambda\mu}$ bestehen mufs, damit die Transformation möglich sei. Die Gleichung (1.)

$$J' = J \quad\text{oder}\quad J' - J = 0$$

giebt diese Bedingung und zwar in einer Form, welche dadurch merkwürdig ist, dafs in derselben die Coefficienten $a_{\varkappa\lambda\mu}$ und $a'_{\varkappa\lambda\mu}$ von einander *separirt* erscheinen, ohne dafs sie aufhört *rational* zu bleiben. In der am Eingange dieser Abhandlung bezeichneten Schrift habe ich nachgewiesen, dafs sowohl die Form der mit

$$J' - J = 0$$

analogen Gleichungen, als die Art und Weise ihrer Entstehung für homogene Functionen von beliebig vielen Variabeln und beliebiger Ordnung in allen Fällen bestehen bleibt, und diesen Umstand als Ausgangspunkt für die Theorie der Invarianten benutzt.

Um im vorliegenden Falle eine bestimmte Transformation für die homogenen Functionen 3ter Ordnung von drei Veränderlichen zu erhalten, mufs man über 9 Coefficienten nach Belieben verfügen und die Bestimmung des 10ten dem Eliminationsproblem, d. h. den Gleichungen (2.) überlassen; nach dem Vorstehenden giebt aber die Gleichung

$$J' = J$$

diesen übrig bleibenden Coefficienten.

Setzt man z. B. die *Hesse*sche Form

$$f' = X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + 6k X_1 X_2 X_3$$

voraus, so hat man im vorigen Paragraphen nur

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 1, \quad a_4 = k$$

zu setzen, um

$$J' = \frac{(4k^4 - 4k)^3}{(8k^6 + 20k^3 - 1)^2}$$

und durch Auflösung der Gleichung:

$$\frac{S^3}{T^2} = \frac{(4k^4 - 4k)^3}{(8k^6 + 20k^3 - 1)^2},$$

den Werth für k zu erhalten.

Diese Entwicklungen zeigen schliefslich, *dafs die Anzahl der von einander unabhängigen Invarianten nur zwei beträgt,* denn wäre P eine dritte, welche der Gleichung

$$P' = r^\lambda . P$$

genügt, so könnte man durch Elimination von r aus den 3 Gleichungen

$$S' = r^4 S$$
$$T' = r^6 T$$
$$P' = r^\lambda P$$

zwei Gleichungen erhalten, in welchen nur die eine Unbekannte k vorkommt, und durch nachträgliche Elimination von k aus denselben *eine* Relation zwischen P, S, T mit rein numerischen Coefficienten. Man sieht hieraus nicht allein, dafs P, S, T immer algebraisch von einander abhängig sind, sondern auch wie man P aus S und T zusammensetzen kann. Ich bemerke hierbei, dafs Herr *Sylvester* in einer schönen Abhandlung (Philosophical Magazine 1853. Vol. V, pag. 299 und folg.) nachgewiesen hat, dafs jede ganze Function P immer eine *ganze* Function von S und T ist.

§. 26.

Ich will nun eine Grundeigenschaft der *absoluten Invariante* angeben, welche sich auf alle absoluten Invarianten ausdehnen läfst, und für die Fortführung der allgemeinen Theorie nothwendig wird.

Bildet man

$$\frac{dJ}{da_{\varkappa\lambda\mu}} = \frac{d(S^3T^{-2})}{da_{\varkappa\lambda\mu}} = \frac{S^2}{T^3}\left(3T\frac{dS}{da_{\varkappa\lambda\mu}} - 2S\frac{dT}{da_{\varkappa\lambda\mu}}\right),$$

berücksichtigt ferner, dafs

$$\frac{dS}{da_{\varkappa\varkappa\varkappa}} = \tfrac{2}{3}s_{\varkappa\varkappa\varkappa}, \qquad \frac{dS}{da_{\varkappa\varkappa\lambda}} = \tfrac{2}{3}\cdot 3s_{\varkappa\varkappa\lambda}, \qquad \frac{dS}{da_{123}} = \tfrac{2}{3}\cdot 6s_{123},$$

$$\frac{dT}{da_{\varkappa\varkappa\varkappa}} = t_{\varkappa\varkappa\varkappa}, \qquad \frac{dT}{da_{\varkappa\varkappa\lambda}} = 3t_{\varkappa\varkappa\lambda}, \qquad \frac{dT}{da_{123}} = 6t_{123}$$

und setzt

$$\frac{dJ}{da_{\varkappa\varkappa\varkappa}} = J_{\varkappa\varkappa\varkappa}, \qquad \frac{dJ}{da_{\varkappa\varkappa\lambda}} = 3J_{\varkappa\varkappa\lambda}, \qquad \frac{dJ}{da_{123}} = 6J_{123},$$

so folgt:

$$(1.) \qquad J_{\varkappa\lambda\mu} = \frac{2S^2}{T^3}(T.s_{\varkappa\lambda\mu} - S.t_{\varkappa\lambda\mu}).$$

Die Gleichungen §. 15, Theorem 8., deren erste

$$\Sigma a_{1\varkappa\lambda}s_{1\varkappa\lambda} = 2S$$

und die Gleichungen §. 23, Theorem 17., deren erste

$$\Sigma a_{1\varkappa\lambda}t_{1\varkappa\lambda} = 2T$$

ist, geben aber, nachdem sie respective mit T und $-S$ multiplicirt und zu einander addirt sind:

$$\Sigma a_{1\varkappa\lambda}(T.s_{1\varkappa\lambda} - S.t_{1\varkappa\lambda}) = 0,$$

also folgt wegen (1.):

$$\Sigma a_{1\varkappa\lambda}J_{1\varkappa\lambda} = 0,$$

und ebenso

$$\Sigma a_{2\varkappa\lambda} J_{2\varkappa\lambda} = 0,$$
$$\Sigma a_{3\varkappa\lambda} J_{3\varkappa\lambda} = 0.$$

Da die rechten Seiten der übrigen Gleichungen der genannten Theoreme von selbst = Null sind, so folgt also für jeden constanten Werth von ϱ und σ

$$(2.)\quad \Sigma a_{\varrho\varkappa\lambda} J_{\sigma\varkappa\lambda} = 0,$$

wenn $\varkappa$ und λ die veränderlichen Indices sind, daher:

Theorem 20.

Die Auflösungen der 9 linearen Gleichungen:

$$(3.)\quad \begin{cases} \Sigma a_{1\varkappa\lambda} p_{1\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma a_{1\varkappa\lambda} p_{2\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma a_{1\varkappa\lambda} p_{3\varkappa\lambda} = 0, \\ \Sigma a_{2\varkappa\lambda} p_{1\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma a_{2\varkappa\lambda} p_{2\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma a_{2\varkappa\lambda} p_{3\varkappa\lambda} = 0, \\ \Sigma a_{3\varkappa\lambda} p_{1\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma a_{3\varkappa\lambda} p_{2\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma a_{3\varkappa\lambda} p_{3\varkappa\lambda} = 0, \end{cases}$$

in welchen die 9 Verhältnisse der $p_{\varkappa\lambda\mu}$ die Unbekannten sind, lassen sich durch

$$p_{111} : p_{112} : \ldots : p_{123} = J_{111} : J_{112} : \ldots : J_{123}$$

darstellen, wo die Gröfsen $J_{\varkappa\lambda\mu}$ die partiellen Ableitungen der absoluten Invariante J nach den Gröfsen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ bedeuten und zwar multiplicirt mit 1, 3 oder 6, je nachdem von den Indices $\varkappa$, λ, μ alle drei einander gleich, nur zwei einander gleich, oder alle von einander verschieden sind.

Die sämmtlichen $J_{\varkappa\lambda\mu}$ haben wegen (1.) den gemeinschaftlichen Factor $\frac{2S^2}{T^3}$, man kann daher in Folge der obigen Proportion als Auflösungen des Systems (3.) die Ausdrücke

$$(4.)\quad p_{\varkappa\lambda\mu} = T.s_{\varkappa\lambda\mu} - S.t_{\varkappa\lambda\mu}$$

betrachten, welche in Bezug auf die Gröfsen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ von der 9ten Ordnung sind, und ***daher bis auf einen numerischen Factor mit den partiellen Determinanten des Systems*** (3.), ***welche von derselben Ordnung sind, übereinstimmen müssen.***

Bildet man die zugehörige Form, welche der absoluten Invariante entspricht, so hat man

$$(5.)\quad J_f(u_1, u_2, u_3) = \Sigma J_{\varkappa\lambda\mu} u_\varkappa u_\lambda u_\mu.$$

Da aber auch die Gröfsen $p_{\varkappa\lambda\mu}$ als Coefficienten einer zugehörigen Form betrachtet werden können, so sei

$$(6.)\quad \Sigma p_{\varkappa\lambda\mu} u_\varkappa u_\lambda u_\mu = P_f(u_1, u_2, u_3)$$

gesetzt; dann ist

$$(7.)\quad J_f(u_1, u_2, u_3) = \frac{2S^2}{T^3} P_f(u_1, u_2, u_3),$$

und man kann alle auf J_f bezüglichen Untersuchungen an die einfachere Form P_f anknüpfen. Diese ist aber eine der wichtigsten der vorliegenden Theorie und ich will sie aus Gründen, die im folgenden Paragraph entwickelt werden, die *conjugirte zugehörige Form* nennen. Bildet man dieselbe für die transformirte Form f', so ist leicht ersichtlich, dafs

$$(8.)\quad P'_f(U_1, U_2, U_3) = r^{10}.P_f(u_1, u_2, u_3)$$

ist, weil nach (4.) die Bildung von P_f aus S_f und T_f durch die Gleichung

$$(9.)\quad P_f(u_1, u_2, u_3) = T.S_f(u_1, u_2, u_3) - S.T_f(u_1, u_2, u_3)$$

ausgedrückt wird.

Von der conjugirten zugehörigen Form.

§. 27.

Aus den Gleichungen (§. 26 (3.))

$$(1.)\quad \Sigma a_{\varrho\varkappa\lambda} p_{\sigma\varkappa\lambda} = 0,$$

welche die Coefficienten der conjugirten Form P_f liefern, folgt, dafs umgekehrt, wenn man die Coefficienten $p_{\varkappa\lambda\mu}$ als gegeben ansieht, die Coefficienten $a_{\varkappa\lambda\mu}$ genau dieselben Functionen der $p_{\varkappa\lambda\mu}$ sind, wie die $p_{\varkappa\lambda\mu}$ von $a_{\varkappa\lambda\mu}$ waren, weil die Gleichungen (1.) in Bezug auf beide Systeme symmetrisch sind. Hieraus folgt:

Theorem 21.

Die gegebene Form $f(x_1, x_2, x_3)$ und die conjugirte $P_f(u_1, u_2, u_3)$ stehen in der Beziehung zu einander, dafs gegenseitig die eine die conjugirte der andern ist.

Dieses Theorem zeigt, dafs P_f diejenige zugehörige Form der cubischen Formen ist, welche sich in einer sehr wichtigen Eigenschaft den zugehörigen Formen der homogenen Functionen zweiten Grades analog verhält.

Bezeichnet man demnach durch

$$P_p(x_1, x_2, x_3)$$

die conjugirte zugehörige Form zu

$$P_f(u_1, u_2, u_3),$$

so ist

$$(2.)\quad P_p(x_1, x_2, x_3) = K.f(x_1, x_2, x_3),$$

wo K einen constanten Factor bedeutet, welcher von der 80sten Ordnung in Bezug auf die Coefficienten $a_{\varkappa\lambda\mu}$ ist, weil P_p in Bezug auf dieselben Gröfsen von der Ordnung 9^2 werden mufs. Der Werth für K ist übrigens

$$K = -32 R^6 S^2,$$

wie ich anderweitig zeigen werde. Führt man ferner die Coefficienten $p_{\varkappa\lambda\mu}$ in die Gleichungen des 18ten und 19ten Theorems ein, so entsteht

$$\begin{aligned}\Sigma b_{1\varkappa\lambda} p_{1\varkappa\lambda} &= \Sigma b_{1\varkappa\lambda}(T.s_{1\varkappa\lambda} - S.t_{1\varkappa\lambda})\\ &= T.\Sigma b_{1\varkappa\lambda} s_{1\varkappa\lambda} - S\Sigma b_{1\varkappa\lambda} t_{1\varkappa\lambda},\end{aligned}$$

also mit Berücksichtigung der genannten Theoreme

$$\Sigma b_{1\varkappa\lambda} p_{1\varkappa\lambda} = 2(T^2 - S^3).$$

Bezeichnet man noch durch

$$(3.)\qquad R = T^2 - S^3$$

die Constante auf der rechten Seite, so hat man:

Theorem 22.

Die Coefficienten $p_{\varkappa\lambda\mu}$ der conjugirten Form genügen den folgenden Gleichungen:

$$(4.)\qquad \begin{cases}\Sigma b_{1\varkappa\lambda} p_{1\varkappa\lambda} = 2R, & \Sigma b_{1\varkappa\lambda} p_{2\varkappa\lambda} = 0, \quad \Sigma b_{1\varkappa\lambda} p_{3\varkappa\lambda} = 0,\\ \Sigma b_{2\varkappa\lambda} p_{1\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma b_{2\varkappa\lambda} p_{2\varkappa\lambda} = 2R, \quad \Sigma b_{2\varkappa\lambda} p_{3\varkappa\lambda} = 0,\\ \Sigma b_{3\varkappa\lambda} p_{1\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma b_{3\varkappa\lambda} p_{2\varkappa\lambda} = 0, \quad \Sigma b_{3\varkappa\lambda} p_{3\varkappa\lambda} = 2R,\end{cases}$$

und es ist in Folge dessen

$$R = T^2 - S^3 = 0$$

das Eliminationsresultat der Variabeln x_1, x_2, x_3 aus den quadratischen Gleichungen:

$$(5.)\qquad \frac{df}{dx_1} = 0, \quad \frac{df}{dx_2} = 0, \quad \frac{df}{dx_3} = 0.$$

Der 2te Theil des Theorems folgt aus der bekannten Darstellung dieses Eliminationsresultats, welche Herr *Hesse* (Bd. 28, S. 68 dieses Journals) gegeben hat, und zwar hat man, da aus (5.) die 9 Gleichungen

$$(6.)\qquad \begin{cases}x_1\frac{df}{dx_1} = 0, & x_1\frac{df}{dx_2} = 0, & x_1\frac{df}{dx_3} = 0,\\ x_2\frac{df}{dx_1} = 0, & x_2\frac{df}{dx_2} = 0, & x_2\frac{df}{dx_3} = 0,\\ x_3\frac{df}{dx_1} = 0, & x_3\frac{df}{dx_2} = 0, & x_3\frac{df}{dx_3} = 0\end{cases}$$

hervorgehen, deren Coefficienten mit denen des §. 26 (3.) übereinstimmen, zunächst

$$(7.)\quad x_1x_1x_1 : x_1x_1x_2 : \ldots : x_1x_2x_3 = p_{111} : p_{112} : \ldots : p_{123}.$$

Da aber die Gleichungen (5.) sich auch wie folgt schreiben lassen:

$$(8.)\quad \begin{cases} x_1A_{11}+x_2A_{12}+x_3A_{13} = 0, \\ x_1A_{21}+x_2A_{22}+x_3A_{23} = 0, \\ x_1A_{31}+x_2A_{32}+x_3A_{33} = 0, \end{cases}$$

so erhält man nach §. 11 (6.) durch Elimination der explicite stehenden Variabeln x_1, x_2, x_3

$$(9.)\quad 0 = \Delta f(x_1, x_2, x_3) = \Sigma b_{\varkappa\lambda\mu} x_\varkappa x_\lambda x_\mu$$

und demnach durch Substitution von (7.) in (9.)

$$0 = \Sigma b_{\varkappa\lambda\mu} p_{\varkappa\lambda\mu}.$$

Die Addition der in der Diagonale von (4.) stehenden Gleichungen giebt aber die identische Gleichung:

$$(10.)\quad 6R = \Sigma b_{\varkappa\lambda\mu} p_{\varkappa\lambda\mu},$$

also ist

$$R = 0$$

das in Rede stehende Eliminationsresultat.

Es verdient noch hervorgehoben zu werden, dafs die Werthe (7.), welche nach Erfüllung der Gleichung $R = 0$ den Gleichungen (5.) genügen, durch (7.) in expliciter Form gegeben sind und zwar durch den Satz, dafs *ihre Verhältnisse den Verhältnissen der partiellen Ableitungen der absoluten Invariante nach den entsprechenden $a_{\varkappa\lambda\mu}$ gleich sind.*

Schreibt man die Gleichungen in der ersten Verticalreihe von §. 26 (3.) und der ersten Verticalreihe von (4.) neben einander *und setzt* $R = 0$, so entstehen die Gleichungen:

$$(11.)\quad \begin{cases} \Sigma p_{1\varkappa\lambda} a_{1\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma p_{1\varkappa\lambda} b_{1\varkappa\lambda} = 0, \\ \Sigma p_{1\varkappa\lambda} a_{2\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma p_{1\varkappa\lambda} b_{2\varkappa\lambda} = 0, \\ \Sigma p_{1\varkappa\lambda} a_{3\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma p_{1\varkappa\lambda} b_{3\varkappa\lambda} = 0, \end{cases}$$

aus welchen nach Elimination der 6 Gröfsen $p_{1\varkappa\lambda}$ wieder die Bedingungsgleichung $R = 0$ hervorgehen mufs. Es stimmt diese Darstellungsweise mit der zweiten von Herrn *Hesse* gegebenen, welche darin besteht, dafs man aus

$$\frac{df}{dx_1} = 0,\quad \frac{df}{dx_2} = 0,\quad \frac{df}{dx_3} = 0;\quad \frac{d\Delta f}{dx_1} = 0,\quad \frac{d\Delta f}{dx_2} = 0,\quad \frac{d\Delta f}{dx_3} = 0$$

die 6 Produkte $x_\varkappa x_\lambda$ zu eliminiren hat, offenbar überein. Bemerkt man nun, dafs die Determinante der Gleichungen (11.) in Bezug auf die Gröfsen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ von der 12ten Ordnung ist, also keinen überflüssigen Factor enthalten kann, weil R von der 12ten Ordnung ist, und der etwaige Zahlenfactor, wie sich an jedem speciellen Beispiele sogleich zeigen läfst, $=1$ ist, so folgt schliefslich:

$$(12.)\quad R=\begin{vmatrix} a_{111}, & a_{122}, & a_{133}, & a_{123}, & a_{113}, & a_{112} \\ a_{211}, & a_{222}, & a_{233}, & a_{223}, & a_{213}, & a_{212} \\ a_{311}, & a_{322}, & a_{333}, & a_{323}, & a_{313}, & a_{312} \\ b_{111}, & b_{122}, & b_{133}, & b_{123}, & b_{113}, & b_{112} \\ b_{211}, & b_{222}, & b_{233}, & b_{223}, & b_{213}, & b_{212} \\ b_{311}, & b_{322}, & b_{333}, & b_{323}, & b_{313}, & b_{312} \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_{111} a_{222} a_{333} b_{123} b_{213} b_{312}.$$

Diese Formel ist zwar zur wirklichen Auswerthung weniger brauchbar, sie dient aber als bequemes Hülfsmittel zur Führung von Beweisen.

Aus der Invariante R entspringt eine zugehörige Form dritter Ordnung, deren Coefficienten die partiellen Ableitungen von R nach den Gröfsen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ sind. Man bezeichne diese Form durch

$$(13.)\quad R_f(u_1 u_2 u_3) = \Sigma r_{\varkappa\lambda\mu} u_\varkappa u_\lambda u_\mu,$$

indem man

$$(14.)\quad r_{\varkappa\varkappa\varkappa} = \tfrac{1}{2}\frac{dR}{da_{\varkappa\varkappa\varkappa}},\quad 3r_{\varkappa\varkappa\lambda} = \tfrac{1}{2}\frac{dR}{da_{\varkappa\varkappa\lambda}},\quad 6r_{\varkappa\lambda\mu} = \tfrac{1}{2}\frac{dR}{da_{\varkappa\lambda\mu}}$$

setzt; dann findet man durch Differentiation von

$$R = T^2 - S^3:$$

$$(15.)\quad \begin{cases} r_{\varkappa\lambda\mu} = T.t_{\varkappa\lambda\mu} - S^2 s_{\varkappa\lambda\mu} \\ R_f = T.T_f - S^2 S_f. \end{cases}$$

Da nun

$$\Sigma a_{1\varkappa\lambda} t_{1\varkappa\lambda} = 2T,\quad \Sigma a_{1\varkappa\lambda} s_{1\varkappa\lambda} = 2S$$

ist, so erhält man

$$\Sigma a_{1\varkappa\lambda} r_{1\varkappa\lambda} = T\Sigma a_{1\varkappa\lambda} t_{1\varkappa\lambda} - S^2 \Sigma a_{1\varkappa\lambda} s_{1\varkappa\lambda} = 2(T^2 - S^3) = 2R,$$

und wenn man mit den übrigen analogen Gleichungen ebenso verfährt, das folgende System:

$$(16.)\quad \begin{cases} \Sigma a_{1\varkappa\lambda} r_{1\varkappa\lambda} = 2R, & \Sigma a_{1\varkappa\lambda} r_{2\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma a_{1\varkappa\lambda} r_{3\varkappa\lambda} = 0, \\ \Sigma a_{2\varkappa\lambda} r_{1\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma a_{2\varkappa\lambda} r_{2\varkappa\lambda} = 2R, & \Sigma a_{2\varkappa\lambda} r_{3\varkappa\lambda} = 0, \\ \Sigma a_{3\varkappa\lambda} r_{1\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma a_{3\varkappa\lambda} r_{2\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma a_{3\varkappa\lambda} r_{3\varkappa\lambda} = 2R. \end{cases}$$

Ferner, da

$$\Sigma b_{1\varkappa\lambda} t_{1\varkappa\lambda} = 2S^2, \qquad \Sigma b_{1\varkappa\lambda} s_{1\varkappa\lambda} = 2T$$

ist:

$$\Sigma b_{1\varkappa\lambda} r_{1\varkappa\lambda} = 2(TS^2 - S^2 T) = 0,$$

also

$$(17.)\quad \begin{cases} \Sigma b_{1\varkappa\lambda} r_{1\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma b_{1\varkappa\lambda} r_{2\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma b_{1\varkappa\lambda} r_{3\varkappa\lambda} = 0, \\ \Sigma b_{2\varkappa\lambda} r_{1\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma b_{2\varkappa\lambda} r_{2\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma b_{2\varkappa\lambda} r_{3\varkappa\lambda} = 0, \\ \Sigma b_{3\varkappa\lambda} r_{1\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma b_{3\varkappa\lambda} r_{2\varkappa\lambda} = 0, & \Sigma b_{3\varkappa\lambda} r_{3\varkappa\lambda} = 0. \end{cases}$$

Das System (17.) zeigt, dafs die $r_{\varkappa\lambda\mu}$ den Bedingungen genügen, welche die Coefficienten der zur Covariante Δf conjugirten Form erfüllen müssen und giebt daher den Satz, dafs die conjugirte Form der Covariante Δf bis auf einen constanten Factor die zugehörige Form R_f ist, oder dafs man hat

$$(18.)\quad P_{\Delta f}(u_1, u_2, u_3) = C.R_f(u_1, u_2, u_3),$$

wo C ein Factor der 16ten Ordnung in Bezug auf die Gröfsen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ ist.

Dafs die Coefficienten von $P_{\Delta f}$ sich durch die Coefficienten von R_f, welche von der 11ten Ordnung sind, und durch einen gemeinschaftlichen Factor ausdrücken lassen, hat in einer andern Form bereits Herr *Hesse* in seiner Abhandlung im 28sten Bande dieses Journals bewiesen, denn bezeichnet man nach derselben durch $q_{\varkappa\lambda\mu}$ die Unbekannten eines Systems von Gleichungen, welches aus (17.) hervorgeht, wenn man statt der $r_{\varkappa\lambda\mu}$ die $q_{\varkappa\lambda\mu}$ substituirt, so kann man die $q_{\varkappa\lambda\mu}$ als die partiellen Determinanten des Systems (17.) und daher als die aus den $b_{\varkappa\lambda\mu}$ gebildeten $p_{\varkappa\lambda\mu}$ definiren. Herr *Hesse* hat auch bereits den Beweis geführt, dafs C ein vollständiges Quadrat ist; wir werden später C selbst darstellen.

Verlangt man endlich, dafs

$$(19.)\quad \Sigma(a\, a_{1\varkappa\lambda} + b\, b_{1\varkappa\lambda})(A\, p_{1\varkappa\lambda} + B\, r_{1\varkappa\lambda}) = 0,$$

indem man a und b als gegebene, A und B als gesuchte Constanten betrachtet, so ergiebt sich durch Auflösung der Parenthesen in (19.) mit Rücksicht auf §. 26 (3.), §. 27 (4.) (16.) (17.)

$$2R(Ab + Ba) = 0$$

oder

$$Ab + Ba = 0$$

als Bedingung, unter welcher sämmtliche 9 mit (19.) analoge Gleichungen befriedigt werden können. Man kann daher setzen

$$A = a, \qquad B = -b,$$

und es ist dann

$$\Sigma(a a_{\varrho\varkappa\lambda}+b b_{\varrho\varkappa\lambda})(a p_{\sigma\varkappa\lambda}-b r_{\sigma\varkappa\lambda}) = 0$$

für alle Werthe 1, 2, 3, welche die bei der Summation constanten Indices ϱ, σ annehmen können. Es folgt daher, ***dafs die conjugirte zugehörige Form der zusammengesetzten homogenen Function $af+b\Delta f$ bis auf einen constanten Factor durch $aP_f - bR_f$ dargestellt werden kann.***

Bemerkt man nun noch, dafs die Operation δ die Gleichung

$$\delta f = \Delta f$$

giebt, ferner, dafs

$$\delta P_f = \delta(T.S_f - S.T_f) \quad (\S.\ 26\ (9.))$$
$$= \delta T.S_f + T.\delta S_f - \delta S.T_f - S.\delta T_f$$

und

$$\delta S = 4T, \quad \delta S_f = 3T_f \quad (\S.\ 18\ (4.))$$
$$\delta T = 6S^2, \quad \delta T_f = 5S.S_f \quad (\S.\ 23\ (14.)\ (15.))$$

ist, so folgt

$$(19.^*) \qquad \delta P_f = S^2.S_f - T.T_f = -R_f.$$

Man kann daher δf statt Δf und $-\delta P_f$ statt R_f setzen und erhält dann

Theorem 23.

Die conjugirte zugehörige Form der zusammengesetzten Function

$$af+b\delta f = af+b\Delta f$$

ist von der Form:

$$(20.) \qquad P_{af+b\delta f} = L(aP_f + b\delta P_f) = L(aP_f - bR_f),$$

wo L einen von den Variabeln unabhängigen Factor vorstellt.

Da die Form $P_{af+b\delta f}$ in Bezug auf a und b von der 9ten Ordnung ist, so mufs L in Bezug auf diese Gröfsen von der 8ten werden. Der vorstehende Satz ist dadurch merkwürdig, dafs sich 8 Ordnungen in einem Factor abtrennen lassen.

Diese Eigenschaft führt in der That zu einem zweiten für die conjugirten Formen höchst wichtigen Theorem.

Man beachte, dafs R_f bis auf einen Factor die conjugirte Form zu Δf ist, wie ich unter (18.) bewiesen habe; hieraus folgt, dafs

$$(21.) \qquad R_{af+b\Delta f} = L_1(\alpha P_f - \beta R_f)$$

ist, wenn L_1 einen andern Factor bezeichnet, und wie im §. 13

$$\Delta(af+b\Delta f) = \alpha f + \beta\Delta f$$

gesetzt wird.

Es ist ferner

$$\Sigma p_{\varkappa\lambda\mu} b_{\varkappa\lambda\mu} = \Sigma r_{\varkappa\lambda\mu} a_{\varkappa\lambda\mu}$$

weil beide Summen $= 6R$ sind, daher auch, wenn man dieselbe Gleichung für die zusammengesetzte Function $af + b\Delta f$ bildet, wegen (20.) und (21.):

$$L\Sigma(ap_{\varkappa\lambda\mu} - br_{\varkappa\lambda\mu})(\alpha a_{\varkappa\lambda\mu} + \beta b_{\varkappa\lambda\mu}) = L_1(\alpha p_{\varkappa\lambda\mu} - \beta r_{\varkappa\lambda\mu})(a.a_{\varkappa\lambda\mu} + b.b_{\varkappa\lambda\mu})$$

oder, wenn man die Parenthesen wie bei (19.) auflöst:

$$L(a\beta - b\alpha) = L_1(b\alpha - a\beta)$$

oder

$$(22.)\quad L = -L_1,$$

d. h. die beiden Factoren von (20.) und (21.) sind einander gleich und entgegensetzt.

Wenn man zuerst die Operation δ auf eine Function z. B. P_f anwenden, und dann die erhaltene Form für die zusammengesetzte Function bilden soll, so ist es nöthig, dieses in der Bezeichnungsweise hervortreten zu lassen, weil $\delta P_{af+b\Delta f}$ die Umkehrung der Reihenfolge beider Prozesse bedeuten würde, und ein anderes Resultat zur Folge hätte. Ich will daher $(\delta P)_{af+b\Delta f}$ für die erste Reihenfolge schreiben. Mit Rücksicht hierauf und wegen (19.*) und (22.) geht (21.) über in

$$(23.)\quad (\delta P)_{af+b\Delta f} = L(\alpha P_f + \beta\delta P_f).$$

Die einander analogen Darstellungsweisen von $P_{af+b\Delta f}$ und $(\delta P)_{af+b\Delta f}$ führen nun zu dem folgenden auf (22.) beruhenden Theorem.

Theorem 24.

Wenn man aus den beiden zu f und Δf conjugirten Formen in Verbindung mit f und $\Delta f = \delta f$ die Determinante

$$(24.)\quad \begin{vmatrix} P_f, & \delta P_f \\ f, & \delta f \end{vmatrix} = P_f\delta f - f\delta P_f$$

bildet, so erhält man eine Function von beiden Systemen von Variabeln (eine Zwischenform), welche durch die Substitution

$$a.a_{\varkappa\lambda\mu} + b.b_{\varkappa\lambda\mu} \quad \text{für} \quad a_{\varkappa\lambda\mu}$$

immer sich selbst reproducirt, multiplicirt mit dem Factor $L(\beta a - \alpha b)$.

Bildet man nämlich

$$\begin{vmatrix} P_{af+b\Delta f}, & (\delta P)_{af+b\Delta f} \\ af + b\Delta f, & \Delta(af + b\Delta f) \end{vmatrix}$$

welches der Werth der Function (24.) nach der Substitution ist, so kann

man wegen (20.) und (23.) dafür setzen

$$L.\begin{vmatrix} aP_f + b\delta P_f, & \alpha P_f + \beta\delta P_f \\ af + b\delta f, & \alpha f + \beta\delta f \end{vmatrix}$$

und diese Determinante geht in das Produkt

$$L.\begin{vmatrix} a, & b \\ \alpha, & \beta \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} P_f, & \delta P_f \\ f, & \delta f \end{vmatrix}$$

über, w. z. b. w.

Ueber die Grundformen der zusammengesetzten Function $af + b\Delta f$.

§. 28.

Die weitere Entwicklung der vorstehenden Formen hängt von der Theorie der Grundformen für die zusammengesetzte Function $af + b\Delta f$ ab, von welcher bereits in meiner Abhandlung im 39sten Bande dieses Journals die Grundzüge sich vorfinden. Herr *Cayley* hat später einen grofsen Theil der übrigen Formen (Philosophical Transactions vol. 146, p. 638) veröffentlicht. Indessen geben die folgenden Darstellungen auch für diese einen ganz neuen Gesichtspunkt, da sie dahin gerichtet sind den Zusammenhang der Formen unter einander kennen zu lehren, während die übrigens sehr schätzbare Zusammenstellung des Herrn *Cayley* nur die letzten gänzlich aufgelösten Formeln ohne Entwicklungen und Beweise enthält.

Es sollen durch

$$S_{ab}, \quad T_{ab}, \quad R_{ab}$$

die beiden Invarianten und die Discriminante bezeichnet werden, und ich beginne mit der Berechnung von R_{ab}. Dieselbe läfst sich zwar nachträglich noch anders geben, wird aber auf sehr zweckmäfsige Weise dadurch ausgeführt, dafs man die Darstellung von R durch die Determinante §. 27 (12.) benutzt.

Bezeichnet man nämlich wie früher den Werth von $\Delta(af + b\Delta f)$ durch

$$\Delta(af + b\Delta f) = \alpha f + \beta\Delta f,$$

so wird

$$R_{ab} = \Sigma \pm (aa_{111} + bb_{111})(aa_{222} + bb_{222})(aa_{333} + bb_{333})(\alpha a_{123} + \beta b_{123})(\alpha a_{213} + \beta b_{213})(\alpha a_{312} + \beta b_{312})$$

und nach dem bekannten Fundamentaltheorem der Determinanten:

$$R_{ab} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & b \\ \alpha & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & \beta \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_{111}, & a_{122}, & a_{133}, & a_{123}, & a_{113}, & a_{112} \\ a_{211}, & a_{222}, & a_{233}, & a_{223}, & a_{213}, & a_{212} \\ a_{311}, & a_{322}, & a_{333}, & a_{323}, & a_{313}, & a_{312} \\ b_{111}, & b_{122}, & b_{133}, & b_{123}, & b_{113}, & b_{112} \\ b_{211}, & b_{222}, & b_{233}, & b_{223}, & b_{213}, & b_{212} \\ b_{311}, & b_{322}, & b_{333}, & b_{323}, & b_{313}, & b_{312} \end{vmatrix}.$$

Der erste Factor der rechten Seite zerfällt nach demselben Theorem in folgende drei Factoren

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & \beta \end{vmatrix},$$

von denen jeder den Werth $\beta a - \alpha b$ hat, daher folgt, wenn man

$$(1.) \quad G = \beta a - \alpha b$$

setzt:

$$(2.) \quad R_{ab} = (\beta a - \alpha b)^3 R = G^3 . R.$$

Ich habe die Operation δ, wenn sie auf eine Function $\varphi(a, b)$ der Gröfsen $a.a_{\varkappa\lambda\mu} + b.b_{\varkappa\lambda\mu}$ in dem Sinne anzuwenden ist, dafs man nach den Gröfsen $(a.a_{\varkappa\lambda\mu} + b.b_{\varkappa\lambda\mu})$ differentiiren und statt der Incremente die entsprechenden Coefficienten $(\alpha a_{\varkappa\lambda\mu} + \beta b_{\varkappa\lambda\mu})$ der Function $\Delta(af + b\Delta f)$ substituiren soll, durch $(\delta\varphi)$ bezeichnet, damit sie mit derselben Operation $\delta\varphi$, auf die $a_{\varkappa\lambda\mu}$ allein angewandt, nicht verwechselt werde.

Es ist wichtig diesen Prozefs auf die einfachste Weise bewerkstelligen zu können. Hierzu bemerke man, dafs

$$(3.) \quad \begin{cases} \Sigma \dfrac{d\varphi(a, b)}{d(a.a_{\varkappa\lambda\mu} + b.b_{\varkappa\lambda\mu})} a_{\varkappa\lambda\mu} = \dfrac{d\varphi(a, b)}{da}, \\ \Sigma \dfrac{d\varphi(a, b)}{d(a.a_{\varkappa\lambda\mu} + b.b_{\varkappa\lambda\mu})} b_{\varkappa\lambda\mu} = \dfrac{d\varphi(a, b)}{db} \end{cases}$$

ist, also

$$\Sigma! \frac{d\varphi(a, b)}{d(a.a_{\varkappa\lambda\mu} + b.b_{\varkappa\lambda\mu})} (\alpha a_{\varkappa\lambda\mu} + \beta b_{\varkappa\lambda\mu}) = \alpha \frac{d\varphi(a, b)}{da} + \beta \frac{d\varphi(a, b)}{db},$$

d. h. kürzer geschrieben:

$$(4.) \quad (\delta\varphi) = \alpha \frac{d\varphi}{da} + \beta \frac{d\varphi}{db}.$$

Statt also die Operation (δ) in dem definirten Sinne auszuführen, hat man nur nach den Gröfsen a und b zu differentiiren und statt der Incremente respective α und β zu substituiren.

Man kann diesem Satze eine noch geeignetere Form geben. Wenn man nämlich beachtet, dafs

$$\delta S = 4T, \qquad \delta T = 6S^2$$

ist, so folgt

$$\delta R = \delta(T^2 - S^3) = 2T.\delta T - 3S.^2\delta S = 0;$$

daher ist auch

$$(\delta R)_{ab} = 0,$$

und weil

$$R_{ab} = G^3 R,$$

R aber von a und b unabhängig ist,

$$(5.) \quad (\delta G) = 0,$$

oder

$$\frac{dG}{da}\alpha + \frac{dG}{db}\beta = 0.$$

G ist eine binäre biquadratische Form in Bezug auf a und b, weil R_{ab} und demnach auch G^3 von der 12ten Ordnung ist, daher folgt

$$\frac{dG}{da}a + \frac{dG}{db}b = 4G,$$

also durch Entwicklung aus den beiden letzten Gleichungen:

$$(6.) \quad \tfrac{1}{4}\frac{dG}{da} = \beta, \qquad \tfrac{1}{4}\frac{dG}{db} = -\alpha,$$

wenn man (1.) berücksichtigt.

Die vorstehenden Gleichungen, so wie die explicite Darstellung der höchst merkwürdigen binären Form G habe ich schon in meiner Abhandlung in Bd. 39, S. 154 dieses Journals gegeben. Ich werde auch hier gleich darauf eingehen, will aber zuvor eine wichtige Anwendung der Gleichungen (6.) zeigen.

Substituirt man nämlich die Werthe von α und β aus (6.) in (4.), so entsteht:

$$(7.) \quad (\delta\varphi) = \tfrac{1}{4}\left(\frac{dG}{da}\frac{d\varphi}{db} - \frac{dG}{db}\frac{d\varphi}{da}\right) = \begin{vmatrix} \tfrac{1}{4}\frac{dG}{da}, & \tfrac{1}{4}\frac{dG}{db} \\ \frac{d\varphi}{da}, & \frac{d\varphi}{db} \end{vmatrix};$$

man nennt aber bekanntlich den letzten Ausdruck die *Functionaldeterminante* der beiden binären Formen $\frac{1}{4}G$ und φ, daher folgt:

Theorem 25.

Wenn man aus einer (constanten oder veränderlichen) Grundform A der homogenen Function f die Grundform B dadurch erhalten kann, dafs man A nach den Constanten $a_{\varkappa\lambda\mu}$ differentiirt und statt der Incremente die entsprechenden Coefficienten $b_{\varkappa\lambda\mu}$ von Δf substituirt, so findet man aus derselben Grundform A_{ab} für die zusammengesetzte Function $af+b\Delta f$ die analoge B_{ab}, wenn man die Functionaldeterminante der beiden binären Formen

$$\tfrac{1}{4}G \text{ und } A_{ab}$$

bildet, also

$$(8.)\qquad B_{ab} = (\delta A)_{ab} = \begin{vmatrix} \frac{1}{4}\frac{dG}{da}, & \frac{1}{4}\frac{dG}{db} \\ \frac{dA_{ab}}{da}, & \frac{dA_{ab}}{db} \end{vmatrix}.$$

Man beachte, dafs zur Darstellung dieses Theorems die bereits §. 13 (9.) berechneten Werthe für α und β nicht zur Anwendung gekommen sind.

Aus demselben folgt nun:

I) Da $\delta f = \Delta f$ ist:

$$(9.)\qquad \Delta_{af+b\Delta f} = \begin{vmatrix} \frac{1}{4}\frac{dG}{da}, & \frac{1}{4}\frac{dG}{db} \\ f, & \Delta f \end{vmatrix},$$

weil

$$\frac{d(af+b\Delta f)}{da} = f,$$

$$\frac{d(af+b\Delta f)}{db} = \Delta f.$$

II) Da $\delta S = 4T$ ist:

$$(10.)\qquad T_{ab} = \tfrac{1}{4}\begin{vmatrix} \frac{1}{4}\frac{dG}{da}, & \frac{1}{4}\frac{dG}{db} \\ \frac{dS_{ab}}{da}, & \frac{dS_{ab}}{db} \end{vmatrix}.$$

III) Da $\delta P_f = -R_f$ ist (§. 27 (20.)):

$$(11.)\qquad R_{af+b\Delta f} = -\begin{vmatrix} \frac{1}{4}\frac{dG}{da}, & \frac{1}{4}\frac{dG}{db} \\ \frac{dP_{af+b\Delta f}}{da}, & \frac{dP_{af+b\Delta f}}{db} \end{vmatrix}.$$

IV) Da $\delta S_f = 3T_f$ ist:

$$(12.)\qquad T_{af+b\Delta f} = \tfrac{1}{3}\begin{vmatrix} \tfrac{1}{4}\frac{dG}{da}, & \tfrac{1}{4}\frac{dG}{db} \\ \frac{dS_{af+b\Delta f}}{da}, & \frac{dS_{af+b\Delta f}}{db} \end{vmatrix}.$$

Die Gleichung (9.) reproducirt nur die Gleichungen (6.), hingegen geben die drei andern Gleichungen ein sehr einfaches Gesetz zur Darstellung von

$$T_{ab},\quad R_{af+b\Delta f},\quad T_{af+b\Delta f},$$

wenn

$$S_{ab},\quad P_{af+b\Delta f},\quad S_{af+b\Delta f}$$

bekannt sind.

Es läfst sich aber auch S_{ab} durch eine Functionaldeterminante darstellen. Zu diesem Ende gehe ich zu der Gleichung

$$\delta\Delta f = 3S.f \quad (\S.\,12\ (7.))$$

zurück, aus welcher

$$(\delta\Delta)(af+b\Delta f) = 3S_{ab}(af+b\Delta f)$$

hervorgeht; andrerseits ist

$$(\delta\Delta)(af+b\Delta f) = \tfrac{1}{4}\Big(\delta\Big(\frac{dG}{da}.\Delta f - \frac{dG}{db}.f\Big)\Big) \text{ wegen (9.)},$$

mithin folgt durch Identificirung beider Werthe:

$$(13.)\qquad \begin{cases} 3S_{ab}a = -\tfrac{1}{4}\Big(\delta\frac{dG}{db}\Big) \\ 3S_{ab}b = \quad \tfrac{1}{4}\Big(\delta\frac{dG}{da}\Big). \end{cases}$$

Durch Ausführung der Operationen der rechten Seite folgt vermöge des 25sten Theorems:

$$3S_{ab}\,a = -\tfrac{1}{16}\Big(\frac{dG}{da}\frac{d^2G}{db^2} - \frac{dG}{db}\frac{d^2G}{da\,db}\Big)$$

$$3S_{ab}\,b = \quad \tfrac{1}{16}\Big(\frac{dG}{da}\frac{d^2G}{da\,db} - \frac{dG}{db}\frac{d^2G}{da^2}\Big);$$

multiplicirt man die erste Gleichung mit $\frac{d^2G}{da\,db}$ die zweite mit $\frac{d^2G}{db^2}$ und addirt beide, so ergiebt sich

$$3S_{ab}\Big(a\frac{d^2G}{da\,db} + b\frac{d^2G}{db^2}\Big) = \tfrac{1}{16}\frac{dG}{db}\Big(\Big(\frac{d^2G}{da\,db}\Big)^2 - \frac{d^2G}{da^2}.\frac{d^2G}{db^2}\Big),$$

und weil

$$a\frac{d^2G}{da\,db} + b\frac{d^2G}{db^2} = 3\frac{dG}{db}$$

ist:

$$S_{ab} = \tfrac{1}{144}\left(\left(\frac{d^2G}{da\,db}\right)^2 - \frac{d^2G}{da^2}\cdot\frac{d^2G}{db^2}\right),$$

oder

$$(14.)\qquad S_{ab} = -\begin{vmatrix} \frac{1}{12}\frac{d^2G}{da^2}, & \frac{1}{12}\frac{d^2G}{da\,db} \\ \frac{1}{12}\frac{d^2G}{da\,db}, & \frac{1}{12}\frac{d^2G}{db^2} \end{vmatrix}.$$

Die erste Invariante der zusammengesetzten Function $af+b\Delta f$ ist also die Functionaldeterminante der binären Form G selbst.

Um die Form G zu bilden, will ich die Werthe für α und β aus §. 13 (9.) benutzen. Diese sind

$$(15.)\qquad \begin{cases} \alpha = -\tfrac{1}{4}\frac{dG}{db} = 3Sa^2b + 6Tab^2 + 3S^2b^3, \\ \beta = \tfrac{1}{4}\frac{dG}{da} = a^3 - 3Sab^2 - 2Tb^3; \end{cases}$$

hieraus ergiebt sich

$$(16.)\qquad G = \tfrac{1}{4}\left(a\frac{dG}{da} + b\frac{dG}{db}\right) = a^4 - 6Sa^2b^2 - 8Tab^3 - 3S^2b^4,$$

und hieraus in Verbindung mit (14.):

$$(17.)\qquad \begin{cases} S_{ab} = -\begin{vmatrix} a^2 - Sb^2, & -2Sab - 2Tb^2 \\ -2Sab - 2Tb^2, & -a^2S - 4Tab - 3S^2b^2 \end{vmatrix} \\ \text{oder} \\ S_{ab} = a^4S + 4a^3bT + 6a^2b^2S^2 + 4ab^3ST + b^4(4T^2 - 3S^3), \end{cases}$$

ferner wegen (10.):

$$(18.)\qquad \begin{cases} T_{ab} = \\ \begin{vmatrix} (a^3 - 3Sab^2 - 2Tb^3), & (-3Sa^2b - 6Tab^2 - 3S^2b^3) \\ (a^3S + 3a^2bT + 3ab^2S^2 + b^3ST), & (a^3T + 3a^2bS^2 + 3ab^2ST + (4T^2 - 3S^3)b^3) \end{vmatrix} \\ \text{oder} \\ T_{ab} = a^6T + 6a^5bS^2 + 15a^4b^2ST + 20a^3b^3T^2 + 15a^2b^4S^2T \\ \qquad + 6S(-2T^2 + 3S^3)ab^5 + T(-8T^2 + 9S^3)b^6. \end{cases}$$

Wenn man die Zusammensetzung dieser beiden Invarianten nur in den expliciten zweiten Formen (17.), (18.) erhalten kann, was z. B. bei der Berechnung derselben durch die *Hesse*sche specielle Form eintritt, so dürfte es schwer sein

rückwärts zu dem Gesetze ihrer Bildungsweisen als Determinanten zu gelangen*).

Ich gehe jetzt zur Entwicklung der zugehörigen Form $P_{af+b\Delta f}$ über. Es ist bereits in §. 27 (20.) bewiesen, dafs

$$P_{af+b\Delta f} = L(aP_f - bR_f)$$

ist, und nur die Ermittlung von L noch übrig geblieben. Da aber

$$\Sigma p_{\varkappa\lambda\mu} b_{\varkappa\lambda\mu} = 6R$$

ist, so mufs

$$L\,\Sigma(ap_{\varkappa\lambda\mu} - br_{\varkappa\lambda\mu})\Big(-\tfrac{1}{4}\frac{dG}{db}a_{\varkappa\lambda\mu} + \tfrac{1}{4}\frac{dG}{da}b_{\varkappa\lambda\mu}\Big) = 6R_{ab}$$

sein, und mit Berücksichtigung der Gleichungen

$$\Sigma p_{\varkappa\lambda\mu} a_{\varkappa\lambda\mu} = 0,\quad \Sigma r_{\varkappa\lambda\mu} a_{\varkappa\lambda\mu} = \Sigma p_{\varkappa\lambda\mu} b_{\varkappa\lambda\mu} = 6R,\quad \Sigma r_{\varkappa\lambda\mu} b_{\varkappa\lambda\mu} = 0,$$

wenn man die Parenthesen auflöst:

$$\tfrac{1}{4}L\Big(a\frac{dG}{da} + b\frac{dG}{db}\Big).R = R_{ab} = G^3R \quad (2.):$$

es ist aber $G = \frac{1}{4}\Big(a\frac{dG}{da} + b\frac{dG}{db}\Big)$, also folgt

$$(19.)\qquad L = G^2$$

und

$$(20.)\qquad P_{af+b\Delta f} = G^2(aP_f - bR_f).$$

Die Determinante (11.) liefert hieraus den Werth für R_{ab} und zwar weil

$$(\delta G) = 0 \quad (5.)$$

ist:

$$(21.)\qquad R_{af+b\Delta f} = -G^2\begin{vmatrix} \frac{1}{4}\frac{dG}{da}, & \frac{1}{4}\frac{dG}{db} \\ P_f, & -R_f \end{vmatrix} = G^2\Big(\tfrac{1}{4}\frac{dG}{db}P_f + \tfrac{1}{4}\frac{dG}{da}R_f\Big).$$

Es ist schon in §. 27 (23.) bewiesen, dafs dieses Resultat entstehen mufste, wenn (20.) vorausgesetzt wird.

Die Form $R_{af+b\Delta f}$ stimmt mit der conjugirten Form zu $\Delta(af + b\Delta f)$ wegen §. 27 (18.) bis auf einen Factor überein; um denselben zu finden,

*) In dem mir während des Drucks dieser Abhandlung zu Gesicht gekommenen Januarhefte des *Liouville*schen Journals von 1858 finde ich eine Note des Herrn *Hermite*, nach welcher es diesem scharfsinnigen Geometer gelungen ist, die beiden Determinantenformen aus den von Herrn *Cayley* gegebenen expliciten Darstellungen der beiden Invarianten herauszuerkennen.

hat man nur in (20.) für a und b die Substitution

$$(22.)\qquad a = -\tfrac{1}{3}\frac{dG}{db},\quad b = \tfrac{1}{3}\frac{dG}{da}$$

auszuführen, wodurch

$$P_{\Delta(af+b\Delta f)} = -\mathfrak{G}^2.\left(\tfrac{1}{3}\frac{dG}{db}P_f + \tfrac{1}{3}\frac{dG}{da}R_f\right)$$

entsteht, wenn man durch $\mathfrak{G}$ denjenigen Ausdruck bezeichnet, in welchen G durch diese Substitution übergeht. Die Ausführung derselben erfordert eine etwas complicirte Rechnung, welche auf folgende Weise vermieden werden kann. Man bestimme nämlich zuerst den Werth der einfachern Form $P_{\Delta f}$, indem man $a=0$, $b=1$ setzt, was wegen (16.)

$$(23.)\qquad P_{\Delta f} = -9S^4.R_f$$

liefert, woraus beiläufig der Factor C aus §. 27 (18.), nämlich

$$C = -9S^4$$

folgt. Aus (23.) geht aber sofort

$$P_{af+b\Delta f} = -9S^4_{ab}.R_{af+b\Delta f}$$

hervor, also wegen (21.)

$$(24.)\qquad P_{af+b\Delta f} = -9S^4_{ab}.G^2.\left(\tfrac{1}{3}\frac{dG}{db}P_f + \tfrac{1}{3}\frac{dG}{da}R_f\right)$$

und

$$(25.)\qquad \mathfrak{G} = 3S^2_{ab}.G.$$

Ich komme jetzt zu einem zweiten Prinzip, welches dem im Theorem 25. enthaltenen analog ist und sich auf die Bildung der zugehörigen Formen für die zusammengesetzte Function bezieht. Wenn irgend eine Invariante durch φ bezeichnet wird, so handelt es sich darum

$$\varphi_{af+b\Delta f} = \Sigma!\frac{d\varphi_{ab}}{d(a.a_{\varkappa\lambda\mu}+b.b_{\varkappa\lambda\mu})}u_\varkappa u_\lambda u_\mu$$

zu bilden, wenn die in φ_{ab} vorkommenden $b_{\varkappa\lambda\mu}$ in Functionen der $a_{\varkappa\lambda\mu}$ wirklich ausgedrückt, und mit den übrigen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ vereinigt sind. Hierzu führt nun das 24ste Theorem, welches wegen (19.) und (20.), weil $\beta a - \alpha b = G$ ist, die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} P_{af+b\Delta f}, & (\delta P)_{af+b\Delta f} \\ af+b\Delta f, & \Delta(af+b\Delta f)\end{vmatrix} = G^3.\begin{vmatrix} P_f, & \delta P_f \\ f, & \delta f\end{vmatrix}$$

liefert. Wenn man die symbolische Substitution

$$x_\varkappa x_\lambda x_\mu = \frac{d\varphi_{ab}}{d(a\,a_{\varkappa\lambda\mu}+b\,b_{\varkappa\lambda\mu})}$$

auf diese Gleichung anwendet und bemerkt, dafs dadurch

$$af + b\Delta f = \gamma.\varphi_{ab}, \quad \Delta(af + b\Delta f) = (\delta\varphi)_{ab}$$

wird, wo γ die Ordnung von φ in Bezug auf die Gröfsen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ ist, ferner dafs wegen (3.)

$$f \text{ in } \frac{d\varphi_{ab}}{da}, \quad \delta f \text{ in } \frac{d\varphi_{ab}}{db}$$

übergeht, so entsteht:

$$(26.) \quad \begin{vmatrix} P_{af+b\Delta f}, & (\delta P)_{af+b\Delta f} \\ \gamma.\varphi_{ab}, & \delta\varphi_{ab} \end{vmatrix} = G^3 \begin{vmatrix} P_f, & \delta P_f \\ \frac{d\varphi_{ab}}{da}, & \frac{d\varphi_{ab}}{db} \end{vmatrix}$$

Die linke Seite dieses Ausdrucks geht aber aus

$$\begin{vmatrix} P_f, & \delta P_f \\ \gamma.\varphi, & \delta\varphi \end{vmatrix} = P_f.\delta\varphi + \gamma.R_f.\varphi$$

hervor, wenn man statt $a_{\varkappa\lambda\mu}$ überall $a.a_{\varkappa\lambda\mu} + b.b_{\varkappa\lambda\mu}$ substituirt, ***und*** $P_f.\delta\varphi+\gamma.R_f.\varphi$ ***hat die merkwürdige Eigenschaft, die Zusammensetzung der zugehörigen Form dritter Ordnung*** φ_f ***durch*** P_f ***und*** R_f ***zu liefern, während*** φ ***eine beliebige Invariante ist, über deren Zusammensetzung keine Voraussetzung gemacht wird.*** Da nämlich φ eine Function von S und T sein mufs, so ist

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dS}dS + \frac{d\varphi}{dT}dT,$$

also wird auch φ_f eine Function von S_f und T_f, oder von P_f und R_f. Setzt man daher

$$\varphi_f = A.P_f + B.R_f,$$

und in dieser Gleichung auf beiden Seiten

$$a_{\varkappa\lambda\mu} \quad \text{statt} \quad u_\varkappa u_\lambda u_\mu,$$

so entsteht:

$$\gamma.\varphi = 6BR, \qquad B = \frac{\gamma.\varphi}{6R};$$

setzt man ferner auf beiden Seiten

$$b_{\varkappa\lambda\mu} \quad \text{statt} \quad u_\varkappa u_\lambda u_\mu,$$

so erhält man:

$$\delta\varphi = 6AR, \qquad A = \frac{\delta\varphi}{6R},$$

mithin:

$$(27.) \quad \varphi_f = \frac{P_f.\delta\varphi + \gamma.R_f.\varphi}{6R},$$

oder:

$$(28.)\quad \begin{vmatrix} P_f, & \delta P_f \\ \gamma.\varphi, & \delta\varphi \end{vmatrix} = 6R.\varphi_f.$$

Hienach geht die linke Seite von (26.) in

$$6R_{ab}.\varphi_{af+b\Delta f} = 6G.^3R.\varphi_{af+b\Delta f}$$

über, und es folgt, wenn man noch G^3 forthebt,

$$(29.)\quad 6R.\varphi_{af+b\Delta f} = \begin{vmatrix} P_f, & \delta P_f \\ \frac{d\varphi_{ab}}{da}, & \frac{d\varphi_{ab}}{db} \end{vmatrix} = P_f\frac{d\varphi_{ab}}{db} + R_f\frac{d\varphi_{ab}}{da}.$$

Durch Vergleichung der Coefficienten von $u_\varkappa u_\lambda u_\mu$ auf beiden Seiten dieser Gleichung erhält man hieraus die gesuchten Differentialquotienten, nämlich:

$$(30.)\quad \begin{cases} R\dfrac{d\varphi_{ab}}{d(a a_{\varkappa\lambda\mu}+b b_{\varkappa\lambda\mu})} = \dfrac{d\varphi_{ab}}{db}p_{\varkappa\lambda\mu} + \dfrac{d\varphi_{ab}}{da}r_{\varkappa\lambda\mu} \\ 2R\dfrac{d\varphi_{ab}}{d(a a_{\varkappa\varkappa\lambda}+b b_{\varkappa\varkappa\lambda})} = \dfrac{d\varphi_{ab}}{db}p_{\varkappa\varkappa\lambda} + \dfrac{d\varphi_{ab}}{da}r_{\varkappa\varkappa\lambda} \\ 6R\dfrac{d\varphi_{ab}}{d(a a_{\varkappa\varkappa\varkappa}+b b_{\varkappa\varkappa\varkappa})} = \dfrac{d\varphi_{ab}}{db}p_{\varkappa\varkappa\varkappa} + \dfrac{d\varphi_{ab}}{da}r_{\varkappa\varkappa\varkappa}. \end{cases}$$

Diese einfache Ausdrucksweise der Form $\varphi_{af+b\Delta f}$ durch P_f und R_f zeigt, dafs es zweckmässiger ist, zunächst diese zur Zusammensetzung zu verwenden, als S_f und T_f, da überdies durch die Gleichungen

$$(31.)\quad P_f = T.S_f - S.T_f,\quad R_f = T.T_f - S^2.S_f$$

die Uebertragung sehr leicht ist. Der Factor R, welcher auf der linken Seite auftritt, beseitigt sich sehr leicht jedesmal nach der Substitution von (31.), wenn die Gleichung

$$T^2 - S^3 = R$$

berücksichtigt wird.

Wendet man das Vorstehende auf $S_{af+b\Delta f}$ an, so hat man aus (17.)

$$\tfrac{1}{4}\frac{dS_{ab}}{da} = a^3S + 3a^2bT + 3ab^2S^2 + b^3ST,$$

$$\tfrac{1}{4}\frac{dS_{ab}}{db} = a^3T + 3a^2bS^2 + 3ab^2ST + (4T^2 - 3S^3)b^3$$

in die Gleichung:

$$4R.S_{af+b\Delta f} = \frac{dS_{ab}}{db}P_f + \frac{dS_{ab}}{da}R_f$$

zu substituiren, um $S_{af+b\Delta f}$ aus P_f und R_f zusammenzusetzen. Durch Sub-

stitution von (31.) ergiebt sich:

$$4R.S_{af+b\Delta f} = \left(T\frac{dS_{ab}}{da} - S^2\frac{dS_{ab}}{db}\right)S_f + \left(-S\frac{dS_{ab}}{da} + T\frac{dS_{ab}}{db}\right)T_f;$$

aber

$$T\frac{dS_{ab}}{da} - S^2\frac{dS_{ab}}{db} = 4(T^2 - S^3)(a^3 + 3ab^2 S + 4Tb^3),.$$

$$-S\frac{dS_{ab}}{da} + T\frac{dS_{ab}}{db} = 4(T^2 - S^3)(3a^2 b - 3Sb^3),$$

also, wenn R gegen $T^2 - S^3$ fortgelassen wird:

$$(32.)\qquad S_{af+b\Delta f} = (a^3 + 3ab^2 S + 4Tb^3)S_f + 3b(a^2 - b^2 S)\,T_f.$$

Auf ähnliche Weise liefse sich auch $T_{af+b\Delta f}$ aus (29.) entnehmen, man findet aber wegen des 25sten Theorems den Werth der letztern Function schneller aus (12.), nämlich

$$T_{af+b\Delta f} = \begin{vmatrix} a^3 - 3Sab^2 - 2Tb^3, & -3Sa^2b - 6Tab^2 - 3S^2b^3 \\ (a^2 + b^2 S)S_f + 2abT_f, & (2abS + 4Tb^2)S_f + (a^2 - 3b^2 S)\,T_f \end{vmatrix}$$

oder

$$(33.)\qquad T_{af+b\Delta f} = \begin{vmatrix} a^3 - 3Sab^2 - 2Tb^3, & -3Sa^2b - 6Tab^2 - 3S^2b^3 \\ a^2 + b^2 S, & 2abS + 4Tb^2 \end{vmatrix} S_f$$

$$+ \begin{vmatrix} a^3 - 3Sab^2 - 2Tb^3, & -3Sa^2b - 6Tab^2 - 3S^2b^3 \\ 2ab, & a^2 - 3b^2 S \end{vmatrix} T_f.$$

Von den höhern Grundformen.

§. 29.

Ebenso wie vermittelst der beiden Invarianten S und T sich alle übrigen darstellen lassen, genügen auch zwei Zwischenformen unter Hinzufügung der evidenten Zwischenform (§. 2 (4.))

$$u = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3,$$

um alle übrigen durch sie zusammenzusetzen. In der That kann man durch Θ, H, u entweder die Variabeln x_1, x_2, x_3 oder u_1, u_2, u_3 ausdrücken und in jede 4te Zwischenform substituiren. Im ersten Falle würde eine Relation zwischen den 4 Zwischenformen unter Vermittlung von zugehörigen Formen und Invarianten, im andern Falle eine derartige Relation unter Vermittlung von Covarianten und Invarianten entstehen.

Will man die Relation für Zwischenformen nur von den constanten Invarianten abhängen lassen, so müfste man sechs Zwischenformen aufstellen, welche in Bezug auf alle 6 Variabeln von einander unabhängig sind, und

soll sie endlich nur unter Vermittlung von numerischen Constanten stattfinden, so müfsten 8 Zwischenformen gegeben sein, um auch die beiden Invarianten zu eliminiren. Jedenfalls sieht man, dafs hiernach die Anzahl der Zwischenformen sehr grofs werden mufs, weil man Verbindungen aus 8 zu Grunde gelegten als solche bilden und antreffen kann.

Ich werde eine Theorie der Zwischenformen in einer andern Abhandlung geben, und vermittelst derselben zeigen, wie sich die Grundformen für zusammengesetzte Functionen von der Form $aS_f(u_1, u_2, u_3) + bT_f(u_1, u_2, u_3)$ bilden lassen und welchen Gesetzen sie unterworfen sind. Hier will ich nur noch hervorheben, dafs sowohl die Anzahl der von einander unabhängigen zugehörigen Formen, als die Anzahl der Covarianten *drei* betragen mufs, weil man jedesmal die 3 Variabeln durch drei derartige Functionen ausdrücken und in jede 4[te] substituiren kann. Da nun zwei Covarianten, nämlich f selbst und Δf, ferner zwei zugehörige Formen, S_f und T_f, bereits aufgestellt sind, so bliebe noch eine Covariante und eine zugehörige Form zu bilden, um die von einander unabhängigen Grundformen vollständig zu kennen. Dieses geschieht nun mit Hülfe des folgenden Theorems, welches ganz allgemein gilt und zur Erfindung von unendlich vielen Covarianten und zugehörigen Formen führt.

Theorem 26.

I) *Wenn man die gegebene homogene Function und ihre erste Covariante allmälig in folgenden Formen schreibt:*

$$(1.)\quad \begin{cases} f = A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 = \Sigma A_\varkappa x_\varkappa \\ f = \Sigma A_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda \\ f = \Sigma a_{\varkappa\lambda\mu} x_\varkappa x_\lambda x_\mu \end{cases}$$

$$(2.)\quad \begin{cases} \Delta f = \Sigma B_\varkappa x_\varkappa \\ \Delta f = \Sigma B_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda \\ \Delta f = \Sigma b_{\varkappa\lambda\mu} x_\varkappa x_\lambda x_\mu, \end{cases}$$

wo

$$A_\varkappa = \tfrac{1}{3}\frac{df}{dx_\varkappa}, \qquad B_\varkappa = \tfrac{1}{3}\frac{d\Delta f}{dx_\varkappa}$$

$$A_{\varkappa\lambda} = \tfrac{1}{6}\frac{d^2 f}{dx_\nu\, dx_\lambda}, \qquad B_{\varkappa\lambda} = \tfrac{1}{6}\frac{d^2 \Delta f}{dx_\varkappa\, dx_\lambda}$$

ist, und aus den Coefficienten dieser Functionen in Bezug auf die ex-

plicite stehenden Variabeln simultane Invarianten und Covarianten bildet, so erhält man jedesmal eine Covariante für f.

Der Beweis ergiebt sich sehr leicht aus dem Umstande, dafs es einerlei ist, ob man die Functionen (1.), (2.) zuerst in Bezug auf die explicite stehenden Variabeln transformirt und dann nachträglich die Substitution in den noch veränderlichen Coefficienten ausführt, oder ob man gleich von vorn herein die Functionen f und Δf vollständig transformirt. Wenn also im ersten Falle die Gleichung

$$\psi' = r^{\lambda}\psi$$

besteht, so ist sie auch noch im zweiten Falle richtig, nur dafs für jedes System von Coefficienten der Functionen (2.), welches in die Verbindung ψ eingeht, λ um 2 Potenzen erhöht werden mufs, weil jeder Coefficient

$$B_{\varkappa}, \quad B_{\varkappa\lambda}, \quad b_{\varkappa\lambda\mu}$$

den Factor r^2 mit sich führt (§. 11 (1.)).

Der Exponent λ bestimmt sich übrigens in allen Fällen durch $\lambda = \gamma - \frac{n}{3}$, wenn γ die Ordnung von ψ in Bezug auf die Gröfsen $a_{\varkappa\lambda\mu}$, und n in Bezug auf die Variabeln ist, denn in der transformirten Form kommen die Substitutionscoefficienten in der $(3\gamma - n)^{\text{ten}}$ Ordnung vor, während r^{λ} von der $3\lambda^{\text{ten}}$ Ordnung in Bezug auf dieselben ist, also mufs $3\lambda = 3\gamma - n$ sein.

II) *Wenn man statt der Functionen f und Δf die beiden zugehörigen Formen S_f und T_f in der unter* (1.) *und* (2.) *angegebenen Weise schreibt, und dann ebenso aus den Coefficienten derselben Invarianten und Covarianten bildet, so erhält man jedesmal eine zugehörige Form.* Ferner:

III) *Wenn man jede zugehörige Form nach den Gröfsen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ differentiirt und statt der Incremente die entsprechenden Produkte $u_{\varkappa}u_{\lambda}u_{\mu}$ substituirt, so erhält man eine neue zugehörige Form.*

Ist φ eine aus II) oder III) hervorgehende zugehörige Form, so sieht man leicht, dafs

$$\varphi' = r^{\lambda}\varphi$$

wird, wo $\lambda = \gamma + \frac{n}{3}$ ist, wenn γ wieder die Ordnung von φ in Bezug auf die Gröfsen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ und n in Bezug auf die Variabeln bezeichnet. Aus dem Werth für λ geht nun hervor, dafs jede rationale Covariante oder zugehörige Form von der $3p^{\text{ten}}$ Ordnung in Bezug auf die Variabeln sein mufs, wo p eine ganze Zahl bezeichnet. Da ferner die Coefficienten jeder zugehörigen

Form der dritten Ordnung den 9 Gleichungen genügen, welche im Vorhergehenden (§. 15, Theorem 8. und §. 23, Theorem 16.) für die Coefficienten von S_f und T_f entwickelt wurden, nur dafs statt S und T andere Grofsen eintreten, und die Lösungen dieser Gleichungen, wie in §. 23 gezeigt ist, sich immer in der Form

$$As_{\varkappa\lambda\mu}+Bt_{\varkappa\lambda\mu}$$

darstellen lassen, so folgt, dafs sich jede zugehörige Form der *dritten* Ordnung durch S_f und T_f ausdrücken läfst und *dafs daher die dritte unabhängige zugehörige Form mindestens von der sechsten Ordnung sein mufs*. Man kann endlich auch jede Covariante dritter Ordnung durch f und Δf darstellen, wenn man die Theorie der conjugirten Formen dazu benutzt. Ist ψ eine Covariante der dritten Ordnung und $P_\psi(u_1, u_2, u_3)$ ihre conjugirte Form, so drücke man die letztere als zugehörige Form durch P_f und R_f aus. Es sei in dieser Weise $P_\psi = AP_f + BR_f$, dann ist die conjugirte zu P_ψ nach §. 27, Theorem 23. einerseits die Function $Af - B\Delta f$, andrerseits nach §. 27. Theorem 21. die Function ψ selbst, beide Male noch multiplicirt mit einem constanten Factor, so dafs

$$\psi = C(Af - B\Delta f)$$

wird, also durch f und Δf dargestellt ist. Es mufs *daher auch jede dritte unabhängige Covariante mindestens von der sechsten Ordnung sein.*

Zur Darstellung solcher Covarianten benutze ich das 26ste Theorem insofern, als ich für die 5 homogenen Functionen zweiter Ordnung

$$(3.)\quad \begin{cases} \Sigma A_\varkappa A_\lambda x_\varkappa x_\lambda, & \Sigma A_\varkappa B_\lambda x_\varkappa x_\lambda, \quad \Sigma B_\varkappa B_\lambda x_\varkappa x_\lambda, \\ \Sigma A_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda, & \Sigma B_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda \end{cases}$$

simultane Invarianten nach §. 3 (9.) bilde, was im Ganzen, nach Ausscheidung der übereinstimmenden und der verschwindenden, noch 15 Covarianten giebt; von diesen wähle ich die folgende aus den Coefficienten von f und Δf symmetrisch gebildete:

$$(4.)\quad \psi(x_1, x_2, x_3) = \Sigma(AB)^{\varkappa\lambda} A_\varkappa B_\lambda,$$

als dritte Fundamentalcovariante. Man könnte aus dem Systeme 3 auch eine der beiden folgenden wählen:

$$\Sigma(AA)^{\varkappa\lambda} B_\varkappa B_\lambda \quad \text{oder} \quad \Sigma(BB)^{\varkappa\lambda} A_\varkappa A_\lambda,$$

indessen sind diese wegen der Unsymmetrie in Bezug auf die Coefficienten von f und Δf, weniger günstig. Da die nähere Entwicklung des Zusammen-

hanges der 15 Covarianten in die Theorie der Zwischenformen gehört, so übergehe ich hier dieselbe, indem ich nur in Bezug auf die beiden vorstehenden Covarianten hinzufüge, dafs sich durch die Operation δ sehr leicht

$$(5.)\quad \begin{cases} \Sigma(AA)^{\varkappa\lambda}B_\varkappa B_\lambda = \quad f.\Delta f.S-2\psi \\ \Sigma(BB)^{\varkappa\lambda}A_\varkappa A_\lambda = -f.\Delta f.S+2f^2.T-2\psi \end{cases}$$

ergiebt. Die beiden Covarianten (5.) hat auch Herr *Cayley* in der citirten Abhandlung aufgeführt, indessen ist seine dritte aus diesen beiden zusammengesetzte nicht die im Vorstehenden definirte ψ.

Als *dritte zugehörige Form* eignet sich am besten die unter dem Namen der reciproken Polaren in der Geometrie vorkommende, welche deshalb die *reciproke Form* genannt werden soll. Bezeichnet man dieselbe durch $F(u_1, u_2, u_3)$, so ist bekanntlich

$$F = 0$$

das Resultat der Elimination der Variabeln x_1, x_2, x_3 aus den Gleichungen

$$\frac{df}{dx_1} = u_1, \quad \frac{df}{dx_2} = u_2, \quad \frac{df}{dx_3} = u_3$$

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0.$$

Eine von Herrn *Hesse* im 40sten Bande dieses Journals S. 318 gegebene Methode zur Bestimmung dieses Resultats läfst sich dadurch ausführen, dafs man die nach den Variabeln x_1, x_2, x_3 geordnete Zwischenform Θ,

$$\Theta = \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda x_\varrho x_\sigma = \Sigma\Theta_{\varrho\sigma}x_\varrho x_\sigma$$

als homogene Function zweiten Grades dieser Variabeln betrachtet und zu derselben in diesem Sinne die zugehörige Form bildet, was

$$(6.)\qquad F(u_1, u_2, u_3) = \Sigma(\Theta\Theta)^{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda$$

giebt. Diese Form ist in Bezug auf die Variabeln von der 6ten, in Bezug auf die Coefficienten von der 4ten Ordnung.

Ich will nun eine neue Darstellungsweise von F geben.

Es soll auf ähnliche Weise wie in §. 16 (9.) durch

$$T_{1f}(u_1, u_2, u_3; \eta_1, \eta_2, \eta_3) = \Sigma! \frac{dT_f(u_1, u_2, u_3)}{da_{\varrho\sigma\tau}}\eta_\varrho\eta_\sigma\eta_\tau$$

die Function bezeichnet werden, welche entsteht, wenn man T_f nach den Gröfsen $a_{\varrho\sigma\tau}$ differentiirt und statt der Incremente die Potenzen und Produkte $\eta_\varrho\eta_\sigma\eta_\tau$ substituirt, und für den Augenblick diese Operation durch d angedeutet

werden, dann ist

$$(7.)\quad dT_f = d\Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} s_{\varrho\sigma\mu} u_\varkappa u_\lambda u_\mu$$
$$= 2\Sigma(a_\varrho\, da_\sigma)^{\varkappa\lambda} s_{\varrho\sigma\mu} u_\varkappa u_\lambda u_\mu + \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} ds_{\varrho\sigma\mu} u_\varkappa u_\lambda u_\mu,$$

aber $(a_\varrho da_\sigma)^{\varkappa\lambda} = (a_\varrho, \eta\eta)^{\varkappa\lambda}\eta_\sigma$, also mit Anwendung des Vertauschungssatzes:

$$(\alpha.)\quad \Sigma(a_\varrho da_\sigma)^{\varkappa\lambda} s_{\varrho\sigma\mu} u_\varkappa u_\lambda u_\mu = \Sigma(a_\varrho, \eta\eta)^{\varkappa\lambda} s_{\varrho\sigma\mu} u_\varkappa u_\lambda u_\mu \eta_\sigma = \Sigma(uu, \eta\eta)^{\varkappa\lambda} s_{\varrho\sigma\mu} u_\mu \eta_\sigma.$$

Ferner, weil

$$S_f(v_1, v_2, v_3) = \Sigma s_{\varrho\sigma\mu} v_\varrho v_\sigma v_\mu = \Sigma((aa)^{\mu\tau} a_\tau)^{\varrho\sigma} v_\varrho v_\sigma v_\mu$$

ist,

$$dS_f(v_1, v_2, v_3) = \Sigma ds_{\varrho\sigma\mu} v_\varrho v_\sigma v_\mu = 3\Sigma((aa)^{\mu\tau} da_\tau)^{\varrho\sigma} v_\varrho v_\sigma v_\mu \quad (\S.\ 14\ (6.))$$

und

$$((aa)^{\mu\tau} da_\tau)^{\varrho\sigma} = ((aa)^{\mu\tau} \eta\eta)^{\varrho\sigma} \eta_\tau,$$

also

$$\Sigma ds_{\varrho\sigma\mu} v_\varrho v_\sigma v_\mu = 3\Sigma((aa)^{\mu\tau} \eta\eta)^{\varrho\sigma} v_\varrho v_\sigma v_\mu \eta_\tau,$$

und wenn man auf beiden Seiten die symbolische Substitution

$$v_\varrho v_\sigma v_\mu = (a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} u_\varkappa u_\lambda u_\mu$$

ausführt:

$$(\beta.)\quad \Sigma(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} ds_{\varrho\sigma\mu} u_\varkappa u_\lambda u_\mu = 3\Sigma((aa)^{\mu\tau} \eta\eta)^{\varrho\sigma} (a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda} u_\varkappa u_\lambda u_\mu \eta_\tau$$
$$= 3\Sigma((aa)^{\mu\tau} \eta\eta)^{\varrho\sigma} \Theta_{\varrho\sigma} u_\mu \eta_\tau \quad (5.)$$
$$= 3\Sigma(\Theta, \eta\eta)^{\varrho\sigma} (a_\varrho a_\sigma)^{\mu\tau} u_\mu \eta_\tau.$$

Substituirt man (α.) und (β.) in (7.), so ergiebt sich

$$(8.)\quad T_{1f}(u_1, u_2, u_3; \eta_1, \eta_2, \eta_3)$$
$$= 2\Sigma(uu, \eta\eta)^{\varkappa\lambda} s_{\varkappa\lambda\mu} u_\mu \eta_\sigma + 3\Sigma(\Theta, \eta\eta)^{\varrho\sigma} (a_\varrho a_\sigma)^{\mu\tau} u_\mu \eta_\tau.$$

Setzt man nun die Variabeln $\eta_\varkappa = u_\varkappa$, so wird $(uu, \eta\eta)^{\varkappa\lambda} = (uu, uu)^{\varkappa\lambda} = 0$ und (8.) geht über in

$$(9.)\quad T_{1f}(u_1, u_2, u_3; u_1, u_2, u_3) = 3\Sigma(\Theta, uu)^{\varrho\sigma} \Theta_{\varrho\sigma} = 3\Sigma(\Theta\Theta)^{\varrho\sigma} u_\varrho u_\sigma,$$

was wegen (5.) das folgende Theorem giebt:

Theorem 27.

Wenn man die zweite Invariante T nach den Gröfsen $a_{\varkappa\lambda\mu}$ zweimal differentiirt, und statt der Incremente jedesmal die entsprechenden Potenzen und Produkte $u_\varkappa u_\lambda u_\mu$ substituirt, so entsteht die dreifache reciproke Form, nämlich

$$F(u_1, u_2, u_3) = \Sigma(\Theta\Theta)^{\varrho\sigma} u_\varrho u_\sigma = \tfrac{1}{4}\Sigma!\Sigma! \frac{d^2T}{da_{\varkappa\lambda\mu}\, da_{\varrho\sigma\tau}} u_\varkappa u_\lambda u_\mu u_\varrho u_\sigma u_\tau.$$

Differentiirt man die Form (9.) nochmals und setzt wiederum statt der Incremente die Potenzen und Produkte $u_\varkappa u_\lambda u_\mu$, so erhält man mit Rücksicht auf (β.), weil jetzt nur noch die Ausdrücke $(a_\varrho a_\sigma)^{\mu\tau}$, $(a_\varrho a_\sigma)^{\varkappa\lambda}$ differentiirt werden müssen, nur Glieder von der Form $(uu, uu)^{\mu\tau}$, $(uu, uu)^{\varkappa\lambda}$, welche verschwinden, daher folgt:

$$\Sigma!\Sigma!\Sigma! \frac{d^3 T}{da_{\varkappa\lambda\mu}\, da_{\varrho\sigma\tau}\, du_{pqr}} u_\varkappa u_\lambda u_\mu u_\varrho u_\sigma u_\tau u_p u_q u_r = 0.$$

Man kann diesen Satz, so wie den analogen aus §. 16 (9.) hervorgehenden dazu benutzen, um die beiden Invarianten der Form

$$f(x_1, x_2, x_3) + h(u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3)^3$$

in reducirter Weise darzustellen. Bezeichnet man dieselben durch S_h und T_h, so wird

$$S_h = S + h dS, \qquad T_h = T + h dT + \frac{h^2}{2} d^2 T,$$

weil für S_h die Differentiale vom zweiten ab, für T_h vom dritten ab verschwinden, daher

$$(10.) \qquad S_h = S + \tfrac{2}{3} h S_f; \qquad T_h = T + h T_f + \tfrac{3}{2} h^2 F_f.$$

Zur Darstellung der zugehörigen Formen dritter Ordnung habe ich in §. 28 die Gleichung

$$6R\varphi_f = P_f . \delta\varphi + \gamma R_f . \varphi$$

gegeben; eine ganz analoge Beziehung gilt für die Zusammensetzung der zugehörigen Formen 6ter Ordnung, welche aus der *zweimaligen* Differentiation einer Invariante entspringen, und ich will hiervon nur der Vollständigkeit halber noch die Zerlegung von $F_{af+b\Delta f}$ in F, P_f, R_f oder F, S_f, T_f angeben. Es ist nämlich

$$(11.) \qquad 6R^2 F_{af+b\Delta f} =$$

$$6R^2.G.F + \left(\tfrac{1}{30}\frac{d^2 T_{ab}}{db^2} - GST\right)P_f^2 + 2\left(\tfrac{1}{30}\frac{d^2 T_{ab}}{da\,db} - GS^2\right)P_f R_f + \left(\tfrac{1}{30}\frac{d^2 T_{ab}}{da^2} - GT\right)R_f^2$$

oder wenn man P_f und R_f durch S_f und T_f ersetzt:

$$(12.) \qquad 3F_{af+b\Delta f} = 3G.F + (2a^3 - 4Tb^3)bS_f^2 + 6(a^2 + Sb^2)S_f T_f + 6ab^3 T_f^2.$$

Herr *Cayley* hat in der citirten Abhandlung die Form (12.) gegeben; die Form (11.) enthält aber das Bildungsgesetz.

§. 30.

Zum Schlusse dieser Untersuchungen, aus welchen die ganz besondere Wichtigkeit der conjugirten Formen genugsam erhellet, will ich noch eine

merkwürdige Beziehung dieser Formen zu den ursprünglich gegebenen Functionen entwickeln, die eine Art Reciprocitätsgesetz zwischen der ersten Covariante und der ersten zugehörigen Form bildet.

Theorem 28.

Die erste zugehörige Form und erste Covariante der conjugirten Form $P_f(u_1, u_2, u_3)$ sind beziehungsweise, bis auf einen constanten Factor, mit der ersten Covariante und ersten zugehörigen Form der ursprünglichen Function $f(x_1, x_2, x_3)$ übereinstimmend.

Zum Beweise bemerke man zunächst, dafs der eine Theil des Satzes den andern mit herbeiführt, weil die Grundeigenschaft der conjugirten Formen darin besteht, dafs sie sich gegenseitig reproduciren.

Ferner vereinfacht sich der Beweis, wenn man von dem constanten Factor absieht, weil man dann die Uebereinstimmung der beiden in Rede stehenden Formen dadurch nachweisen kann, dafs man sie als Eliminationsresultate derselben Gleichungen darstellt. Um die erste zugehörige Form als Eliminationsresultat darzustellen, d. h. um ein System von Gleichungen zu finden, aus welchen sich

$$S_f(u_1, u_2, u_3) = 0$$

als Endresultat ergiebt, beachte man die Grundgleichungen für S_f, §. 16 Theorem 9:

$$(1.)\quad \Sigma((aa)^{\tau\mu} a_\tau)^{\varkappa\lambda} u_\varkappa u_\lambda u_\mu = \tfrac{1}{3} S_f, \qquad \Sigma((aa)^{\tau\mu} a_{\tau_1})^{\varkappa\lambda} u_\varkappa u_\lambda u_\mu = 0,$$

wo τ, τ_1 constante von einander verschiedene Indices bezeichnen.

Aus denselben folgt zunächst

$$(2.)\quad \Sigma\Sigma((aa)^{\tau\mu} a_{\tau_1})^{\varkappa\lambda} u_\varkappa u_\lambda u_\mu u_\tau x_{\tau_1} = \tfrac{1}{3}(x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3) S_f,$$

wenn man über τ und τ_1 summirt, da sich die Gleichungen (1.) wieder ergeben, wenn man die Coefficienten gleicher Potenzen von x_1, x_2, x_3 einander gleich setzt.

Bezeichnet man jedoch wie im §. 8.

$$\Sigma(a_\varkappa a_\lambda)^{\tau\mu} u_\mu u_\tau \quad \text{durch} \quad \Theta_{\varkappa\lambda},$$

ferner wie früher

$$\Sigma a_{\tau_1, \varkappa\lambda} x_{\tau_1} \quad \text{durch} \quad A_{\varkappa\lambda},$$

so geht (2.) in

$$(3.)\quad \Sigma(\Theta A)^{\varkappa\lambda} u_\varkappa u_\lambda = \tfrac{1}{3}(x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3) S_f$$

über, oder in

$$(4.)\quad \Sigma(uu, A)^{\varkappa\lambda} \Theta_{\varkappa\lambda} = \tfrac{1}{3}(x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3) S_f.$$

Es sei v_1, v_2, v_3 ein zweites System von Variabeln, welches in Verbindung mit x_1, x_2, x_3, die bis dahin ganz beliebig waren, den Gleichungen

$$(5.)\qquad 2A_{\varkappa\lambda} = u_\varkappa v_\lambda + u_\lambda v_\varkappa$$

genügt, so wird die linke Seite von (4.) identisch $=0$, weil $(uu, uv+vu)^{\varkappa\lambda}=0$ ist, daher folgt, dafs die 6 Gleichungen, welche aus (5.) entstehen, wenn man alle Werthe 1, 2, 3 für $\varkappa$, λ setzt, als Eliminationsresultat der Variabeln x_1, x_2, x_3; v_1, v_2, v_3 die Gleichung

$$S_f = 0$$

liefern.

Die Gleichungen (5.) sind ausführlich geschrieben die folgenden:

$$(6.)\quad \begin{cases} (a_{111}x_1 + a_{112}x_2 + a_{113}x_3) = u_1 v_1 \\ (a_{122}x_1 + a_{222}x_2 + a_{123}x_3) = u_2 v_2 \\ (a_{133}x_1 + a_{233}x_2 + a_{333}x_3) = u_3 v_3 \\ 2(a_{123}x_1 + a_{223}x_2 + a_{233}x_3) = u_2 v_3 + u_3 v_2 \\ 2(a_{113}x_1 + a_{123}x_2 + a_{133}x_3) = u_3 v_1 + u_1 v_3 \\ 2(a_{112}x_1 + a_{122}x_2 + a_{123}x_3) = u_1 v_2 + u_2 v_1 \end{cases}$$

und S_f ist demnach bis auf einen Zahlenfactor einer Determinante gleich, nämlich:

$$(7.)\qquad S_f = -6 \begin{vmatrix} a_{111} & a_{122} & a_{133} & 2a_{123} & 2a_{113} & 2a_{112} \\ a_{112} & a_{222} & a_{233} & 2a_{223} & 2a_{123} & 2a_{122} \\ a_{113} & a_{223} & a_{333} & 2a_{233} & 2a_{133} & 2a_{123} \\ u_1 & 0 & 0 & 0 & u_3 & u_2 \\ 0 & u_2 & 0 & u_3 & 0 & u_1 \\ 0 & 0 & u_3 & u_2 & u_1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Nun kann man aber die Gleichung (6.) mit Hülfe der Coefficienten von P_f auflösen. Da nämlich

$$\Sigma p_{1\varkappa\lambda}A_{\varkappa\lambda} = 0,\qquad \Sigma p_{2\varkappa\lambda}A_{\varkappa\lambda} = 0,\qquad \Sigma p_{3\varkappa\lambda}A_{\varkappa\lambda} = 0$$

ist, so erhält man, wenn man die Gleichungen (6.) mit den entsprechenden $p_{\tau\varkappa\lambda}$ multiplicirt

$$\begin{aligned} 0 = {} & v_1(p_{\tau 11}u_1 + p_{\tau 12}u_2 + p_{\tau 13}u_3) \\ & + v_2(p_{\tau 12}u_1 + p_{\tau 22}u_2 + p_{\tau 23}u_3) \\ & + v_3(p_{\tau 13}u_1 + p_{\tau 23}u_2 + p_{\tau 33}u_3) \end{aligned}$$

oder wenn der Kürze halber

$$P_{\varkappa\lambda} = p_{1\varkappa\lambda}u_1 + p_{2\varkappa\lambda}u_2 + p_{3\varkappa\lambda}u_3$$

ist, und man $\tau = 1$, 2 oder 3 setzt:

$$0 = v_1 P_{11} + v_2 P_{12} + v_3 P_{13}$$
$$0 = v_1 P_{12} + v_2 P_{22} + v_3 P_{23}$$
$$0 = v_1 P_{13} + v_2 P_{23} + v_3 P_{33}.$$

Eliminirt man hieraus v_1, v_2, v_3, so ergiebt sich wegen §. 11 (6.):

$$\varDelta P_f = 0.$$

Da aber $\varDelta P_f$ und S_f von der dritten Ordnung in Bezug auf die Variabeln sind, so können sie sich nur noch durch einen constanten Factor von einander unterscheiden.

Beiläufig bemerke ich noch, dafs nach Bestimmung dieses Factors sich ergiebt:

$$(9.) \quad \begin{cases} \varDelta P_f = -2R^2 S_f, \\ S_{Pf} = 4R^2 \varDelta f. \end{cases}$$

Ich habe bereits in meiner Abhandlung im 39sten Bande dieses Journals darauf aufmerksam gemacht, dafs eine der zugehörigen Formen die Eigenschaft hat eine Function mit *rationalen* Coefficienten zu liefern, deren erste Covariante (Functionaldeterminante) sie ist, aus dem Vorhergehenden (9.) sieht man, dafs $-2R^2 S_f$ diese Function ist, und dafs P_f ihre primitive Form wird.

Für geometrische Anwendungen ist durch das 28ste Theorem eine Reciprocität zwischen Punkt- und Liniengebilden dritter Ordnung erwiesen, welche denen der Kegelschnitte analog ist, weil man in ein und demselben System direct von Curven dritter Ordnung zu Curven dritter Klasse übergehen kann, während die bekannte Verallgemeinerung dieser Theorie einen Uebergang von Curven *der dritten Ordnung* zu Curven *der sechsten Klasse* erfordert.

Ich bemerke zum Schlufs, dafs die zweite zugehörige Form T_f einem analogen, für den Charakter derselben fundamentalen Theorem genügt, welches sich wie folgt aussprechen läfst:

Theorem 29.

Die homogene Function der Variabeln x_1, x_2, x_3, deren conjugirte Form die zweite zugehörige T_f ist, stimmt mit der zweiten zugehörigen Form der zu f conjugirten P_f bis auf einen constanten Factor überein.

Mit Hülfe einiger die Zwischenformen betreffenden Entwicklungen gelangt man von den beiden letzten Theoremen zu einer wesentlich andern

Darstellung der Grundformen im System der zugehörigen Formen, als sie Herr *Cayley* in der citirten Abhandlung gegeben hat. Es gestaltet sich in der That das ganze System, welchem die zusammengesetzte Function

$$aP_f - bR_f = R((aT - bS^2)S_f - (aS - bT)T_f)$$

zu Grunde gelegt ist, in folgender ebenso einfachen wie gesetzmäfsigen Weise:

$$\text{I.)}\quad S_{ap_{\varkappa\lambda\mu}-br_{\varkappa\lambda\mu}} = 4R^3G,$$

$$\text{II.)}\quad T_{ap_{\varkappa\lambda\mu}-br_{\varkappa\lambda\mu}} = -8R^4T_{ab},$$

$$\text{III.)}\quad R_{ap_{\varkappa\lambda\mu}-br_{\varkappa\lambda\mu}} = 64R^8S^3_{ab},$$

$$\text{IV.)}\quad \Delta(aP_f - bR_f) = -2R^2S_{af+b\Delta f},$$

$$\text{V.)}\quad S_{aP_f-bR_f} = 4R^2\Delta(af + b\Delta f),$$

$$\text{VI.)}\quad T_{aP_f-bR_f} = 8R^3\left(\tfrac{1}{6}\frac{dT_{ab}}{db}f - \tfrac{1}{6}\frac{dT_{ab}}{da}\Delta f\right),$$

$$\text{VII.)}\quad P_{aP_f-bR_f} = -32R^6S^2_{ab}(af + b\Delta f),$$

$$\text{VIII.)}\quad R_{aP_f-bR_f} = -64R^7S^2_{ab}\left(\tfrac{1}{4}\frac{dS_{ab}}{db}f - \tfrac{1}{4}\frac{dS_{ab}}{da}\Delta f\right),$$

$$\text{IX.)}\quad 3F_{aP_f-bR_f} =$$

$$4R^2\{(af + b\Delta f).\Delta(af + b\Delta f)S^2_{ab} + \Delta(af + b\Delta f).\Delta\Delta(af + b\Delta f) - 6S_{ab}\psi_{af+b\Delta f}\}.$$

$$\text{X.)}\quad 3G.\psi_{aP_f-bR_f} =$$

$$8R^6.\{T_{ab}.S^2_{af+b\Delta f} + 2S_{ab}.S_{af+b\Delta f}.T_{af+b\Delta f} - 3S^2_{ab}.F_{af+b\Delta f}\},$$

wo ψ die oben definirte *dritte Covariante* bedeutet.

Die Ableitung des 29sten Theorems, so wie die Entwicklung der vorstehenden Formen werde ich sehr bald diesen Untersuchungen folgen lassen.

Berlin, im December 1857.

11.

Note sur la composition du nombre 47 par rapport aux vingt-troisièmes racines de l'unité.

(Par *M. Cayley*.)

M. *Kummer* a trouvé (Journal de M. *Liouville* t. XII, p. 208) que le nombre 47 peut être décomposé en onze facteurs qui se déduisent du suivant $\alpha^{10}+\alpha^{13}+\alpha^{8}+\alpha^{15}+\alpha^{7}+\alpha^{16}$, α désignant une racine $23^{\text{ème}}$ de l'unité, et on sait par la théorie générale qu'il doit y avoir une puissance 47^{3f} qui se décompose en vingt-deux facteurs. Le nombre 47^{3} peut se décomposer en deux facteurs formés avec les demi-périodes des racines; il était donc naturel d'essayer si le facteur $(\alpha^{10}+\alpha^{13}+\alpha^{8}+\alpha^{15}+\alpha^{7}+\alpha^{16})^{3}$ pourrait se décomposer de même en deux facteurs, ce qui donnerait la décomposition de 47^{3} en vingt-deux facteurs. Mais on démontre très-facilement que cette décomposition n'est pas possible. En effet en posant $\alpha^{\lambda}=1$ (λ étant un nombre premier) et en faisant

$$A+B\alpha+\cdots K\alpha^{\lambda-1} = (a+b\alpha+\cdots k\alpha^{\lambda-1})(a+b\alpha^{\lambda-1}+\cdots k\alpha),$$

on aura $A=a^{2}+b^{2}+\cdots k^{2}$. Le nombre qui forme le premier membre peut se réduire au moyen de l'équation $1+\alpha+\cdots\alpha^{\lambda-1}=0$ à la forme $B'\alpha+C'\alpha^{2}\cdots+K'\alpha^{\lambda-1}$ et l'on aura

$$B'\alpha+C'\alpha^{2}\cdots+K'\alpha^{\lambda-1}$$
$$=(a+b\alpha+\cdots k\alpha^{\lambda-1})(a+b\alpha^{\lambda-1}+\cdots k\alpha)-(a^{2}+b^{2}+\cdots k^{2})(1+\alpha+\cdots\alpha^{\lambda-1}),$$

équation qui subsiste lorsqu'on y fait $\alpha=1$, ce qui donne

$$B'+C'+\cdots K' = (a+b+\cdots k)^{2}-\lambda(a^{2}+b^{2}+\cdots k^{2});$$

or, la fonction qui forme le second membre, prise avec le signe négatif peut se mettre sous la forme $(a-b)^{2}+(a-c)^{2}+(b-c^{2})+$ etc. donc la décomposition n'existe pas à moins que $B'+C'+\cdots K'$ ne soit négatif. Mais, en réduisant seulement au moyen de l'équation $\alpha^{23}-1=0$, on trouve la suivante

$$(\alpha^{10}+\alpha^{13}+\alpha^{8}+\alpha^{15}+\alpha^{7}+\alpha^{16})^{3} =$$
$$\left.\begin{array}{l}6+7\alpha+7\alpha^{2}+3\alpha^{3}+6\alpha^{4}+9\alpha^{5}+6\alpha^{6}+16\alpha^{7}+15\alpha^{8}+9\alpha^{9}+18\alpha^{10}+9\alpha^{11}\\ \quad+7\alpha^{22}+7\alpha^{21}+3\alpha^{20}+6\alpha^{19}+9\alpha^{18}+6\alpha^{17}+16\alpha^{16}+15\alpha^{15}+9\alpha^{14}+18\alpha^{13}+9\alpha^{12}\end{array}\right\}$$

laquelle, en vertu de $1+\alpha+\cdots\alpha^{22}=0$, se réduit à

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\alpha^{2}-3\alpha^{3}+3\alpha^{5}+10\alpha^{7}+9\alpha^{8}+3\alpha^{9}+12\alpha^{10}+3\alpha^{11}\\ +\alpha^{22}+\alpha^{21}-3\alpha^{20}+3\alpha^{18}+10\alpha^{16}+9\alpha^{15}+3\alpha^{14}+12\alpha^{13}+3\alpha^{12}\end{array}\right\}$$

où la somme des coefficients est positive; donc la décomposition ne peut pas s'effectuer. On pourrait sans beaucoup de peine essayer de la même manière les nombres $f=2$ ou $f=3$, mais je ne sais pas si l'on a une idée quelconque de la grandeur du nombre f.

Londres, le 10 Mai 1857.

12.

Ueber eine zahlentheoretische Funktion.

(Von Herrn *Stern* zu Göttingen.)

In den „Monatsberichten der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, aus dem Jahre 1850" findet man S. 36 einen Aufsatz von *Eisenstein* über eine zahlentheoretische Funktion, auf welche er bei seinen Untersuchungen über die höheren Reciprocitätsgesetze geführt wurde, worüber in einer anderen Arbeit *Eisenstein*'s (dieses Journal Bd. 39 S. 356) weitere Erörterungen vorkommen. In dem erwähnten Aufsatze giebt *Eisenstein* den Werth der Funktion an, und zeigt, dafs dieser Werth der einzige ist, der den Bedingungen entspricht, welchen die Funktion genügen soll. Die Analyse aber, die zu diesem Werthe geführt hat, und die der Verfasser als eine schwierige bezeichnet, hat er nicht mitgetheilt. Weiter bemerkt er, dafs ihn die Betrachtung dieser Funktion auf eine merkwürdige Zahlenreihe geführt habe. Er giebt eine Anzahl von Sätzen, die eben so viel Eigenschaften dieser Reihe ausdrücken; der Beweis derselben, sagt er am Schlusse, sei in derselben Analyse mit enthalten, welche zur Bestimmung der erwähnten Funktion geführt hätte.

Dieser Aufsatz wurde der Akademie den 18. Februar mitgetheilt. Schon etwas früher, in einem vom 14. Januar datirten Briefe, theilte mir *Eisenstein* die Auffindung dieser Reihe und die so eben erwähnten Eigenschaften mit, ohne jedoch der zahlentheoretischen Funktion zu gedenken, und schrieb mir noch Folgendes dabei. „Meine Beweise dieser Sätze sind ziemlich complicirt, vielleicht finden Sie einfachere, es wäre mir lieb solche zu besitzen, die sich unmittelbar aus der gegebenen Bildungsweise auf elementare Weise ergeben." Ich war damals verhindert, diesem Gegenstande meine Aufmerksamkeit zu widmen. Gegenwärtig aber hoffe ich, leider zu spät, dem Wunsche meines unvergefslichen Freundes vollständig zu entsprechen, indem ich die Eigenschaften der Reihe, wie der damit eng verbundenen Funktion aus den elementarsten Betrachtungen ableiten werde.

1.

Es seien zwei positive Zahlen m und n gegeben, man addire sie und setze die Summe $m+n$ zwischen dieselben, so erhält man die Folge

$$(1.) \quad m,\ m+n,\ n.$$

Man addire in dieser Folge wieder je zwei aufeinanderfolgende Zahlen, und setze ihre Summe zwischen dieselben, so erhält man die Folge

$$(2.) \quad m,\ 2m+n,\ m+n,\ m+2n,\ n.$$

Behandelt man diese Folge weiter auf dieselbe Weise, so erhält man

$$(3.) \quad m,\ 3m+n,\ 2m+n,\ 3m+2n,\ m+n,\ 2m+3n,\ m+2n,\ m+3n,\ n$$

und man sieht, dafs sich das Verfahren ins Unendliche fortsetzen läfst.

Die Folge (1.) nenne ich die *erste* Reihe, die Folge (2.) die *zweite* Reihe u. s. w. Alle diese ins Unbestimmte fortgesetzten Reihen sollen die *Entwickelung* (m, n) heifsen und m das *erste*, n das *zweite Argument* dieser Reihen. Wo es die Deutlichkeit fordert, werde ich die p^{te} Reihe auch als die p^{te} *Entwickelungsreihe* (m, n) bezeichnen, und die Folge m, n die *nullte* Entwickelungsreihe nennen. Jede in einer Reihe enthaltene Zahl heifse ein *Glied* dieser Reihe, eine Anzahl unmittelbar aufeinanderfolgender Glieder eine *Gruppe*. Jede Zahl, welche die Summe der sie einschliefsenden Zahlen ist, nenne ich ein *Summenglied*, jede andere Zahl ein *Stammglied*; ein und dieselbe Zahl kann also an gewissen Stellen ein Summenglied und an anderen ein Stammglied sein.

Aus der Bildung der Reihen ergeben sich nun unmittelbar folgende Eigenschaften derselben.

Die Zahl m kommt nur und immer nur am *Anfange*, die Zahl n nur und immer nur am *Ende* jeder Reihe vor, die Zahl $m+n$ nur und immer nur in der *Mitte*, weswegen sie auch das *Mittelglied* heifsen soll. Die Reihe der Glieder von dem ersten an bis zu dem Mittelgliede, dieses eingeschlossen, soll die *erste Hälfte* der Reihe heifsen, die Reihe der Glieder von dem Mittelgliede an, dieses eingeschlossen, bis zum Ende der Reihe, heifse die *zweite* Hälfte. In den Reihen, welche auf die erste folgen, sind die zwischen dem Anfangsgliede m und dem Mittelgliede enthaltenen Glieder ebenso aus diesen gebildet, wie die zwischen dem Mittelgliede und dem Endgliede n liegenden Glieder aus diesen. Zwei gleichweit von dem Mittelgliede entfernte Glieder müssen also in einander übergehen, wenn man m und n vertauscht (da das Mittelglied durch diese Vertauschung nicht geändert wird).

Ist das eine dieser Glieder $km + ln$, so mufs das andere $lm + kn$ sein; zwei solche Glieder nenne ich *symmetrische*. Die Coefficienten des ersten und zweiten Arguments in irgend einem Gliede sollen bezüglich der *erste* und *zweite* Coefficient dieses Gliedes heifsen.

Zwischen je zwei Stammgliedern steht ein Summenglied, zwischen je zwei Summengliedern ein Stammglied. Die Stammglieder nehmen die *ungeraden* Stellen in der Reihe ein, die Summenglieder die *geraden*; die Zahlen in den geraden Stellen sind daher gröfser als die unmittelbar folgenden und vorhergehenden. Daraus folgt, dafs in jeder Reihe, von den zwei Stammgliedern, welche ein Summenglied bilden, abwechselnd das vorhergehende oder das folgende das kleinere ist. Beginnt z. B. irgend eine Reihe mit den Gliedern

$$m, s, m_1, s_1, m_2, s_2, \ldots$$

so beginnt die folgende mit

$$m, m+s, s, m_1+s, m_1, m_1+s_1, s_1, \ldots$$

und man hat $m < s$; $s > m_1$; $m_1 < s_1, \ldots$

Es ist also allgemein ein Glied in der Stelle $4k+3$, gröfser als die Glieder in der Stelle $4k+1$ und $4k+5$.

2.

Ist die Anzahl der Glieder in irgend einer Reihe $= k$, so ist die Anzahl der Glieder der folgenden Reihe $2(k-1)+1$. Nun ist die Anzahl der Glieder der ersten Reihe $= 2+1$, also allgemein die Anzahl der Glieder in der p^{ten} Reihe $= 2^p + 1$.

Stellt man sich die einzelnen Glieder einer Reihe zusammen addirt vor, und nennt dies die *Summe* der Reihe, so ist leicht zu sehen, dafs die Summe einer folgenden Reihe gefunden wird, wenn man das *dreifache* der Summe der unmittelbar vorhergehenden nimmt und die Summe der Argumente $m+n$ abzieht. Denn in der folgenden Reihe kommen nicht blofs die Glieder der vorhergehenden wieder unmittelbar vor, sondern jedes derselben wird noch aufserdem doppelt wiederholt, indem es zum vorhergehenden und folgenden addirt wird; mit Ausnahme des ersten Gliedes, welches nur zum folgenden, und des letzten, welches nur zum vorhergehenden addirt wird. Bezeichnet also $S_p(m,n)$ die Summe der p^{ten} Reihe mit den Argumenten m, n, so findet sich

$$S_p(m,n) = \frac{3^p+1}{2}(m+n).$$

Im Folgenden sollen die Argumente immer *ganze* Zahlen sein, doch darf eines derselben auch Null werden.

Man hat

$$S_p(m, n) = S_p(n, m)$$

$$\frac{S_p(m', n')}{S_p(m, n)} = \frac{m'+n'}{m+n}$$

$$S_p(m+m', n'+n') = S_p(m, n) + S_p(m', n')$$

Aus der letzten Gleichung folgen die speciellen Gleichungen

$$S_p(1, 1) = S_p(1, 0) + S_p(0, 1)$$

$$S_p(1, 2) = S_p(0, 1) + S_p(1, 1)$$

$$S_p(2, 3) = S_p(1, 1) + S_p(1, 2)$$

. . . .

also auch

$$\frac{S_p(1, 1)}{S_p(1, 0)} = 1 + \frac{S_p(0, 1)}{S_p(1, 0)} = 1 + \frac{1}{1}$$

$$\frac{S_p(1, 2)}{S_p(1, 1)} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}$$

$$\frac{S_p(2, 3)}{S_p(1, 2)} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}$$

u. s. w.

3.

Ich betrachte nun den besonderen Fall, wenn die beiden Argumente *der Einheit gleich sind,* also die Entwickelung (1, 1), auf welche sich, wie später gezeigt werden soll, alle übrigen Fälle zurückführen lassen. Aus den obigen allgemeinen Erörterungen ergiebt sich unmittelbar, dafs hier die Einheit *immer* und *nur* am *Anfang* und *Ende* jeder Reihe vorkommt, dafs das *Mittelglied* $= 2$ ist und dafs die *symmetrischen* Glieder *gleich* sind; so dafs die der Zahl 2 vorausgehenden Glieder sich hinter derselben in umgekehrter Ordnung wiederholen.

Es können nie zwei *gerade* Zahlen in einer Reihe unmittelbar auf einander folgen. Bezeichnen g, g', g'' irgend welche *gerade* Stammglieder, u, u', u'' irgend welche *ungerade*, G, G', G'' irgend welche *gerade* Summenglieder, U, U', U'' irgend welche *ungerade,* so müfste eine Gruppe von *zwei* geraden Gliedern, die in der p^{ten} Reihe vorkäme, entweder G, g oder g, G

sein; in beiden Fällen hätte man also eine Gruppe von *drei* geraden Gliedern, entweder g', G, g oder g, G, g' und mithin in der $p-1^{ten}$ Reihe eine Gruppe von *zwei* geraden Gliedern, g', g oder g, g', d. h. wenn in der p^{ten} Reihe eine Gruppe von zwei geraden Gliedern vorkommt, mufs auch in der $p-1^{ten}$, und mithin in jeder vorhergehenden Reihe, eine solche Gruppe vorkommen, während doch die erste, aus den Gliedern 1, 2, 1 bestehende Reihe keine solche Gruppe enthält, also überhaupt keine solche vorkommen kann.

In keiner Reihe kann eine Gruppe von *drei* Zahlen vorkommen, so beschaffen, dafs *jede* dieser Zahlen, oder *nur* die *mittlere, ungerade* ist. Gäbe es in der p^{ten} Reihe eine Gruppe u, u', u'', so könnte sie, wie sich versteht, nicht u, U, u' sein, sondern U, u', U'. Diese letztere Gruppe würde also die Gruppe g, U, u', U', g' bedingen und mithin müfste die $p-1^{te}$ Reihe die Gruppe g, u', g' enthalten; diese müfste G, u', G' sein, (da sie nicht g, U, g' sein kann) und würde daher die Gruppe u, G, u', G', u'' bedingen; in der $p-2^{ten}$ Reihe müfste mithin wieder eine aus drei ungeraden Gliedern bestehende Gruppe u, u', u'' vorkommen. Setzt man diesen Schlufs fort, so folgt, dafs überhaupt in den Reihen vom Range $p, p-2, p-4, \ldots$ eine Gruppe von der Form u, U', u', und in den Reihen vom Range $p-1$, $p-3, p-5, \ldots$ eine Gruppe von der Form G, u, G' vorkommen müfste. Da aber die zwei ersten Reihen 1, 2, 1 und 1, 3, 2, 3, 1 weder die eine noch die andere dieser Gruppen enthalten, so folgt, dafs sie überhaupt nicht vorkommen können.

Aus dem Vorhergehenden folgt, dafs von den *acht* Zusammenstellungen zu *drei* Elementen, die sich aus irgend welchen geraden Elementen g und irgend welchen ungeraden u bilden lassen, nur die drei folgenden in irgend einer Reihe als Gruppe vorkommen können, nemlich

$$guu$$
$$ugu$$
$$uug.$$

Man sieht aber zugleich, dafs nur eine dieser Gruppen sich fortwährend in der Reihe wiederholen kann und mufs. Geht man z. B. von der Gruppe guu aus, so kann die nächstfolgende weder uug noch ugu sein, weil in beiden Fällen drei ungerade Zahlen auf einander folgen würden.

Beginnt irgend eine Reihe mit ugu, so ist klar, dafs die nächste mit uug, die darauf folgende wieder mit ugu beginnen mufs u. s. w. Nun beginnt die erste Reihe wirklich mit ugu, folglich wird sich in jeder Reihe

vom Range $2p+1$ diese Gruppe von Anfang an wiederholen; und da die Zahl aller Glieder $=2^{2p+1}+1$, also durch 3 theilbar ist, so wiederholt sich diese Gruppe bis ans Ende der Reihe. Ist dagegen die Reihe vom Range $2p$, also die Anzahl der Glieder $2^{2p}+1$, so wird sich die Gruppe uug vom Anfang der Reihe an wiederholen, die Reihe wird aber mit uu schliefsen.

4.

In jeder Reihe ist die Summe der zwei äufseren von je drei aufeinander folgenden Gliedern durch das mittlere Glied theilbar. Ist das mittlere Glied ein Summenglied, so versteht sich der Satz von selbst. Ist dagegen das mittlere Glied, welches m heifsen soll, ein Stammglied, sind also die äufseren, s und s', Summenglieder, so wird m jedenfalls aus einer früheren Reihe herstammen, in welcher es Summenglied war. War es in der $p-1^{\text{ten}}$ Reihe Summenglied und dort von den Gliedern a und b eingeschlossen, $a+b=m$, so hat man in der p^{ten} Reihe die Gruppe a, s, m, s', b, also $s=a+m, s'=m+b$ und $s+s'=3m$. War m in der $p-2^{\text{ten}}$ Reihe Summenglied, so hat man, mit Beibehaltung der vorhergehenden Bezeichnung, in der $p-1^{\text{ten}}$ Reihe die Folge $s-m, m, s'-m$, und nach dem eben Bewiesenen, $s-m+s'-m=3m$, also $s+s'=5m$. Setzt man diese Betrachtung fort, so findet man allgemein Folgendes:

Wenn in der p^{ten} Reihe die Gruppe a, b, c vorkommt, und b ist in der $p-k^{\text{ten}}$ Reihe als Summenglied entstanden, so ist

$$(4.)\quad a+c = (2k+1)b.$$

Man sieht dafs diese Formel zugleich den Fall umfafst, wenn $k=0$, also m in der p^{ten} Reihe selbst als Summenglied entstanden ist.

Umgekehrt kann man also auch aus einer gegebenen Gruppe a, b, c, in der p^{ten} Reihe finden, in welcher Reihe das Mittelglied b als Summenglied entstanden ist. Denn bezeichnet man diese Reihe durch $p-k$, so ist

$$k = \frac{a+c-b}{2b}.$$

Man findet z. B. dafs die sechste Reihe mit den Zahlen

1, 7, 6, 11, 5, 14, 9, 13, 4, 15, 11, ...

beginnt. Nimmt man die Gruppe 13, 4, 15, so folgt aus $\frac{13+15-4}{8}=3$, dafs die Zahl 4 in der 3ten Reihe als Summenzahl entstanden ist. In der That entspringt die Gruppe 13, 4, 15 aus der Gruppe 1, 4, 3, mit welcher die dritte Reihe beginnt.

Da die geradstelligen Glieder in jeder Reihe Summenglieder sind, und das Glied, welches in der $p-1^{ten}$ Reihe die Stelle $2l$ einnimmt, in der folgenden Reihe in der $4l-1^{ten}$ Stelle erscheint, so kann man auch behaupten, dafs das $4l-1^{te}$ Glied der p^{ten} Reihe in der $p-1^{ten}$ Reihe als Summenglied entstanden ist; ebenso findet sich, dafs das $8l-3^{te}$ Glied der p^{ten} Reihe in der $p-2^{ten}$ Reihe als Summenglied entstanden ist; und allgemein, dafs das Glied, welches in der p^{ten} Reihe die Stelle $2^{t-1}2l-(2^{t-1}-1)=2^{t-1}(2l-1)+1$ einnimmt, in der Reihe $p-(t-1)$ als Summenglied entsteht. Ist also b das Glied, welches die Stelle $2^{t-1}(2l-1)+1$ einnimmt, a das vorhergehende und c das folgende, so hat man nach der Formel (4.):

$$(2t-1)b = a+c.$$

Es ist klar, dafs durch die Form $2^{t-1}(2l-1)+1$ *jede* ganze Zahl, und zwar nur auf eine einzige Weise dargestellt werden kann. Sobald mithin die Reihe p und die Stelle $2^k(2l-1)+1$ in dieser Reihe, in welcher eine Zahl vorkommt, gegeben ist, weifs man, dafs diese Zahl in der Reihe $p-k$ als Summenzahl entstanden ist. Auf den Werth von l kommt es hierbei nicht an.

Ist in einer Reihe die Gruppe $a, b, c,$ in einer andern die Gruppe α, β, γ enthalten, und steht α in derselben Stelle wie a, so hat man auch $\frac{\alpha+\gamma}{\beta}=\frac{a+c}{b}$.

5.

Es können nie zwei aufeinander folgende Glieder einer Reihe einen gemeinschaftlichen Faktor haben. Es seien a, b, c drei unmittelbar auf einander folgende Glieder. Hätten b und c einen gemeinschaftlichen Faktor, so müfsten, nach der Form (4.), auch a und b diesen Faktor gemeinschaftlich haben. und aus der Fortsetzung dieser Schlufsweise würde folgen, dafs *alle* Glieder der Reihe diesen Faktor enthalten müfsten; was nicht sein kann, da das erste Glied der Reihe $=1$ ist. Der früher bewiesene Satz (§. 3), dafs nicht zwei *gerade* Zahlen in der Reihe unmittelbar auf einander folgen können, ist also ein spezieller Fall dieses allgemeineren.

Ein Summenglied b kann also nur dadurch entstehen, dafs zwei Zahlen, welche relative Primzahlen zu b sind, zusammen addirt werden. Mit anderen Worten: *wenn in der Gruppe a, b, c die Zahl $b=a+c$ ist, so müssen a und c relative Primzahlen sein.*

6.

Eine und dieselbe Gruppe a, b kann nicht zugleich in zwei verschiedenen Reihen vorkommen. Man nehme zuerst an, es sei $a > b$, also a eine Summenzahl. Geht das Glied β dem a voraus, so ist $\beta < a$ und in der vorhergehenden Reihe findet sich die Gruppe β, b. Hier ist wieder entweder $\beta > b$ und es geht daher ein Glied $\beta' < \beta$ dem Gliede β voraus, oder es ist $\beta < b$, und es folgt dann auf b ein Glied $b' < b$. In der nächstvorhergehenden Reihe hat man also entweder die Gruppe β', β, oder die Gruppe b, b'. Man wird also jedenfalls, von einer zweigliedrigen Gruppe der vorhergehenden Reihe geführt, in welcher wenigstens das erste, oder das zweite Glied kleiner ist als das entsprechende Glied der Gruppe, von welcher man ausging. Setzt man dieses Verfahren fort, so mufs man zuletzt, nach einer bestimmten Zahl von Operationen, zu einer zweigliedrigen Gruppe kommen, in welcher entweder das erste, oder das zweite Glied der *Einheit* gleich ist. Man nehme nun an, die Gruppe a, b komme in der p^{ten} Reihe vor und man werde nach k Operationen zur Gruppe 1, β oder zur Gruppe β, 1 geführt, welche also zur $p-k^{\text{ten}}$ Reihe gehört. Die Gruppe 1, β kann nur am Anfang, die Gruppe β, 1 nur am Ende der Reihe stehen (und beide Gruppen müssen zugleich in der Reihe vorkommen). Fände sich nun die Gruppe a, b noch aufserdem in der q^{ten} Reihe, so müfste sich auch in der $q-k^{\text{ten}}$ Reihe die Gruppe 1, β am Anfang finden; was nicht sein kann. Dasselbe Resultat erhält man, wenn man $a < b$ voraussetzt.

Eine und dieselbe Gruppe a, b kann nicht zweimal in derselben Reihe vorkommen. Indem man sich der vorhergehenden Beweisführung bedient, läfst sich nämlich zeigen, dafs wenn in irgend einer Reihe eine zweigliedrige Gruppe doppelt vorkäme, dies auch in jeder vorhergehenden Reihe der Fall sein müfste, während doch in der ersten Reihe 1, 2, 1 keine solche Doppelgruppe existirt.

Eine bestimmte Gruppe a, b, kann also überhaupt *nicht mehr als einmal in der Entwickelung* (1, 1) *vorkommen.*

Es folgt zugleich hieraus, dafs in derselben Hälfte einer Reihe nicht irgend eine Gruppe a, b, und die umgekehrte b, a vorkommen kann, weil sonst in der zweiten Hälfte dieselben Gruppen vorkommen müfsten (§. 3.); sowie dafs nicht in einer Reihe die Gruppe a, b, und in einer anderen die Gruppe b, a, vorkommen kann.

7.

Aus dem Vorhergehenden ergeben sich unmittelbar folgende Sätze:

In keiner Reihe kann eine Summenzahl mehr als einmal auf dieselbe Weise gebildet werden. Ist z. B. b die Summe von a und c, so kann die Gruppe a, b, c nicht zweimal in derselben Reihe vorkommen. Ebenso folgt, dafs nicht in derselben Hälfte einer Reihe eine Summenzahl auf dieselbe und auf umgekehrte Weise gebildet werden kann, d. h. es können nicht in derselben Hälfte einer Reihe zugleich die zwei Gruppen a, b, c und c, b, a vorkommen. Auch kann nicht in zwei verschiedenen Reihen eine Summenzahl auf dieselbe oder auf umgekehrte Weise gebildet vorkommen.

Nun sind a und c relative Primzahlen (§. 5), man hat also den Satz:

Eine Zahl (die gröfser als die Einheit ist) kann *höchstens* so oft als Summenzahl vorkommen, als es kleinere Zahlen giebt, die zu ihr *Primzahlen* sind.

8.

In der Entwickelung (1, 1) *kommt jede ganze Zahl vor.* Denn die erste Reihe beginnt mit 1, 2; die zweite mit 1, 3; allgemein die $n-1^{\text{te}}$ mit 1, n.

In der Entwickelung (1, 1) *kommt jede Gruppe a, c vor, bei welcher a und c relative Primzahlen sind.* Da mit der Gruppe a, c jedenfalls die Gruppe c, a zugleich vorkommt, oder fehlt, so kann man immer $a > c$ setzen; im entgegengesetzten Falle hätte man nur die umgekehrte Gruppe zu betrachten. Man setze $a = kc + r$, wo $r < c$; kommt nun die Gruppe r, c in irgend einer Reihe vor, so mufs auch die Gruppe a, c vorkommen. Denn wenn in irgend einer Reihe die Gruppe r, c steht, so steht in der *ersten* folgenden die Gruppe $r+c, c$, in der *zweiten* folgenden die Gruppe $r+2c, c$, in der k^{ten} folgenden die Gruppe $r+kc, c$. Setzt man ferner $c = k'r + r'$, wo $r' < r$, so wird ebenso bewiesen, dafs wenn die Gruppe r', r vorkommt, auch die Gruppe c, r, mithin auch die Gruppe r, c und die Gruppe a, c vorkommen mufs. Geht man so fort, so kommt man zuletzt, da die Zahlen $r, r' \ldots$ immerfort abnehmen, an eine Zahl $r_n = 1$. Eine Gruppe, in welcher ein Glied der *Einheit* gleich ist, kommt aber nach dem Vorhergehenden immer vor, welches auch die ganze Zahl sei, die das andere Glied bildet, folglich mufs auch jede Gruppe a, c vorkommen, wenn a und c *relative Primzahlen* sind; käme sie nicht vor, so könnte auch eine

bestimmte zweigliedrige Gruppe nicht vorkommen, in welcher ein Glied der Einheit gleich wäre.

Verbindet man dieses mit §. 6, so hat man also den Satz:

In der Entwickelung (1, 1) *kommt jede Zahl so oft als Summenzahl vor, als es kleinere Zahlen giebt, die zu ihr relative Primzahlen sind.* Eine Primzahl p kommt mithin $p-1$ mal als Summenzahl vor.

9.

Die letzte Reihe, in welcher die Zahl n als Summenzahl vorkommt, ist die $n-1^{\text{te}}$, in keiner späteren kann sie als solche vorkommen.

Dafs sie in der $n-1^{\text{ten}}$ Reihe als Summenzahl vorkommt, ist klar, denn diese Reihe beginnt mit der Gruppe 1, n, $n-1$. Sie kann aber in keiner spätern Reihe als solche vorkommen. Fände sich in einer solchen die Gruppe a, n, b und $a+b=n$, so hätte man in der vorhergehenden Reihe entweder die Gruppe a, b, $b-a$ oder $a-b$, a, b; jedenfalls wäre in der Gruppe a, b, oder $a-b$, a *eine* Zahl kleiner als die entsprechende in der Gruppe a, n, und indem man auf diese Weise immer von Reihe zu Reihe zurückgeht, mufs man zuletzt auf die Gruppe 1, 1 kommen, von der man ausging. Das *langsamste* Verfahren zu dieser letzteren Gruppe zurückzukehren ist offenbar das, wenn man von 1, n zu 1, $n-1$, dann zu 1, $n-2$ u. s. w. zurückgeht. Und da man in diesem Falle doch nur durch $n-1$ Reihen zurückzugehen braucht, so mufs man, mit der Gruppe a, n anfangend, schon früher zu 1, 1 zurückkommen.

Bezeichnet $\varphi(n)$ die Anzahl der Zahlen, die kleiner als n und zu dieser *relative Primzahlen* sind, so folgt, dafs die $n-1^{\text{te}}$ Reihe die erste ist, in welcher die Zahl n $\varphi(n)$ mal vorkommt, und dafs sie in jeder folgenden Reihe ebenso oft vorkommt.

Die Zahl n kommt also nur dann und immer $n-1$ mal in der $n-1^{\text{ten}}$ Reihe vor, wenn n eine Primzahl ist. Hierin hätte man also ein neues, freilich in der Art, wie der *Wilson*'sche Satz, praktisch unbrauchbares Mittel, die *Primzahlen* von den *zusammengesetzten* zu unterscheiden.

10.

Da eine bestimmte Gruppe a, c nur in einer einzigen Reihe vorkommt so mufs es auch möglich sein, aus der Gruppe selbst zu finden, welcher Reihe sie angehört. Den Weg hierzu zeigt die Beweisführung in §. 8. Setzt man nemlich

$$\begin{aligned} a &= kc + r \\ c &= k'r + r' \\ r &= k''r' + r'' \\ &\cdots\cdots\cdots \\ r_{m-2} &= k_m . r_{m-1} + 1 \end{aligned}$$

so folgt, dafs die Gruppe a, c in der $(k+k'+k''\cdots+k_m)^{\text{ten}}$ Reihe nach derjenigen folgt, in welcher die Gruppe $1, r_{m-1}$ vorkommt, d. h. die Gruppe a, c kommt in der $(k+k'+k''\cdots+k_m+r_{m-1}-1)^{\text{ten}}$ Reihe vor. Nun ist

$$\frac{a}{c} = k + \cfrac{1}{k' + \cfrac{1}{k'' + \cdots + \cfrac{1}{k_m + \cfrac{1}{r_{m-1}}}}}.$$

Man hat also folgende Regel:

Um zu erfahren in welcher Reihe die Gruppe a, c vorkommt, verwandele man den Quotienten $\frac{a}{c}$ in einen Kettenbruch, die Summe der Theilnenner um eine Einheit vermindert giebt die Zahl der Reihe. Die Glieder der $p-1^{\text{ten}}$ Reihe sind also so beschaffen, dafs der Quotient je zweier aufeinanderfolgenden einen Kettenbruch giebt, bei welchem die Summe der Theilnenner $= p$ ist. Die fünfte Reihe z. B. beginnt mit

$$1, 6, 5, 9, 4, 11, 7 \ldots;$$

hier ist

$$\frac{6}{1} = 6,\ \frac{6}{5} = 1 + \frac{1}{5},\ \frac{9}{5} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}},\ \frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4},\ \frac{11}{4} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}$$

u. s. w.

Um zu erfahren, wie oft eine Zahl N in der Reihe p vorkommt, zerlege man daher N, so oft es geht, in zwei Theile a und c, die relative Primzahlen sind, und bilde aus $\frac{a}{c}$ einen Kettenbruch. Soviel solcher Kettenbrüche es giebt, bei welchen die Summe der Theilnenner nicht gröfser als p ist, so oft kommt N in der p^{ten} Reihe vor. Denn die Gruppe a, c kann spätestens in der $p-1^{\text{ten}}$ vorkommen, soviel solcher Gruppen aber in den vorhergehenden Reihen gebildet sind, so oft kommt N in einer folgenden vor.

Auch kann es keinen Kettenbruch geben, bei welchem die Summe der Theilnenner $= p$ ist, dessen reducirter Werth $\frac{a}{c}$ nicht als Gruppe a, c in

der $p-1^{\text{ten}}$ Reihe vorkäme. Ferner folgt, dafs zwei Gruppen a, c und α, γ, die zu verschiedenen Reihen gehören, niemals Kettenbrüchen entsprechen können, bei welchen die Summe der Theilnenner dieselbe ist.

11.

Bezeichnet $(m, n)_p$ die p^{te} Entwickelungsreihe (m, n) und das Symbol $(m, n)_p \pm (m', n')_p$ die Reihe, welche man erhält, wenn man die einzelnen in $(m', n')_p$ enthaltenen Glieder zu den gleichstelligen Gliedern von $(m, n)_p$ addirt oder davon abzieht, je nachdem das obere oder das untere Zeichen gilt, so hat man offenbar:

$$(m, n)_p \pm (m', n')_p = (m \pm m', n \pm n')_p,$$

und als speciellen Fall:

$$(5.) \quad (1, 2)_p - (1, 1)_p = (0, 1)_p.$$

Die Entwickelung $(0, 1)$ hat aber die Eigenthümlichkeit, dafs die erste Hälfte jeder Reihe $(0, 1)_{p+1}$ nichts Anderes ist, als die vorhergehende Reihe $(0, 1)_p$. So ist z. B. $(0, 1)_2 = 0, 1, 1, 2, 1$ und $(0, 1)_3 = 0, 1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1$, und es ist leicht zu sehen, dafs dies allgemein so sein mufs. Das k^{te} Glied in $(0, 1)_p$ ist also identisch mit dem k^{ten} Gliede in $(0, 1)_{p+1}$ und überhaupt mit dem k^{ten} Gliede aller Entwickelungsreihen $(0, 1)$, die nicht weniger als k Glieder haben. Ferner ist $(1, 2)_p$ nichts Anderes als die erste Hälfte der Reihe $(1, 1)_{p+1}$. Die Gleichung (5.) sagt also, dafs das k^{te} Glied in $(0, 1)_p$ die Differenz der k^{ten} Glieder in $(1, 1)_{p+1}$ und $(1, 1)_p$ ist. Setzt man aber in dieser Gleichung $p+1$ statt p, so folgt aus dem eben Gesagten, dafs auch die Differenz der k^{ten} Glieder in $(1, 1)_{p+2}$ und $(1, 1)_{p+1}$ dem k^{ten} Gliede in $(0, 1)_p$ gleich ist. Hieraus ergiebt sich also folgender Satz:

In den Entwickelungsreihen $(1, 1)$ *bilden die gleichstelligen Glieder eine arithmetische Progression, deren Differenz das gleichstellige Glied in der Entwickelung* $(0, 1)$ *ist.* Die Glieder z. B., welche in den Entwickelungsreihen $(1, 1)$ die *vierte* Stelle einnehmen, bilden die Progression 3, 5, 7, 9 ... Die Differenz ist $= 2$, wie die *vierte* Zahl in der Reihe 0, 1, 1, 2, 1 ...

Es ist klar, dafs ein Glied in $(1, 1)_p$ gröfser sein mufs, als das gleichstellige Glied in $(0, 1)_p$, das letzte Glied ausgenommen, welches in beiden Fällen $= 1$ ist. Bezeichnet man durch α, a und d beziehlich das k^{te} Glied in $(1, 1)_p$, $(1, 1)_{p+1}$ und $(0, 1)_p$, so hat man, wenn nicht $\alpha = d = 1$ ist,

$$a > d.$$

Nun ist, nach (Gleich. 5), $a - \alpha = d$, mithin $\alpha > \frac{1}{2}a$, d. h. ein Glied in der

Reihe $(1,1)_p$ ist immer gröfser als die Hälfte des gleichstelligen Gliedes der Reihe $(1,1)_{p+1}$, ausgenommen das letzte Glied in $(1,1)_p$, welches $=1$ und also gerade die Hälfte des entsprechenden Gliedes 2 in $(1,1)_{p+1}$ ist.

Sind β, γ die unmittelbar auf α folgenden Glieder, b, c die unmittelbar auf a, und e, f die unmittelbar auf d folgenden, so ist (§. 4):

$$\frac{\alpha+\gamma}{\beta} = \frac{a+c}{b} = \frac{\alpha+\gamma+d+f}{\beta+e},$$

also auch:

$$\frac{\alpha+\gamma}{\beta} = \frac{d+f}{e}.$$

12.

Mit Beibehaltung der vorhergehenden Bezeichnung kann man nun den Satz aussprechen: Es ist

$$(6.) \quad \alpha b - a\beta = 1.$$

Es ist leicht zu zeigen, dafs diese Gleichung allgemein richtig ist, wenn sie bis zu irgend einer Reihe gilt. Ist sie nemlich unter der Voraussetzung, dafs α zur p^{ten} Reihe gehört, richtig, so entsteht aus der Gruppe α, β, in dieser Reihe, die Gruppe α, σ, β, in der Reihe $p+1$, so dafs $\sigma=\alpha+\beta$, und aus der Gruppe a, b entsteht in der $p+2^{\text{ten}}$ Reihe die Gruppe a, s, b, wo $s=a+b$. Nach der Voraussetzung müssen also die Glieder a, s, b beziehlich dieselben Stellen einnehmen, wie die Glieder α, σ, β, und man hat offenbar $\alpha s - a\sigma = 1$ und $\sigma b - s\beta = 1$, sobald $\alpha b - a\beta = 1$ ist. Man überzeugt sich aber leicht, dafs der Satz bei den ersten Entwickelungsreihen (1, 1) wirklich Statt hat.

Hieraus folgt ferner, dafs auch

$$(7.) \quad \alpha e - \beta d = 1$$

ist, da $a=\alpha+d$; $b=\beta+e$. Es sind aber zugleich d und e die *kleinsten* zusammengehörenden Werthe, welche der Gleichung

$$\alpha x - \beta y = 1$$

Genüge leisten. Gäbe es noch kleinere x' und y', so hätte man $x'=e-k\beta$; $y'=d-k\alpha$, wo k irgend eine ganze positive Zahl wäre, mithin wäre $\alpha<d$; was nach §. 11 nicht sein kann.

13.

Ich gehe nun zur Entwickelung $(1,n)$ über, wo $n>1$ sein soll. Die k^{te} Entwickelungsreihe $(1,n)$ ist offenbar identisch mit dem Theile der $(n+k-1)^{\text{ten}}$ Entwickelungsreihe (1, 1), welcher die Glieder, von dem ersten

an bis zu dem ersten in dieser Reihe vorkommenden n, dieses eingeschlossen, umfafst, da dieser Theil aus den Elementen 1, n gebildet ist, mit welchen die $n-1^{te}$ Entwickelungsreihe $(1, 1)$ beginnt. Alle Eigenschaften der letzteren Entwickelungsreihen, welche einem solchen Theile zukommen, gelten also auch für die Entwickelung $(1, n)$, und umgekehrt. Namentlich ist also auch im gegenwärtigen Falle in jeder dreigliedrigen Gruppe die Summe der äufseren Glieder durch das mittlere theilbar; es können nicht zwei aufeinander folgende Glieder einen gemeinschaftlichen Faktor haben, und es kann eine bestimmte zweigliedrige Gruppe nicht mehr als einmal vorkommen. Da n *mindestens* $=2$ ist, also die Entwickelung $(1, n)$ *höchstens* die erste Hälfte der Entwickelung $(1, 1)$ umfafst, so kann auch bei der ersteren Entwickelung nicht zugleich eine Gruppe und die umgekehrte in derselben Reihe vorkommen; auch nicht eine Gruppe in einer, und die umgekehrte in einer anderen Reihe (§. 6).

Hier hat jede Reihe das Anfangsglied 1, das Mittelglied $1+n$, das Endglied n. Die übrigen Glieder sind sämmtlich in der Form $k+ln$ enthalten; die symmetrischen Glieder (§. 1) haben hier die Form $k+ln$ und $l+kn$. Es kann aber kein Glied von der Form $k+kn$ vorkommen, wenn es nicht das Mittelglied, also $k=1$ ist; denn nur bei der Bildung des Mittelgliedes concurriren die Elemente 1 und n auf gleiche Weise. Bei den Gliedern aber, welche zwischen 1 und $1+n$ gebildet werden, überwiegt das erste Argument $=1$ ebenso, wie bei den Gliedern welche zwischen $1+n$ und n gebildet werden, das zweite. Hieraus folgt, dafs die symmetrischen Glieder nicht gleich sein können, denn wäre $k+ln=l+kn$, so müfste $k=l$ sein. In der ersten Hälfte der Reihe ist immer $k>l$, in der zweiten $l>k$, das Mittelglied ausgenommen.

Das Anfangsglied ausgenommen, enthalten die Glieder keine Zahl, welche kleiner als n ist, dagegen kommen alle Zahlen vor, welche gröfser als n sind, da die auf das Anfangsglied folgenden Glieder in der 1ten, 2ten Reihe u. s. w. $1+n$, $2+n$ u. s. w. sind.

14.

Die *ersten* Coefficienten (§. 1) der Glieder der Reihe $(1, n)_p$, bis zum Mittelgliede, bilden eine Reihe, die mit $(1, 1)_{p-1}$ dentisch ist, die *zweiten* Coefficienten dieser Glieder bilden eine Reihe, die mit $(0, 1)_{p-1}$ identisch ist. Entwickelt man die ersten Reihen

$1,\ 1+n,\ n$

$1,\ 2+n,\ 1+n,\ 1+2n,\ n$

$1,\ 3+n,\ 2+n,\ 3+2n,\ 1+n,\ 2+3n,\ 1+2n,\ 1+3n,\ n,$

so zeigt sich, dafs die ersten Coefficienten, bis zum Mittelgliede genommen, die Reihen

$$1,\ 1 = (1,1)_0$$
$$1,\ 2,\ 1 = (1,1)_1$$
$$1,\ 3,\ 2,\ 3,\ 1 = (1,1)_2$$

geben, die zweiten Coefficienten dagegen die Reihen

$$0,\ 1 = (0,1)_0$$
$$0,\ 1,\ 1 = (0,1)_1$$
$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1 = (0,1)_2,$$

und man sieht leicht, dafs das allgemein gelten mufs. Da nemlich die Glieder bis zum Mittelgliede aus den Elementen $1,\ 1+n$ gebildet werden, so heifst das, ihre ersten Coefficienten werden aus 1, 1, und ihre zweiten aus 0, 1 gebildet. Während aber die Gruppen 1, 1 und 0, 1 beziehlich die *nullte* Reihe der Entwickelung (1, 1) und (0, 1) bilden, so erscheinen sie hier als erste und zweite Coefficienten in der *ersten* Reihe; und so geht es weiter.

Dieselbe Erwägung zeigt, dafs vom Mittelgliede an bis zum Endgliede, die *ersten* Coefficienten eine mit $(1,0)_{p-1}$ identische Reihe, d. h. eine Reihe, welche die Glieder der Reihe $(0,1)_{p-1}$ in umgekehrter Ordnung enthält, bilden, die *zweiten* Coefficienten dagegen eine mit $(1,1)_{p-1}$ identische Reihe.

Hieraus folgt nun unmittelbar, dafs wenn eine Gruppe aus den zwei Gliedern $k+ln$ und $k'+l'n$ besteht, die Gleichung

$$(8.)\qquad kl'-k'l = 1$$

Statt findet, da hier $k,\ k',\ l,\ l'$ beziehlich an die Stelle von $\alpha,\ \beta,\ d,\ e,$ in der Gleichung (7.) treten. Es sind also l und l' die kleinsten Werthe, welche dieser Gleichung genügen, und mithin gegeben, sobald k und k' gegeben sind. Da $k,\ k',\ l$ und l' keinen gemeinschaftlichen Faktor haben können, so kann in der Entwickelung $(1, n)$ kein Glied von der Form $hk+h'kn$ vorkommen.

15.

Da $k,\ k'$ irgend eine Gruppe aus der Entwickelung (1, 1) bedeutet, so folgt aus §. 8, dafs diese Gruppe alle möglichen Zusammenstellungen zweier

relativen Primzahlen ausdrückt, und aus §. 6, dafs jede solche Zusammenstellung *nur einmal* vorkommt. Hieraus folgt weiter, dafs in der Entwickelung $(1, n)$ alle Zahlen von der Form $K+Ln$ vorkommen müssen, wenn K und L relative Primzahlen sind, und zwar, insofern K und L *bestimmte* Zahlen sind, jede nur einmal als Summenglied. Da die Glieder $K+Ln$ und $L+Kn$ jedenfalls zugleich vorkommen, oder nicht vorkommen, so kann man immer denjenigen dieser zwei Ausdrücke betrachten, bei welchem der erste Coefficient gröfser ist als der zweite. Ich setze daher $K>L$. Man suche nun die kleinsten Werthe, welche der Gleichung $Kx-Ly=1$ genügen; sie seien $x=L_0$, $y=K_0$, also sind auch L_0 und L die kleinsten Werthe, welche der Gleichung $Kx-K_0y=1$ genügen. Da K und K_0 relative Primzahlen sind, so mufs es jedenfalls eine Gruppe in der Entwickelung (m, n) geben, bei welcher die ersten Coefficienten K und K_0 sind; dann müssen aber nach der Gleichung (8.) die zweiten Coefficienten L und L_0 sein, d. h. es giebt ein Glied $K+Ln$.

Es kann aber ein solches Glied nur einmal als Summenglied gebildet werden. Man nehme an, die beiden Stammglieder seien $k+ln$ und $k'+l'n$, so dafs also in irgend einer Reihe die Glieder $k+ln$, $K+Ln$, $k'+l'n$ auf einander folgen. Mithin ist

$$K=k+k'; \qquad L=l+l'$$

und

$$(k+k')l'-(l+l')k'=1$$

so dafs l' und k' die kleinsten Werthe sind, welche der Gleichung

$$(9.) \quad (k+k')x-(l+l')y=1$$

Genüge leisten. Gäbe es nun noch eine andere Gruppe $\varkappa+\lambda n$, $K+Ln$, $\varkappa'+\lambda'n$, so dafs $K=\varkappa+\varkappa'$, $L=\lambda+\lambda'$ wäre, so hätte man auch

$$(\varkappa+\varkappa')\lambda'-(\lambda+\lambda')\varkappa'=(k+k')\lambda'-(l+l')\varkappa'=1$$

und es wären λ' und $\varkappa'$ die kleinsten Werthe, die der Gleichung (9.) genügen. Mithin $l'=\lambda'$ $k=\varkappa'$, $k=\varkappa$, $l=\lambda$, d. h. die Gruppe $k+ln$, $k'+l'n$ käme *doppelt* vor, was nicht sein kann (§. 13).

16.

Nun wurde schon früher nachgewiesen, dafs jede Zahl N, die gröfser als n ist, in der Entwickelung $(1, n)$ vorkommen mufs. Nach dem Vorhergehenden können wir also sagen, dafs eine jede solche Zahl $N>n$ so oft

vorkommt, als es möglich ist, der Gleichung

$$(10.)\qquad K+Ln = N$$

so zu genügen, dafs K und L ***relative Primzahlen*** sind. Dies kann man auch auf eine andere Weise ausdrücken.

Es seien zuerst N und n relative Primzahlen; hat man dann einen Ausdruck $K+Ln$ gefunden, welcher $=N$ ist, und ist zugleich L Primzahl zu N, so mufs auch K Primzahl zu N sein. Soviel Zahlen L es also giebt, welche kleiner als $\frac{N}{n}$ und zu N relative Primzahlen sind, so oft kann die Gleichung (10.) erfüllt werden; d. h. die Zahl N kommt in der Entwickelung $(1, n)$ so oft vor, als es Zahlen zwischen 0 und $\frac{N}{n}$ giebt, die ***relative Primzahlen*** zu N sind.

Haben N und n den gröfsten gemeinschaftlichen Faktor f, so mufs, wenn $K+Ln=N$ sein soll, auch K diesen Faktor enthalten. Man setze daher $K=fK'$, $n=fn'$, $N=fN'$, so ist $K'+Ln'=N'$. Ist L eine relative Primzahl zu N', so mufs auch K' relative Primzahl zu N' und mithin auch K' relative Primzahl zu L sein. Die letzte Gleichung wird also so oft mit der Bedingung, dafs K' und L' relative Primzahlen sind, erfüllt, als es Zahlen $L<\frac{N'}{n'}$ d. h. $L<\frac{N}{n}$ giebt, welche relative Primzahlen zu N' sind. Soll aber zugleich der Gleichung (10.) genügt werden, so mufs L auch relative Primzahl zu N sein. Man hat mithin auch in diesem Falle die Regel, dafs N so oft vorkommt, als es Zahlen zwischen 0 und $\frac{N}{n}$ giebt, welche relative Primzahlen zu N sind.

Nach einer früheren Bemerkung (§. 13) kann man auch sagen, dafs die Zahl N in der Entwickelung $(1, 1)$ so oft zwischen dem Anfangsgliede und dem ersten Gliede, welches den Werth n hat, vorkommt, als es Zahlen zwischen 0 und $\frac{N}{n}$ giebt, die relative Primzahlen zu N sind.

17.

Nach dem Vorhergehenden erledigt sich nun von selbst die Entwickelung $(n, 1)$, indem die Reihen dieselben Glieder enthalten, wie die entsprechenden Reihen der Entwickelung $(1, n)$; nur in umgekehrter Ordnung. Ich gehe daher sogleich zu dem allgemeinsten Falle über, nemlich zur Entwickelung (m, n). Ich setze aber hierbei voraus, dafs m und n keinen gemeinschaftlichen Faktor haben; wäre nemlich ihr gröfster gemeinschaftlicher

Faktor $=p$, und zwar $m=pm'$, $n=pn'$, wären also m' und n' relative Primzahlen, so brauchte man nur die Entwickelung (m', n') zu betrachten; multiplicirte man dann jedes Glied dieser Entwickelung mit p, so hätte man die gesuchte Entwickelung (m, n).

In der Entwickelung $(1, 1)$ kommt irgendwo, wie früher bewiesen, die Gruppe m, n vor; mithin kann man auch die Entwickelung (m, n) als Bruchstück der Entwickelung $(1, 1)$ ansehen. Alle diesem Bruchstücke zukommenden Eigenschaften gelten also auch für die Entwickelung (m, n), und umgekehrt.

Zu den schon in §. 1 entwickelten Eigenschaften der Reihe (m, n) setze ich zunächst noch Folgendes hinzu. Die symmetrischen Glieder können *nicht gleich* sein, da kein Glied von der Form $km+kn$ vorkommen kann, sobald $k>1$ ist, was ebenso bewiesen wird, wie es bei der Entwickelung $(1, n)$ geschah (§. 13). Ferner läfst sich ebenso wie dort (§. 14) zeigen, dafs die ersten Coefficienten der Entwickelung $(m, n)_p$ bis zu dem Mittelgliede, eine mit $(1, 1)_{p-1}$, die zweiten Coefficienten eine mit $(0, 1)_{p-1}$ identische Reihe bilden. Hier kommen aber nicht, wie in der Entwickelung $(1, n)$ *alle* Zahlen vor die über einer gewissen Grenze liegen, sondern nur solche, die in der Form $km+ln$ enthalten sind. Es kommen aber alle in dieser Form enthaltenen Zahlen, bei welchen k und l relative Primzahlen sind, und zwar jede nur *einmal*, als Summenzahl vor, während solche Zahlen, wo k und l einen gemeinschaftlichen Faktor haben, nicht vorkommen können; was ebenso wie bei der Entwickelung $(1, n)$ bewiesen wird. Mithin kommt jede Zahl N so oft in der Entwickelung (m, n) vor, als es möglich ist, sie in der Form $km+ln$ darzustellen, so dafs k und l relative Primzahlen sind, und es läfst sich daher die Anzahl der Darstellungen der Zahl N auf eine einfache Weise ausdrücken.

Ich mufs, um dies nachzuweisen, einige Worte über die Auflösung der Gleichung

$$(11.)\quad mx+ny = c$$

einschalten, wo sowohl $m, n,$ als $x, y,$ *ganze positive* Zahlen sein sollen. Hier sind m und n, der Voraussetzung gemäfs, ***relative Primzahlen.*** Man löse nun zuerst die Gleichung

$$nx-my = 1$$

auf. Es seien $x=m_0$ und $y=n_0$ die kleinsten zusammengehörenden Werthe, welche dieser Gleichung genügen. Man bilde alsdann die zwei Brüche $\frac{m_0}{m}c$

und $\frac{n_0}{n}c$, von welchen der erste der gröfsere ist und bezeichne bezieblich durch $E\left(\frac{m_0}{m}c\right)$ und $E\left(\frac{n_0}{n}c\right)$ die gröfste in denselben enthaltene ganze Zahl. Die sämmtlichen Auflösungen der Gleichung (11.) erhält man dann durch die Formel

$$x = nc_0 - n_0 c; \quad y = m_0 c - mc_0$$

wo c_0 jede ganze Zahl bezeichnet, welche gröfser als $\frac{n_0}{n}c$ und kleiner als $\frac{m_0}{m}c$ ist, so dafs man allmälig

$$c_0 = E\left(\frac{n_0}{n}c\right)+1, \quad E\left(\frac{n_0}{n}c\right)+2, \quad \ldots$$

zu setzen hat; wo als letzter Werth von c_0 entweder $E\left(\frac{m_0}{m}c\right)$ oder $E\left(\frac{m_0}{m}c\right)-1$ zu nehmen ist, je nachdem $\frac{m_0}{m}c$ ein Bruch oder eine ganze Zahl ist. Je nachdem $\frac{m_0}{m}c$ ein Bruch oder eine ganze Zahl ist, ist also die Anzahl der Auflösungen der Gleichung (11.) entweder

$$E\left(\frac{m_0}{m}c\right)-E\left(\frac{n_0}{n}c\right) \quad \text{oder} \quad E\left(\frac{m_0}{m}c\right)-E\left(\frac{n_0}{n}c\right)-1.$$

Dafs nemlich diese Werthe von x und y der Gleichung (11.) genügen, zeigt die unmittelbare Substitution; sollen sie aber zugleich positiv sein, so ist es nothwendig und hinreichend, dafs $c_0 > \frac{n_0}{n}c$ und $c_0 < \frac{m_0}{m}c$.

Ist nun noch aufserdem die Bedingung gestellt, dafs x und y relative Primzahlen sein sollen, so darf man nur solche Werthe für x und y setzen, bei welchen c und c_0 relative Primzahlen werden. Sind umgekehrt c und c_0 relative Primzahlen, so müssen auch x und y relative Primzahlen sein. Aus den Werthen von x und y folgt nemlich

$$m_0 x + n_0 y = c_0.$$

Hätten nun x und y den gemeinschaftlichen Factor f, so müfste dieser auch in c_0 und mithin auch in c enthalten sein. Sobald also x und y relative Primzahlen sein sollen, hat die Gleichung (11.) so viel Auflösungen, als es ganze Zahlen zwischen $\frac{n_0}{n}c$ und $\frac{m_0}{m}c$ giebt, welche relative Primzahlen zu c sind.

18.

Da die Zahl N so oft als Summenzahl in der Entwickelung (m, n) vorkommt, als es möglich ist, der Gleichung

$$mk + nl = N$$

durch Werthe von k und l zu genügen, welche relative Primzahlen sind, so folgt aus dem Vorhergehenden unmittelbar, dafs diese Zahl so oft vorkommt, als es relative Primzahlen zu N zwischen $\frac{n_0}{n}N$ und $\frac{m_0}{m}N$ giebt; insofern, wie früher, m_0 und n_0 die kleinsten Lösungen der Gleichung $nm_0 - mn_0 = 1$ bedeuten. Dies ist einer der *Eisenstein*schen Sätze.

Ist $m = 1$, so ist auch $m_0 = 1$ und $n_0 = n - 1$; die Zahl N kommt demnach in der Entwickelung $(1, n)$ so oft als Summenzahl vor, als es relative Primzahlen zu N zwischen $\frac{n-1}{n}N$ und N giebt. Da aber jeder relativen Primzahl α eine andere $N - \alpha$ entspricht, so dafs $N - \alpha$ zwischen Null und $\frac{N}{n}$ liegt, wenn α zwischen $\frac{n-1}{n}N$ und N liegt, so kann man auch sagen, dafs die Zahl N so oft vorkommt, als es relative Primzahlen zu ihr zwischen Null und $\frac{N}{n}$ giebt, wie es früher in §. 16 angegeben wurde. Die allgemeine Regel umfafst zugleich den Fall, wenn $m = n = 1$; denn alsdann ist $m_0 = 2$, $n_0 = 1$. Die Zahl N kommt also in der Entwickelung $(1, 1)$ so oft als Summenzahl vor, als es relative Primzahlen zu ihr zwischen N und $2N$, d. h. also, zwischen 0 und N, giebt, was mit der früheren Regel (§. 8) übereinstimmt.

19.

Setzt man noch immer

$$mk + ln = N$$

und bezeichnet irgend welche der Zahlen die zwischen $\frac{n_0}{n}N$ und $\frac{m_0}{m}N$ liegen und zu N Primzahlen sind, durch N_0, so ist (§. 17):

$$k = nN_0 - n_0 N; \qquad l = m_0 N - mN_0.$$

Ist $k'm + l'n$, $k''m + l''n$ die Gruppe durch deren Summation N entstanden ist, so hat man

$$m(k' + k'') + n(l' + l'') = N.$$

Multiplicir man diese Gleichung mit k'' und berücksichtigt die Gleichung

$$k'l'' - k''l' = 1,$$

so findet sich:

$$(k' + k'')k''m + (k' + k'')l''n - n = k''N,$$

d. h.

$$(k' + k'')(k''m + l''n) \equiv n \pmod{N}$$

oder

$$\frac{k'+k''}{n}(k''m+l''n) \equiv 1 \quad (\text{mod. } N).$$

Aus

$$k = nN_0 - n_0N$$

folgt aber

$$N_0 \equiv \frac{k'+k''}{n} \quad (\text{mod. } N)$$

also auch

$$N_0(k''m+l''n) \equiv 1 \quad (\text{mod. } N).$$

Nun wurde vorausgesetzt, dafs man die dreigliedrige Gruppe

$$k'm+l'n, \quad N, \quad k''m+l''n$$

hat, mithin ist die unmittelbar auf N folgende Zahl der Werth von $\frac{1}{N_0}$ (mod. N).

Dies ist ein zweiter Satz von *Eisenstein*, zunächst für den Fall bewiesen, wenn N eine Summenzahl ist; woraus sich aber dann von selbst ergiebt, dafs er allgemein gültig ist. Denn aus der dreigliedrigen Gruppe, in welcher das Mittelglied N Summenzahl ist, entsteht in jeder folgenden Reihe eine Gruppe α, N, β, wo $\alpha = k'm+l'n+sN$ und $\beta = k''m+l''n+tN$ sein mufs, also $\beta \equiv k''m+l''n$ (mod. N).

Da $k'm+l'n \equiv -(k''m+l''n)$ (mod. N) ist, so läfst sich auch sagen, dafs die Zahl, welche dem N unmittelbar vorausgeht, der Werth von $-\frac{1}{N_0}$ (mod. N) ist, also $(k'm+l'n)(N-N_0) \equiv 1$ (mod. N). Mithin ist, nach dem bekannten Kunstausdrucke (Disq. ar. 77), N_0 der numerus socius von $k''m+l''n$ und $N-N_0$ der numerus socius von $k'm+l'n$.

20.

Nach §. 16 kommt in der Entwickelung (1, 2) jede Zahl N so oft als Summenzahl vor, als es relative Primzahlen zu ihr zwischen 0 und $\frac{N}{2}$ giebt. Die der Zahl unmittelbar vorausgehenden und folgenden Zahlen bilden also das vollständige Restsystem der relativen Primzahlen zum Modulus N. Nun ist hier $m = 1$, $n = 2$, also $m_0 = 1$, $n_0 = 1$, und es bedeutet daher N_0 jede relative Primzahl zu N zwischen $\frac{N}{2}$ und N. Mithin $N_0 > \frac{N}{2}$, $N-N_0 < \frac{N}{2}$, es folgen daher auf N die Zahlen, deren numerus socius gröfser als $\frac{N}{2}$ ist, während die Zahlen, deren numerus socius kleiner als $\frac{N}{2}$ ist, der Zahl N vorausgehen. Dies ist der letzte *Eisenstein*sche Satz.

Nach dem Vorhergehenden ist es leicht ihn zu verallgemeinern. Die Entwickelung (1, 1) stimmt in der ersten Hälfte jeder Reihe mit der Entwickelung (1, 2) zusammen; in der zweiten Hälfte kommen alle Glieder in umgekehrter Ordnung vor. Demnach bilden in der Entwickelung (1, 1) sowohl die N unmittelbar vorausgehenden, wie die unmittelbar folgenden Zahlen, das ganze Restsystem der relativen Primzahl zum Modulus N, und zwar in der Weise, dafs eine vorausgehende Zahl in der ersten oder zweiten Hälfte der Reihe vorkommt, je nachdem ihr numerus socius kleiner oder gröfser als $\frac{N}{2}$ ist, während bei den nachfolgenden Zahlen das umgekehrte Verhältnifs Statt findet.

Dies führt zugleich zur Beantwortung einer in diesem Gebiete nicht uninteressanten Frage. Da nemlich früher bewiesen wurde, dafs in der Entwickelung (1, 1) jede Gruppe a, b zugleich mit der umgekehrten b, a in irgend einer Reihe vorkommt, sobald a und b relative Primzahlen sind, und zwar nur einmal, so kann man fragen, wie sich entscheiden lasse, ob die Gruppe a, b in der ersten, oder in der zweiten Hälfte der Reihe vorkommt? Die Antwort lautet: das erstere oder das letztere wird Statt finden, je nachdem der numerus socius von a nach dem Modulus $a+b$ kleiner oder gröfser als $\frac{a+b}{2}$ ist. Dies in Verbindung mit §. 10 zeigt also, dafs sich für jede gegebene Gruppe a, b bestimmen läfst, nicht blofs in welcher Reihe, sondern zugleich in welcher Hälfte der Reihe sie vorkommt.

Bei der Entwickelung $(1, n)$ ist, wie schon bemerkt (§. 18), $m_0 = 1$, $n_0 = n-1$; also liegt N_0 zwischen $\frac{n-1}{n}N$ und N; die zu N relativen Primzahlen stehen also unmittelbar vor oder nach N, je nachdem ihr numerus socius kleiner oder gröfser als $\frac{N}{n}$ ist, im letzteren Falle sind sie zugleich gröfser als $\frac{n-1}{n}N$. Umgekehrt verhält es sich natürlich bei der Entwickelung $(n, 1)$.

Bei der allgemeinen Entwickelung (m, n) liegt N_0 zwischen den Grenzen $\frac{n_0}{n}N$ und $\frac{m_0}{m}N$. Man hat also folgende allgemeine, die früheren speciellen Fälle zugleich umfassende Regel: die zu N relativen Pimzahlen, deren numerus socius zwischen $\frac{n_0}{n}N$ und $\frac{m_0}{m}N$ liegt, folgen unmittelbar auf N, dagegen

gehen diejenigen unmittelbar voraus, deren numerus socius zwischen $\left(\frac{m-m_0}{m}\right)N$ und $\left(\frac{n-n_0}{n}\right)N$ liegt.

21.

Zum Abschlufs dieses Theils der Untersuchung soll noch gezeigt werden, wie sich finden läfst, in welcher Entwickelungsreihe (m, n) das Glied $km+ln$ als Summenglied gebildet wird; was, wie in (§. 15) bewiesen wurde, nur in einer bestimmten Reihe Statt hat. Je nachdem $k>l$ oder $k<l$ kommt dieses Glied in der ersten oder zweiten Hälfte der Reihe vor (§. 13). Man setze zuerst $k>l$ und nehme an, dafs $km+ln$ die Summe des vorhergehenden Gliedes $k'm+l'n$ und des folgenden $k''m+l''n$ ist. Es ist also

$$k'l-kl' = 1,$$
$$k''l-kl'' = -1,$$

und zwar sind in der ersten Gleichung k' und l' in der zweiten k'' und l'' die kleinsten zusammengehörenden Werthe, welche diesen Gleichungen genügen. Es sei $\frac{k}{l}$ der Werth des Kettenbruchs $a+\cfrac{1}{a_1+\cdots+\cfrac{1}{a_{m-1}+\cfrac{1}{a_m}}}$ und $\frac{k_0}{l_0}$ der unmittelbar vorhergehende Näherungswerth, mithin

$$k_0l-kl_0 = -1$$

und k_0, l_0 die kleinsten dieser Gleichung genügenden Werthe. Gilt daher das obere Zeichen, so setze man $k'=k_0$ und $l'=l_0$, folglich $k''=k-k_0$, $l''=l-l_0$, gilt dagegen das untere, so ist $k''=k_0$, $l''=l_0$ und $k'=k-k_0$, $l'=l-l_0$. Da hiernach k' und k'' bekannt sind, so hat man nur zu fragen, in welcher Reihe diese Gröfsen als erste Coefficienten zweier auf einander folgender Glieder vorkommen; ist diese Reihe gefunden, so weifs man, dafs in der nächstfolgenden $km+ln$ als Summenglied vorkommt. Nun bilden die ersten Coefficienten der Reihe $(m, n)_p$ bis zum Mittelgliede dieselbe Reihe wie $(1, 1)_{p-1}$ (§. 17); man hat also nur zu fragen, in welcher Entwickelungsreihe $(1, 1)$ die Gruppe k', k'' vorkommt. Dies findet sich aber, indem man den Quotienten $\frac{k'}{k''}$ in einen Kettenbruch verwandelt und die um eine Einheit verminderte Summe der Theilnenner nimmt (§. 10). Ist also diese Summe p, so kommen k', k'' als erste Coefficienten zweier auf einander folgender Glieder in der Reihe $(m, n)_p$ vor, und mithin das Glied $km+ln$ in der Reihe $(m, n)_{p+1}$.

Da $\frac{k'}{k''}$ entweder $\frac{k_0}{k-k_0}$ oder $\frac{k-k_0}{k_0}$ ist, und die Summe der Theilnenner des entsprechenden Kettenbruchs dieselbe bleibt, welchen dieser zwei Brüche man in einen Kettenbruch entwickeln mag, so kann man sich immer an den letzteren Bruch halten. Da aber

$$\frac{k-k_0}{k_0} = a_m - 1 + \cfrac{1}{a_{m-1} + \cdots + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a}}}$$

ist, so mufs

$$a + a_1 + \cdots + a_{m-1} + a_m - 1 = p$$

oder

$$a + a_1 + \cdots + a_{m-1} + a_m = p + 1$$

sein. Man hat also folgende einfache Regel:

Um zu erfahren in welcher Entwickelungsreihe (m, n) das Glied $km + ln$ vorkommt, verwandle man $\frac{k}{l}$ in einen Kettenbruch, und berechne die Summe der Theilnenner, dies ist die gesuchte Zahl.

Im Vorhergehenden wurde $k > l$ angenommen, wäre $k < l$, so käme das Glied $km + ln$ in der zweiten Hälfte der Reihe vor, dann müfste in der ersten Hälfte das Glied $lm + kn$ vorkommen, und um die Reihe zu finden, in welcher das letztere Glied sich befindet, hätte man $\frac{l}{k}$ in einen Kettenbruch zu verwandeln; da es aber in Beziehung auf die Summe der Theilnenner vollkommen gleichgültig ist, wenn man statt dessen $\frac{k}{l}$ in einen Kettenbruch verwandelt, so bleibt die Regel dieselbe wie im vorhergehenden Falle.

Es folgt hieraus der Satz, dafs das Glied $km + ln$ in der Reihe (m, n) als Summenglied erscheint, wenn die Gruppe k, l in der Reihe $(1, 1)_{p-1}$ steht, was sich auch schon daraus ergiebt, dafs diese Summe $= k + l$ wird, wenn $m = n = 1$ ist.

Da die *geraden* Glieder in jeder Reihe Summenglieder sind, so hat man auch noch den Satz:

Wenn man die Quotienten des ersten und zweiten Coefficienten jedes geraden Gliedes in der Entwickelung $(m, n)_p$ in einen Kettenbruch verwandelt, so giebt die Summe der Theilnenner in allen diesen Kettenbrüchen denselben Werth p.

22.

Es läfst sich nun ohne Schwierigkeit die Funktion finden, welche folgenden drei Bedingungsgleichungen genügen soll, nemlich

$$(a.)\quad f(m,n) = f(m,m+n)+f(m+n,n)\quad \text{wenn } m+n<\lambda,$$

$$(b.)\quad f(m,n) = n\quad \text{wenn } m+n=\lambda,$$

$$(c.)\quad f(m,n) = 0\quad \text{wenn } m+n>\lambda,$$

wo m und n *ganze positive* Zahlen sind und λ eine *ungerade Primzahl* ist. Es wird hierbei zunächst vorausgesetzt, dafs m und n *relative Primzahlen* sind.

Entwickelt man $f(m,n)$ nach der Gleichung (a.), so findet sich

$$\begin{aligned} f(m,n) &= f(m,m+n)+f(m+n,n) \\ &= f(m,2m+n)+f(2m+n,m+n)+f(m+n,m+2n)+f(m+2n,n) \end{aligned}$$

u. s. w.

Schreibt man hier die in jeder Reihe unter dem Funktionszeichen vorkommenden Ausdrücke in der Ordnung, wie sie auf einander folgen, nebeneinander, indem man jedoch zwei unmittelbar auf einander folgende Glieder, welche dieselbe Form haben, nur einmal setzt, so erhält man

$$m,\ n$$
$$m,\ m+n,\ n$$
$$m,\ 2m+n,\ m+n,\ m+2n,\ n$$

u. s. w.

d. h. man erhält die Entwicklungsreihen (m,n). Umgekehrt kann man also aus diesen Entwickelungsreihen die Entwickelung von $f(m,n)$ ableiten, indem man sich alle Glieder, das erste und letzte abgerechnet, doppelt geschrieben vorstellt, dann je zwei auf einander folgende Glieder unter das Funktionszeichen setzt, und endlich alle hieraus entstehenden Ausdrücke addirt.

Dies gilt aber nur so lange, als es überhaupt noch erlaubt ist, die Funktion $f(m,n)$ nach der Gleichung (a.) zu entwickeln. Sobald man an eine Entwickelung gekommen ist, in welcher ein Ausdruck $f(km+ln,k'm+l'n)$ sich zeigt, so dafs $(k+k')m+(l+l')n=\lambda$ ist, darf derselbe natürlich nicht mehr weiter nach (a.) entwickelt werden, da er vielmehr $=(l+l')n$ ist. Ist

aber $(k+k')m+(l+l')n > \lambda$, so mufs der correspondirende Ausdruck $f(km+ln, km+l'n) = 0$ gesetzt werden, damit den Bedingungsgleichungen (b.) und (c.) entsprochen werde.

Man kann aber jedenfalls, vermöge der Bedingungsgleichung (a.), die Entwickelung von $f(m, n)$ so weit treiben, bis man entweder an einen Ausdruck $f(km+ln, k'm+l'n)$ kommt, der den Werth $(l+l')n$ hat, weil $(k+k')m+(l+l')n = \lambda$, oder an einen Ausdruck von dieser Form, der $= 0$, also ganz unbeachtet zu lassen ist, weil $(k+k')m+(l+l')n > \lambda$. Der Werth von $f(m, n)$ ist also ein vollkommen bestimmter.

Es sollen auch hier die Gröfsen m, n die *Argumente* der Funktion $f(m, n)$ heifsen. Man betrachte nun zunächst den einfachsten Fall, wenn $m = 1$, $n = 2$. Da λ eine Primzahl ist, so wird solche in der Entwickelung $(1, 2)$ so oft gebildet, als es ganze Zahlen zwischen Null und $\frac{1}{2}\lambda$ giebt (§. 16). Jedesmal also, wenn man in der Entwickelung $(1, 2)$ an eine Gruppe α, $\lambda-\alpha$ kommt, hat man, dieser entsprechend, in der Entwickelung von $f(1, 2)$ statt $f(\alpha, \lambda-\alpha)$ den Werth $\lambda-\alpha$ zu setzen. Eine jede solche Gruppe kommt aber nur *einmal* vor (§. 13). Bezeichnet man daher die übrigen Gruppen in der Entwickelung $(1, 2)$, bei welchen die Summe der zwei Glieder der Gruppe $= \lambda$ ist, durch α', $\lambda-\alpha'$; α'', $\lambda-\alpha''$; u. s. w., so mufs

$$f(1, 2) = \lambda-\alpha+\lambda-\alpha'+\lambda-\alpha''+\cdots$$

sein, da die übrigen Funktionen, welche noch in der Entwickelung $f(1, 2)$ vorkommen können, so beschaffen sein müssen, dafs die Summe ihrer Argumente gröfser als λ ist, mithin diese Funktionen $= 0$ sind.

Also z. B. wenn man den Werth von $f(1, 2)$ für den Modulus $\lambda = 5$ sucht, so hat man, der Reihe 1, 3, $2 = (1, 2)$ entsprechend:

$$f(1, 2) = f(1, 3)+f(3, 2) = f(1, 3)+2.$$

Jetzt kann man in der Reihe 1, 3, 2 die Zahl 2 ganz weglassen; aus 1, 3 folgt die weitere Entwickelung 1, 4, 3, also $f(1, 3) = f(1, 4)+f(4, 3) = 4$, mithin $f(1, 2) = 6$ oder, wenn man nur den Rest nach dem Modulus 5 berücksichtigt, $f(1, 2) = 1$. Sowie nun hier nur die Zusammenstellungen $3+2 = 5$, $1+4 = 5$ zu machen waren, um daraus $f(1, 2) = f(3, 2)+f(1, 4)$ zu finden, so sind überhaupt, wenn der Werth von $f(1, 2)$ nach irgend einem Modulus zu bestimmen ist, nur aus den Zahlen, welche kleiner als dieser Modulus λ sind, alle Zusammenstellungen zu zweien zu machen, so dafs die Summe der zwei Zahlen $= \lambda$ ist. Die einzige Schwierigkeit besteht darin,

dafs entschieden werden mufs, welche von den beiden Zahlen in die erste Stelle zu setzen ist, da, wenn $\alpha+\beta=\lambda$ ist, es darauf ankommt, ob $f(\alpha,\beta)=\beta$ oder $f(\beta,\alpha)=\alpha$ ist. Hierauf ist aber schon früher die Antwort gegeben. Denn es wurde nachgewiesen, dafs in der Entwickelung $(1,2)$ immer diejenige der zwei Zahlen α und β in zweiter Stelle steht, deren numerus socius gröfser als $\frac{\lambda}{2}$ ist (§. 20); mit anderen Worten: in zweiter Stelle stehen die Zahlen, welche der Congruenz $x\equiv\frac{1}{r}$ (mod. λ) entsprechen, wo r alle ganzen Zahlen von $r=\frac{\lambda+1}{2}$ bis $r=\lambda-1$ bedeutet, und man hat mithin

$$f(1,2)\equiv\Sigma\frac{1}{r}\quad(\text{mod. }\lambda),$$

wo sich die Summation auf die oben genannten Werthe von r bezieht.

Es ist nun leicht auch das allgemeine Resultat anzugeben, wenn man das, was früher über die Entwickelung (m,n) gesagt wurde, berücksichtigt. Soll nemlich $f(m,n)$ bestimmt werden, so hat man nur zu suchen, wie oft λ als Summe zweier Ausdrücke von der Form $km+ln$ und $k'm+l'n$ dargestellt werden kann, so dafs $kl'-k'l=1$ ist; jede solche Gruppe giebt, wenn in der Entwickelung (m,n) das Glied $km+ln$ zuerst steht, den Theil $k'm+l'n$ des Werthes von $f(m,n)$. Solcher Gruppen, welche λ zur Summe haben, giebt es aber so viele, als es ganze Zahlen r zwischen den Grenzen $\frac{n_0}{n}\lambda$ und $\frac{m_0}{m}\lambda$ giebt, die Buchstaben m_0 und n_0 in ihrer früheren Bedeutung genommen (§. 18). Um noch zu entscheiden, ob $km+ln$ oder $k'm+l'n$ zuerst stehe, hat man nur zu bemerken, dafs diejenige Zahl in zweiter Stelle steht, deren numerus socius $>\frac{n_0}{n}\lambda$ und $<\frac{m_0}{m}\lambda$. Setzt man also wieder $x\equiv\frac{1}{r}$ (mod. λ), so ist

$$f(m,n)\equiv\Sigma\frac{1}{r}\quad(\text{mod. }\lambda);$$

wo r zwischen den angegebenen Grenzen zu nehmen ist. Dies ist der ***Eisenstein***sche Satz.

Ist λ keine ***Primzahl,*** so sind von den zwischen den angegebenen Grenzen enthaltenen Zahlen nur diejenigen zu nehmen, die ***relative Primzahlen*** zu λ sind.

Bleiben die Bedingungsgleichungen (a.) und (c.) dieselben, und man hat dagegen statt der Bedingungsgleichung (b.) die andere $f(m,n)=F(n)$

für den Fall $m+n=\lambda$, so bringt dies in der früheren Betrachtung nur die Aenderung hervor, dafs jetzt eine jede Gruppe α, β nicht mehr den Beitrag β, sondern $F(\beta)$ zum Werthe von $f(m,n)$ liefert. Man hat also

$$f(m,n) \equiv \Sigma F\frac{1}{r} \quad (\text{mod. } \lambda),$$

wo wieder r durch die Congruenz $x\equiv\frac{1}{r}$ (mod. λ) und die Bedingung $r>\frac{n_0}{n}\lambda$, $r<\frac{m_0}{m}\lambda$ bestimmt wird. Auch dies hat *Eisenstein* angegeben.

Es wurde bis jetzt vorausgesetzt, dafs m und n *relative Primzahlen* sind; hätten sie einen gemeinschaftlichen Faktor, so müfste $f(m,n)$ für die Primzahl λ als Modulus immer Null sein, da kein in der Entwickelung (m,n) vorkommendes Glied $km+ln$ dem Werthe λ gleich sein könnte.

Göttingen, im Juli 1855.

13.

Ueber die graphische Darstellung imaginärer Funktionen.

(Von Herrn *Siebeck* zu Liegnitz.)

---

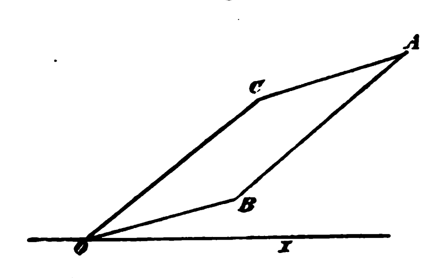
§. 1.

Die Art und Weise, nach welcher im barycentrischen Calcül Punkte wie Zahlengröfsen behandelt und unmittelbar durch Addition und Subtraction mit einander in Verbindung gesetzt werden, sowie die bedeutenden Erfolge, welche sich an diese Methode geknüpft haben, berechtigen zu der Vermuthung, dafs die Macht und Tragweite jenes Punkt-Calcüls noch gröfser sein würde, wenn es gelänge, denselben von den Fesseln, in welche er in Folge des jenem Werke eigenthümlichen Ausgangspunktes eingezwängt ist, zu befreien, und von Punkten nicht blofs Summen und Differenzen, sondern auch Produkte und Quotienten, Potenzen und Wurzeln zu bilden. Glücklicherweise ist aber das letztere Ziel durch die von *Gaufs* gegebene graphische Darstellung imaginärer Zahlen mindestens bezüglich der Punkte einer und derselben Ebene bereits erreicht und so liegt der Gedanke nahe, dafs es lohnend sein möchte, von dieser breiteren und vervollständigten Basis aus die Geometrie im Sinne des barycentrischen Calcüls zu behandeln — ein Unternehmen, welches im Fall des Gelingens aufser der Weiterbildung des barycentrischen Calcüls noch den Vortheil brächte, dafs die vielfach geahnte, aber noch nirgends durch wirkliche Erfolge documentirte Fruchtbarkeit jenes *Gaufs*schen Gedankens, sowie auch der innige Zusammenhang desselben mit den Methoden und Anschauungsweisen der neueren Geometrie nachgewiesen würde.

Dafs das eben bezeichnete Feld ein sehr dankbares ist, beabsichtigt der Verfasser dieses Aufsatzes an einer anderen Stelle ausführlicher nachzuweisen. Hier sei es ihm nur gestattet, einige Betrachtungen, die sich eben ohne eine gröfsere Reihe von Voraussetzungen anstellen lassen, auszuführen.

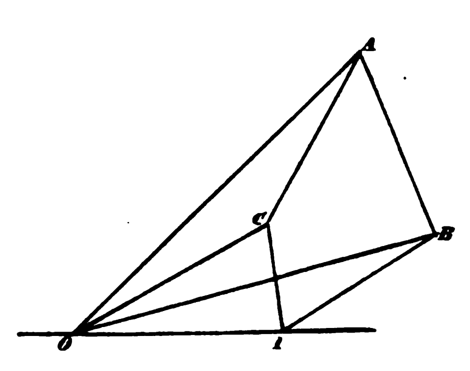
Die Art und Weise wie die Punkte einer Ebene durch imaginäre Zahlen dargestellt werden, kann zwar als allgemein bekannt vorausgesetzt werden, indessen dürfte es zum besseren Verständnifs unserer Anschauungsweise beitragen, wenn wir unseren Betrachtungen eine kurze Zusammenstellung der Hauptsachen, welche hier in Betracht kommen, einleitend vorausschicken.

Wir nehmen zu dem Ende in der gegebenen Ebene nach Belieben zwei feste Punkte an, von denen der eine durch Null, der andere durch Eins repräsentirt wird und bezeichnen diese Punkte respective durch O und I. Die nach beiden Seiten verlängerte Verbindungslinie derselben heifse die Hausptachse, der Abstand eines beliebigen Punktes der Ebene vom Nullpunkt der radius vector des betreffenden Punktes und der von dem radius vector mit der Hauptachse gebildete Winkel der Neigungswinkel. Endlich sei noch erwähnt, dafs wir, wenn zwei Linien AB und $A'B'$ gleiche Länge und einerlei (nicht entgegengesetzte) Richtung haben, dies durch $AB \equiv A'B'$ ausdrücken. Dies vorausgeschickt, beruht die graphische Darstellung imaginärer Zahlen bekanntlich auf folgenden Voraussetzungen:



1) Unter der Summe $B+C$ zweier Punkte B und C ist derjenige Punkt A zu verstehen, welcher so liegt, dafs die von ihm nach dem einen Summanden B gezogene Linie mit der von dem andern Summanden C nach dem Mittelpunkt gezogenen Linie gleiche Länge und einerlei Richtung hat. Es ist daher $A = B + C$, wenn $OC \equiv BA$ oder auch $OB \equiv CA$.

2) Unter der Differenz $A - B$ zweier Punkte A und B ist derjenige Punkt C zu verstehen, welcher so liegt, dafs die vom Nullpunkt bis zu ihm gezogene Linie mit der von B bis A gezogenen Linie gleiche Länge und einerlei Richtung hat. Es ist daher $A - B = C$, wenn $BA \equiv OC$.



3) Unter dem Produkt $B.C$ zweier Punkte B und C ist derjenige Punkt A zu verstehen, welcher so liegt, dafs Dreieck OIC ähnlich und gleichstimmig OBA, oder auch OIB ähnlich und gleichstimmig OCA sei.

4) Unter dem Quotienten $\frac{A}{B}$ zweier Punkte A und B ist derjenige Punkt C zu verstehen, welcher so liegt, dafs die Dreiecke OBA und OIC ähnlich und gleichstimmig sind.

Aus vorstehenden Voraussetzungen, deren Statthaftigkeit leicht auf ganz elementarem Wege nachgewiesen werden kann, sind sodann die den einzelnen

Punkten der Ebene zukommenden Zahlen mit leichter Mühe herzuleiten. Man gelangt so zu den bekannten Resultaten, dafs $ae^{\alpha i}$ oder $a(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, wo $i = \sqrt{-1}$, denjenigen Punkt repräsentirt, dessen radius vector gleich a und dessen Neigungswinkel α ist; dafs ferner die Zahl $a + bi$ demjenigen Punkte zukommt, dessen Entfernung von der Hauptachse (in entsprechendem Sinne genommen) gleich b ist und dessen orthogonale Projektion auf die Hauptachse die Entfernung a vom Nullpunkte hat u. s. w. Wird ein Punkt unter der Form $ae^{\alpha i}$ gegeben, so werden wir $e^{\alpha i}$ den Richtungscoefficienten dieses Punktes nennen. Den Begriff der Potenz und Wurzel, welcher aus 3) leicht herzuleiten ist, übergehen wir der Kürze halber und begnügen uns, in den beiden folgenden Paragraphen noch einige einleitende Bemerkungen an Vorstehendes zu knüpfen, welche sich auf Gleichungen zwischen Punkten beziehen.

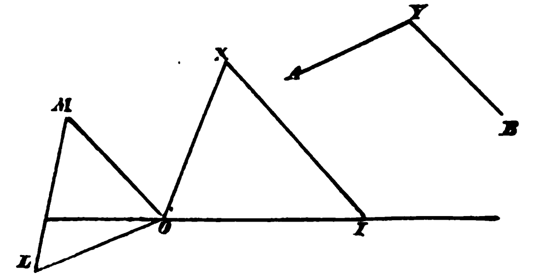
§. 2.

Jede Gleichung zwischen Punkten z. B. $A = B$ ist der Ausdruck für die Identität zweier Punkte. Da nun aber zur Bestimmung der Lage eines Punktes in einer Ebene zwei metrische Bestimmungen gehören, ***so sind auch in jeder Gleichung zwischen Punkten zwei metrische Bestimmungen enthalten,*** welche daher in jedem einzelnen Falle zu entwickeln sind. Hat man z. B. die Gleichung $A - B = C - D$, so liegt hierin, dafs $AB \equiv CD$; die beiden in der gegebenen Gleichung enthaltenen metrischen Bestimmungen bestehen also darin, dafs einestheils $AB = CD$, anderntheils die Winkel, unter welchen die Linien AB und CD gegen die Hauptachse oder auch eine beliebige andere Linie geneigt sind, einander gleich sind. Um ein für spätere Untersuchungen wichtiges Beispiel anzuführen, wollen wir versuchen die beiden in der Gleichung

$$X = \frac{A - Y}{Y - B}$$

liegenden metrischen Bestimmungen zu entwickeln.

Zieht man zu dem Ende, wenn AYB in nebenstehender Figur 3 beliebige Punkte der Ebene sind, $OL \equiv YA$ und $OM \equiv BY$, so ist $L = A - Y$ und $M = Y - B$, folglich $\frac{A - Y}{Y - B} = \frac{L}{M}$. Ist daher X ein Punkt, welcher so liegt, dafs Dreieck



$LOM \sim XOI$, so ist $X = \frac{L}{M} = \frac{A-Y}{Y-B}$. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke folgt aber, dafs $\frac{OX}{OI} = \frac{OL}{OM}$, oder, da OI die Längeneinheit ist, $OX = \frac{OL}{OM}$; da aber $OL = YA$ und $OM = BY$, so ist $OX = \frac{AY}{YB}$, d. i. die eine metrische Bestimmung. Andrerseits folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke, dafs $\angle IOX = \angle MOL$; es ist aber, da OL mit YA einerlei, OM mit YB entgegengesetzte Richtung hat, $\angle MOL = 2R - AYB$, folglich auch $\angle IOX = 2R - AYB$, d. i. die zweite metrische Bestimmung. *In der Gleichung* $X = \frac{A-Y}{Y-B}$ *liegen also die beiden metrischen Bestimmungen* $OX = \frac{AY}{YB}$ *und* $\angle IOX = 2R - AYB$. Man kann hieraus die Lage des Punktes X leicht ohne Hülfe der Punkte L und M ermitteln. Ist z. B. $\angle AYB = 2R$ und $AY = YB$, also Y der Mittelpunkt von AB, so ist $OX = 1$ und $\angle IOX = 0$; der Punkt X fällt also dann nach I, und es ist folglich $\frac{A-Y}{Y-B} = 1$. Aus letzterer Gleichung folgt aber wieder $Y = \frac{A+B}{2}$. Wir entnehmen hieraus, *dafs allgemein* $\frac{A+B}{2}$ *Ausdruck des Mittelpunkts der geraden Strecke AB ist.*

Zusatz. Aus der Gleichung $\frac{A-Y}{Y-B} = \frac{C-Z}{Z-D}$ folgen die metrischen Bestimmungen

$$(1.) \qquad \frac{AY}{YB} = \frac{CZ}{ZD},$$

$$(2.) \qquad \angle AYB = \angle CZD$$

oder $AYB \sim CZD$.

§. 3.

Schliefslich sei es uns erlaubt, noch einer Methode Erwähnung zu thun, von welcher wir hie und da bei Längen- und Flächenbestimmungen Gebrauch machen werden. Ist nämlich ein zusammengesetzter Ausdruck gegeben, welcher aufser i nur reelle Zahlen enthält und den wir durch $F(i)$ bezeichnen wollen, so erhält man den diesem Ausdruck entsprechenden Punkt P durch eine Reihenfolge von Constructionen, welche die jedesmalige Beschaffenheit jenes Ausdrucks bedingt, aus lauter Punkten der Hauptachse (den Repräsentanten jener reellen Zahlen) und dem Punkte J, nämlich dem Repräsentanten von i. Setzt man nun $-i$ statt i in $F(i)$, so erhält man den Punkt $F(-i) = \overline{P}$ offenbar aus denselben Punkten der Hauptachse und aus J' (dem Repräsentanten von

$-i$), also dadurch, dafs man dieselbe Construction auf der entgegengesetzten Seite der Hauptachse ausführt. Hieraus folgt, dafs die Punkte P und $\overline{P}$ zur Hauptachse symmetrisch, nämlich in gleicher Entfernung von derselben und in ein und derselben Normalen zu ihr liegen müssen. Setzt man nun insbesondere $P=F(i)=ae^{\alpha i}=a(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ und folglich $\overline{P}=F(-i)=ae^{-\alpha i}$ $=a(\cos\alpha-i\sin\alpha)$, so sind hiedurch zugleich folgende Gleichungen bedingt:

$$(1.)\qquad P\overline{P}=a^2,$$

$$(2.)\qquad \frac{P}{\overline{P}}=e^{2\alpha i},$$

$$(3.)\qquad \frac{P+\overline{P}}{2}=a\cos\alpha,$$

$$(4.)\qquad \frac{P-\overline{P}}{2i}=a\sin\alpha.$$

Stellen wir uns etwa die Aufgabe, wenn P und Q zwei beliebige Punkte der Ebene sind, den Flächeninhalt des Dreiecks POQ zu ermitteln, so wird derselbe, wenn $P=ae^{\alpha i}$ und $Q=be^{\beta i}$ gesetzt wird, zunächst durch $\frac{1}{2}ab\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}(a\sin\alpha.b\cos\beta-a\cos\alpha.b\sin\beta)$ ausgedrückt werden können. Setzt man hier für $a\cos\alpha$, $b\cos\beta$, $a\sin\alpha$, $b\sin\beta$ die diesen Zahlen nach (3.) und (4.) entsprechenden Ausdrücke, so erhält man

$$\triangle POQ=\frac{1}{2}\left[\frac{P-\overline{P}}{2i}.\frac{Q+\overline{Q}}{2}-\frac{P+\overline{P}}{2}.\frac{Q-\overline{Q}}{2i}\right],$$

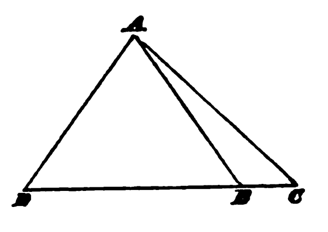
woraus man leicht erhält

$$(5.)\qquad \triangle POQ=\frac{P\overline{Q}-\overline{P}Q}{4i}.$$

Um ein zweites Beispiel der Anwendung zu geben, wollen wir uns vornehmen, den bekannten *Stewart*schen Satz zu beweisen, nach welchem, wenn B ein beliebiger Punkt der Seite DC des Dreiecks ADC ist, die Gleichung

$$AD^2.BC+AC^2.BD-AB^2.DC=DB.BC.DC$$

Statt hat.



Wir verlegen zu dem Ende D in den Nullpunkt, B und C in die Hauptachse. Es seien nun A die dem Punkte A, und 0, b, c die den Punkten D, B, C resp. zukommenden Zahlen. Alsdann ist dem Obigen gemäfs

$$A.\bar{A} \text{ Ausdruck für } DA^2,$$
$$(A-b)(\bar{A}-b) \text{ Ausdruck für } BA^2,$$
$$(A-c)(\bar{A}-c) \text{ Ausdruck für } CA^2.$$

Ferner sind b, c, $c-b$ die resp. Ausdrücke für die Längen DB, DC, BC. Es wäre also nur die Gleichung

$$A.\bar{A}(c-b)+(A-c)(\bar{A}-c)b-(A-b)(\bar{A}-b)c = bc(c-b)$$

zu beweisen, deren Identität auf der Hand liegt.

Von den geometrischen Funktionen.

I. Von den Funktionen einer Variabeln.

§. 4.

Denkt man sich einen aus den beliebig in der Ebene liegenden Punkten X, A, B, C ... beliebig zusammengesetzten Ausdruck (z. B. $A+BX+CX^2$), welchen wir allgemein durch $F(X, A, B, C\ldots)$ bezeichnen, so wird durch denselben eine Construction bedingt, mittelst deren man aus den als bekannt angenommenen Punkten X, A, B, C ... zu einem neuen Punkte gelangt, welchen wir durch Y bezeichnen wollen. Setzen wir demnach

$$Y = F(X, A, B, C\ldots)$$

und seien die Punkte A, B, C ... fest, der Punkt X aber verändere seine Lage, so wird auch Y seine Lage verändern. Beschreibt also X eine beliebige Bahn, so wird sich auch Y in einer Bahn bewegen, und zwar in einer solchen, welche abhängig ist von der vom Punkte X durchlaufenen Bahn. Wir werden daher X den sich unabhängig bewegenden Punkt, Y den sich abhängig bewegenden Punkt nennen. Jeder bestimmten Lage des Punktes X entspricht eine bestimmte Lage des Punktes Y; beschreibt daher X und folglich auch Y eine Curve, so entspricht jedem bestimmten Punkte der ersteren Curve ein bestimmter Punkt der andern Curve. Zwei sich in dieser Weise entsprechende Systeme von Punkten oder Curven nennen wir *verwandt*, und es ist unsere Absicht, den gemeinsamen Charakter aller Verwandtschaften, welche auf diese Weise dargestellt werden können, zu ermitteln. Wir bemerken hierbei noch, dafs das Abhängigkeits- (Verwandtschafts-) Verhältnifs der Punkte X und Y auch durch eine Gleichung von folgender Form $F(Y, X, A, B, C\ldots) = 0$ dargestellt werden kann, in welcher sowohl X als unabhängiger und Y als abhängiger, als auch Y als abhängiger und X als

unabhängiger Punkt betrachtet werden kann. Denken wir uns nun die Verwandtschaft der beiden Systeme mit Weglassung der festen Punkte einfach durch die Gleichung $Y = F(X)$ ausgedrückt, und seien X', X'', X''' drei einander unendlich nahe, nicht in gerader Linie liegende Punkte des Systems X; Y', Y'', Y''' ... die jenen entsprechenden, also ebenfalls einander unendlich nahen Punkte des Systems Y, und bezeichnen wir den Differentialquotienten $\frac{\partial Y}{\partial X}$ durch $F'(X)$, so ist offenbar

$$Y'' - Y' = (X'' - X')F'(X'),$$
$$Y''' - Y' = (X''' - X')F'(X'),$$

folglich

$$\frac{Y'' - Y'}{Y' - Y'''} = \frac{X'' - X'}{X' - X'''}.$$

Aus letzterer Gleichung folgen aber (nach §. 2, Zusatz) die beiden metrischen Bestimmungen:

$$(1.) \qquad \frac{Y''Y'}{Y'Y'''} = \frac{X''X'}{X'X'''},$$

$$(2.) \qquad \angle X''X'X''' = \angle Y''Y'Y'''.$$

Demnach sind auch die Dreiecke $X'X''X'''$ und $Y'Y''Y'''$ ähnlich (und gleichstimmig). Wir gelangen somit zu folgendem allgemeinen Resultate: *Je zwei einander nach der Gleichung $Y = F(X)$ verwandte endliche Figuren sind in ihren kleinsten Theilen einander ähnlich* *).

Dasselbe gilt natürlich auch von jeder durch die Gleichung $F(X, Y) = 0$ ausgedrückten Verwandtschaft, weil letztere Gleichung stets auf die Form $Y = F(X)$ gebracht werden kann.

Schneiden sich nun zwei zum System X gehörige Curven in einem Punkte X' und folglich die zu dem System Y gehörigen, jenen entsprechenden Curven in dem entsprechenden Punkte Y', so sind offenbar die Durchschnittswinkel der sich in X' und Y' schneidenden Curven einerlei mit denen, welche die zwei in X' oder Y' zusammenstofsenden Elemente der einen und der andern Curve mit einander machen. Da nun aber, wie eben bewiesen wurde, die einander entsprechenden Figuren in ihren kleinsten Theilen ähnlich sind, so folgt hieraus der Satz:

---

*) Man vergleiche hiemit: *Gaufs,* Allgemeine Auflösung der Aufgabe: die Theile einer gegebenen Fläche so abzubilden, dafs die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird (Art. 8), in *Schumachers* astronomischen Abhandlungen, Heft 3.

Findet zwischen zwei Figuren die Verwandtschaft $Y=F(X)$ Statt, so müssen sich stets je zwei sich schneidende Curven der einen Figur unter denselben Winkeln schneiden, wie die entsprechenden Curven der andern Figur.

Wir werden daher die unter der Gleichung $Y=F(X)$ oder auch $F(X, Y)=0$ enthaltenen Verwandtschaften *isogonale* Verwandtschaften nennen. Unter ihnen hat man überhaupt bis jetzt erst zwei in Untersuchung gezogen, nämlich die Verwandtschaft der Aehnlichkeit $(Y=A+BX)$ und die Kreisverwandtschaft $\left(Y=\frac{A+BX}{C+DX}\right)$.

Wir werden aber auf die specielle Erörterung mehrerer der einfachsten Verwandtschaften erst später eingehen können. Vorläufig bemerken wir nur, dafs diejenigen isogonalen Verwandtschaften besondere Beachtung verdienen, für welche, wenn sie durch die Gleichung $F(X, Y)=0$ gegeben werden, $F(X, Y)$ eine symmetrische Funktion von X und Y ist. Da nämlich in solchen Funktionen die Variabeln mit einander vertauscht werden können, so ist das Entsprechen ein involutorisches. Wir werden daher solche Verwandtschaften involutorische isogonale Verwandtschaften nennen.

§. 5.

Aus der im vorigen Paragraphen gegebenen Entwicklung läfst sich zugleich die Bedeutung herleiten, welche der Differentialquotient $F'(X)$ bezüglich der Verwandtschaft $Y=F(X)$ hat. Sind nämlich wieder X' und X'' zwei einander sehr nahe Punkte in X, Y' und Y'' die ihnen entsprechenden in Y, und lassen wir X'' sich um X' in einem Kreise bewegen, so wird sich in Folge der oben bewiesenen Aehnlichkeit der kleinsten Theile auch Y'' um Y' in einem Kreise bewegen. Es ist dann fortwährend

$$F'(X') = \frac{Y''-Y'}{X''-X'}.$$

In dieser Gleichung liegen aber, wenn wir $F'(X')=P$ setzen, folgende metrische Bestimmungen

$$1)\qquad OP = \frac{Y'Y''}{X'X''},$$

d. h. *der Radius vector des Differentialquotienten $F'(X')$ giebt für die Verwandtschaft $Y=F(X)$ das Verhältnifs der Halbmesser zweier einander entsprechenden Elementarkreise an.*

2) Ist μ die Richtungsdifferenz von $Y'Y''$ und $X'X''$, so ist

$$\angle IOP = \mu,$$

d. h. ***der Richtungscoefficient des Differentialquotienten giebt durch sein Argument den constanten Richtungsunterschied je zweier entsprechender Halbmesser in zwei entsprechenden Elementarkreisen an.***

Hieraus folgt u. A., dafs $Y = A + BX$ die Verwandtschaft der Aehnlichkeit ist, weil hier $F'(X)$ constant ist. Beschreibt daher X eine beliebige Curve, so beschreibt $A + BX$ eine ihr ähnliche Curve.

§. 6.

Aus dem Vorstehenden folgt, dafs zwei Punkten X'', X''' eines Elementarkreises in X, welche einander diametral gegenüberstehen, zwei eben solche Punkte Y'', Y''' in dem entsprechenden Elementarkreise entsprechen müssen. Geht daher in X ein sich geradlinig bewegender Punkt von X''' über X' nach X'', so bewegt sich der ihm in Y entsprechende Punkt von Y''' über Y' nach Y''. ***Hiervon ist jedoch der Fall ausgenommen, in welchem OP, der Radius vector von $F'(X')$, $=0$ und mithin $F'(X')$ selbst $=0$ ist.*** In diesem Falle ist nämlich der Radius des Elementarkreises in Y gleich Null, oder genauer ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung. Während nämlich die Punkte X'', X''' von X' aus nach entgegengesetzter Richtung hin liegen, liegen dann die Punkte Y'' und Y''' von Y' aus nach einerlei Richtung hin. In der That nämlich ist nach dem ***Taylor***'schen Lehrsatz:

$$Y'' = F(X') + \frac{X''-X'}{1} F'(X') + \frac{(X''-X')^2}{1.2} F''(X') + \cdots$$

$$Y''' = F(X') + \frac{X'''-X'}{1} F'(X') + \frac{(X'''-X')^2}{1.2} F''(X') + \cdots.$$

Ist nun unserer Annahme gemäfs X' der Mittelpunkt von $X''X'''$, so dafs also nach §. 2 $X' = \frac{X''+X'''}{2}$ oder $X''-X' = -(X'''-X')$, und ist $F'(X')$ ***nicht*** $=0$, so ist es erlaubt, schon das zweite Glied der Reihe zu vernachlässigen und man erhält dann durch Addition obiger Gleichungen $Y''+Y''' = 2F(X') = 2Y'$ oder $Y' = \frac{Y''+Y'''}{2}$, d. h. Y' liegt in der Mitte von $Y''Y'''$. ***Ist*** dagegen $F'(X') = 0$, so kommt das zweite Glied der ***Taylor***'schen Reihe mit in Betracht und es ist dann, da $X''-X' = -(X'''-X')$ und eben deshalb $(X''-X')^2 = (X'''-X')^2$ ist,

$$Y'' = Y'''.$$

Sonach mufs der Bewegung des X von X'' über X' nach X''', eine Bewegung des Y von Y'' nach Y' *und dann wieder zurück* nach Y'' entsprechen. Wir erhalten somit folgenden Satz: ***Stehen zwei Figuren in der Verwandtschaft $Y = F(X)$, und giebt es einen in endlicher Entfernung liegenden Punkt X', für welchen $F'(X') = 0$, so entspricht jeder in X durch X' gehenden geraden Linie eine solche Curve in Y, welche in dem dem X' entsprechenden Punkte $F(X') = Y'$ einen Rückkehrpunkt hat.***

Wir wollen nun jeden Punkt des Systems Y, welcher dem Vorstehenden gemäfs ein Rückkehrpunkt jeder bis zu ihm gehenden Curve ist, einen ***Brennpunkt*** des Systems Y nennen. Es versteht sich von selbst, dafs auch das System X Brennpunkte haben kann, für welche dann die Gleichung $\frac{\partial X}{\partial Y} = 0$ gelten mufs. Bei jeder involutorischen isogonalen Verwandtschaft haben offenbar beide Systeme gemeinschaftliche Brennpunkte.

Beispiele. 1) Für die Verwandtschaft $Y = X^2$, welche wir eine parabolische nennen, ist $\frac{\partial Y}{\partial X} = 0$, wenn $X = 0$. Ist aber $X = 0$, so ist auch $Y = 0$. Demnach hat das System Y bei der Verwandtschaft $Y = X^2$ ***einen*** Brennpunkt und dieser ist der Nullpunkt. Alle Curven in Y, welche geraden Linien in X entsprechen, sind nämlich, wie gezeigt werden wird, Parabeln, welche confocal sind und den Nullpunkt zum gemeinschaftlichen Brennpunkt haben.

2) Für die Verwandtschaft der Aehnlichkeit $Y = A + BX$ ist $F'X = B$, also nicht $= 0$, sofern nicht $B = 0$, welcher Fall aber nicht statthaft ist, da sonst $Y = A$, also constant sein würde. Bei dieser Verwandtschaft giebt es daher keinen Brennpunkt.

3) Für die (involutorische) Verwandtschaft $X^2 + Y^2 = 1$ ist $\frac{\partial Y}{\partial X} = \pm \frac{X}{\sqrt{1 - X^2}}$, welcher letztere Ausdruck nur für den endlichen Werth 0 von X gleich Null wird. Für $X = 0$ ist aber $Y = \pm 1$. Diese Verwandtschaft hat also zwei Brennpunkte, welche nach I und I' fallen. Je zwei einander nach dieser Verwandtschaft entsprechende Punkte sind, wie wir sehen werden, immer Endpunkte conjugirter Halbdurchmesser einer Ellipse, deren Brennpunkte nach I und I' fallen.

4) Für die Verwandtschaft $Y = \cos \mathrm{am}\, X$ (mod. k), ist $\frac{\partial Y}{\partial X} = - \sin \mathrm{am}\, X . \Delta \mathrm{am}\, X$. Ist nun $\sin \mathrm{am}\, X = 0$, so ist $\cos \mathrm{am}\, X = \pm 1$; ist da-

gegen $\Delta \operatorname{am} X = 0$, so ist $\cos \operatorname{am} X = \pm \frac{k' i}{k}$. Diese Verwandtschaft hat also die 4 Brennpunkte $+1$, -1, $+\frac{k' i}{k}$, $-\frac{k' i}{k}$, von denen, wenn $k < 1$, nur zwei in der Hauptachse liegen. Ist $k = 0$ und folglich $Y = \cos X$, so bleiben nur noch die Brennpunkte ± 1. Diese letztere Verwandtschaft (welche man die elliptisch-hyperbolische nennen könnte) wird auf den letzten Seiten dieses Aufsatzes näher erörtert werden, der allgemeinere Fall $Y = \cos \operatorname{am} X$ (mod. k) aber besonders zu behandeln sein.

§. 7.

Setzen wir wieder die Verwandtschaft $Y = F(X)$ und nehmen an, dafs sich X in der Hauptachse bewege, also fortwährend reell sei, so wird Y die der Hauptachse entsprechende Curve beschreiben. Wir werden aber den Vorbehalt, dafs X reell bleibe, dadurch ausdrücken, dafs wir x statt X schreiben. Somit ist $F(x)$ überhaupt Ausdruck einer Curve und zwar derjenigen, welche bei der Verwandtschaft $Y = F(X)$ in dem System Y der Hauptachse in X entspricht. Sind nun $P = x$ und $P' = x + \partial x$ zwei einander unendlich nahe Punkte der Hauptachse, und entsprechen denselben die im Allgemeinen einander ebenfalls unendlich nahen Punkte $Q = F(x)$ und $Q' = F(x + \partial x)$, so können offenbar die Linien PP' und QQ' als entsprechende Halbmesser in entsprechenden Elementarkreisen betrachtet werden, und es ergiebt sich demnach aus §. 5, dafs

1) der Radius vector von $F'(x)$ für die Curve $F(x)$ das Verhältnifs der Länge eines beliebigen Curvenelements zu der Länge des ihm entsprechenden Elements der Hauptachse (nach §. 5, 1)),

2) der Richtungscoefficient von $F'(x)$ die Neigung des betreffenden Curvenelements gegen die Hauptachse, also die Tangentialrichtung (nach §. 5, 2)) angiebt.

In Bezug auf 1) bemerken wir, dafs wenn wir den unabhängig sich bewegenden Punkt x sich so in der Hauptachse bewegen lassen, dafs er im Zeitpunkte x auch die durch diese Zahl ausgedrückte Entfernung vom Nullpunkte hat, dafs also seine Geschwindigkeit constant, nämlich $= 1$ ist, und ∂x zugleich als Differenzial der Zeit betrachtet werden kann, — offenbar $F(x + \partial x) - Fx$ oder $\partial x . F'(x)$ das dem Zeitincremente ∂x entsprechende Increment der Curve und folglich $F'(x)$ die Geschwindigkeit in dem betreffenden Punkte der Curve bezeichnet. Wir werden also sagen können:

Ist $Y = F(x)$ Ausdruck einer Curve, so giebt $F'(x)$ durch seinen Radius vector die Gröfse und durch seinen Richtungscoefficienten die Richtung der Geschwindigkeit des sich abhängig bewegenden Punktes an der betreffenden Stelle der Curve an, so fern man annimmt, dafs der unabhängige Punkt x sich in der Hauptachse mit der constanten Geschwindigkeit 1 bewegt.

Hieraus läfst sich aber ableiten, dafs der Brennpunkt des Systems Y bezüglich der Verwandtschaft $Y = F(X)$ zugleich Brennpunkt der Curve $F(x)$ ist. Da nämlich der Differentialquotient $F'(x)$ durch seinen Richtungscoefficienten die Tangentialrichtung angiebt, so ist, wenn wir den von der letzteren mit der Hauptachse gebildeten Winkel durch φ bezeichnen und $F'(X)$ auf die Form $p \pm qi$ bringen, offenbar $\operatorname{tang}\varphi = \pm\frac{q}{p}$. Ist nun $F'(X') = 0$, und folglich auch $p \pm qi = 0$, so ist $\operatorname{tang}\varphi = \pm i$. Dies stimmt aber mit der von *Plücker* gegebenen Definition überein, wonach die Brennpunkte diejenigen Punkte in der Ebene einer Curve sind, von denen sich imaginäre Tangenten an die Curve ziehen lassen, welche mit einer beliebigen Geraden Winkel bilden, deren trigonometrische Tangenten den Werth $\pm i$ haben *). Wir sind sonach im Stande, auf die leichteste Weise die Brennpunkte einer gegebenen Curve zu finden. *Ist nämlich $F(x)$ die vorgegebene Curve und sind X', X'', X''' ... die Wurzeln der Gleichung $F'(X) = 0$, so sind $F(X')$, $F(X'')$, $F(X''')$ ... die Brennpunkte der Curve.* Hierbei ist jedoch vorausgesetzt, dafs X', X'', X''' ... in *endlicher* Entfernung liegende Punkte sind.

Zusatz. Da uns die Untersuchung der Gleichung $\frac{\partial Y}{\partial X} = 0$ zu den Brennpunkten geführt hat**), so entsteht naturgemäfs die Frage nach dem geometrischen Orte derjenigen Punkte in Y und X, für welche der Radius vector von $\frac{\partial Y}{\partial X}$ einen bestimmten constanten Werth p hat, für welche also das Ver-

---

*) Es dürfte nicht ohne Interesse sein, die durch unsern Punktcalcül bedingte Auffassung dieses Gegenstandes mit einem Aufsatze des Herrn Prof. *Kummer* im 35ten Bande dieses Journals zu vergleichen, in welchem derselbe Gegenstand auf dem gewöhnlichen Wege der analytischen Geometrie behandelt worden ist.

**) Auch die Betrachtung des zweiten Differentialquotienten führt zu bemerkenswerthen Eigenschaften der sogenannten Verwandtschaften. Der Raum gestattet mir nicht, folgendes neue allgemeine Gesetz herzuleiten: *Schneiden sich mehrere confocale Curven derselben Art in einem Punkte, so haben die Krümmungskreise jener Curven in diesem Punkte aufser letzterem noch einen Punkt gemein und bilden also ein System von Chordalkreisen.*

hältnifs der entsprechenden Elementarkreise ein und dasselbe ist. Sei daher eine Verwandtschaft durch die Gleichung

$$U = F(X, Y) = 0$$

gegeben, so folgt zunächst aus ihr, dafs

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial X} = 0.$$

Soll nun der Radius vector von $\frac{\partial Y}{\partial X}$ constant sein, so brauchen wir nur $\frac{\partial Y}{\partial X} = pe^{vi}$ zu setzen, wo p constant und v veränderlich angenommen wird. Es werden daher alle Punkte in X und Y, welche gleichzeitig den Gleichungen

$$\text{(I.)} \qquad U = 0,$$

$$\text{(II.)} \qquad \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Y} \cdot pe^{vi} = 0$$

entsprechen, die Eigenschaft haben, dafs das Verhältnifs der Halbmesser entsprechender Elementarkreise in diesen Punkten $= p$ ist. Liegen daher diese Punkte in stetigen Curven, wie es in der That der Fall ist, so müssen auch je zwei entsprechende Bogen dieser Curven in dem constanten Verhältnifs p stehen. Man erhält aber offenbar jene Curven, wenn man X und Y aus den Gleichungen (I.) und (II.) entwickelt, wodurch man Ausdrücke von der Form

$$X = \varphi(pe^{vi}),$$
$$Y = \psi(pe^{vi})$$

erhält, in welchen v variabel zu denken ist. Wir erhalten somit folgenden zu einer Menge merkwürdiger Relationen führenden Satz:

Ist U eine complexe Funktion von X und Y, und entwickelt man X und Y aus den Gleichungen

$$U = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Y} \cdot pe^{vi} = 0,$$

so dafs man Ausdrücke von der Form

$$X = \varphi(pe^{vi}),$$
$$Y = \psi(pe^{vi})$$

erhält, so sind φ und ψ, wenn man p als constant und v als variabel annimmt, Ausdrücke solcher Curven, deren entsprechende Bogen in dem constanten Verhältnifs $1:p$ stehen.

Die betreffenden Curven sind im allgemeinen geschlossene Curven, welche in beiden Systemen um die Brennpunkte (für welche $p=0$ und $p=\infty$) herumgehen. Beispiele hierzu können für jetzt noch nicht gegeben werden.

§. 8.

Nach dem vorhin Gesagten stellt, wenn $Y=F(x)$ und $Y'=F(x+\partial x)$ und mithin $\frac{Y'-Y}{\partial x}=F'(x)=P$ gesetzt wird, OP die Gröfse und Richtung der Geschwindigkeit von Y dar. P ist aber selbst ein sich nach dem Gesetze $P=F'(x)$ bewegender Punkt, und wenn dieser am Ende der Zeit $x+\partial x$ sich in P' befindet, so hat man $P'=F'(x+\partial x)$, folglich $\frac{P'-P}{\partial x}=F''(x)$, und es ist, wenn man diesen neuen Punkt $F''(x)=Q$ setzt, OQ die Richtungsgröfse der Geschwindigkeit von P, d. i. der Geschwindigkeit, mit welcher sich die Gröfse und Richtung der Geschwindigkeit von Y ändert; folglich drückt Q die *Beschleunigung* von Y aus. Setzt man dieses Räsonnement fort, so gelangt man ebenso zu dem Resultate, dafs $F'''x$ die Richtungsgröfse der Geschwindigkeit der Beschleunigung $Q=F''(x)$ ausdrückt etc. Wir können dies (vergl. in dieser Beziehung den Aufsatz von *Möbius* im 36sten Bande dieses Journals: „über die phoronomische Deutung des *Taylor*schen Theorems) so ausdrücken: Ist $F(x)$ der Ausdruck für die Bewegung eines sich in der Ebene bewegenden Punktes Y, so ist $F'(x)$ die Gröfse und Richtung der ersten Geschwindigkeit, $F''(x)$ die Gröfse und Richtung der zweiten Geschwindigkeit etc., $F^N(x)$ die Gröfse und Richtung der $n$ten Geschwindigkeit des Punktes Y.

Entwickelt man daher den Ausdruck $F(x'+x)$ nach dem *Taylor*schen Lehrsatz in eine nach den Potenzen von x geordnete Reihe und bricht man diese Reihe mit dem $(n+1)$ten Gliede ab, so erhält man den Ausdruck derjenigen Bewegung, welche der Punkt Y annimmt, wenn am Ende der Zeit x' die $n$te Geschwindigkeit auf einmal constant wird. Ist $n=2$, so erhält man auf diese Weise $F(x')+x.F'(x')$ als Ausdruck einer gleichförmigen Bewegung in der im Punkte $F(x')$ an die Curve gelegten Tangente.

§. 9.

Sowohl zum besseren Verständnifs des Vorhergehenden, als auch weil es der Gang der Untersuchung erfordert, wollen wir jetzt einige der einfachsten Funktionen discutiren. Wir bemerken aber vorher, dafs ein und dieselbe Curve auf verschiedenartige Weise ausgedrückt werden kann. Ist nämlich

$f(x)$ eine beliebige reelle Funktion, so sind offenbar $F(x)$ und $F(f(x))$ zwei Ausdrücke einer und derselben Curve. Denn setzen wir $f(x) = z$, und folglich $F(f(x)) = F(z)$, so beschreibt der unabhängige Punkt z in $F(z)$ dieselbe Linie wie der unabhängige Punkt x in $F(x)$. Demnach mufs auch der durch die Funktion F ausgedrückte abhängige Punkt in beiden Fällen ein und dieselbe Curve beschreiben. Diese Bemerkung ist aber für die Curven sehr wichtig, weil aus ihr hervorgeht, dafs man ein und dieselbe Curve als zu den verschiedenartigsten isogonalen Verwandtschaften gehörig auffassen kann. Es ist nämlich $F(x)$ Ausdruck derjenigen Curve, welche bei der Verwandtschaft $Y = F(X)$ für das System Y der Hauptachse in X entspricht. Dagegen ist $F(f(x))$ Ausdruck derjenigen Curve, welche bei der Verwandtschaft $Y = F(f(X))$, wo also $f(X)$ nicht mehr reell zu sein braucht, bezüglich Y der Hauptachse in X entspricht. Je nachdem also die Curve als zu der einen, oder der andern Verwandtschaft gehörig betrachtet wird, werden sich verschiedene Eigenschaften derselben offenbaren. So ist z. B. e^{xi} Ausdruck des mit dem Radius 1 um den Nullpunkt beschriebenen Kreises. Er entspricht also bei der Verwandtschaft $Y = e^{Xi}$ in Y der Hauptachse in X, oder auch, wenn man will, bei der Verwandtschaft der Identität $Y = X$ dem mit der Längeneinheit als Halbmesser um den Nullpunkt beschriebenen Kreise. Setzt man nun in

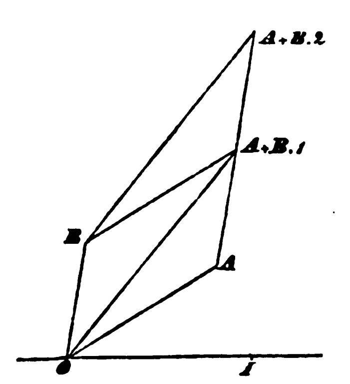
$$e^{xi} = \cos x + i \sin x = \frac{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{x}{2} + 2i \operatorname{tang} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tang}^2 \frac{x}{2}}$$

einfach x statt $\operatorname{tang} \frac{x}{2}$, so erhält man $\frac{1 - x^2 + 2xi}{1 + x^2}$ oder $\frac{1 - xi}{1 + xi}$ als Ausdruck desselben Kreises. Demnach ist der mit OI um O beschriebene Kreis zugleich derjenige, welcher bei der Kreisverwandtschaft $Y = \frac{1 - Xi}{1 + Xi}$ bezüglich Y der Hauptachse in X entspricht.

Läfst man übrigens x zugleich die Zeit bedeuten, so entspricht der Transformation $F(x)$ in $F(f(x))$, oder auch der Transformation $F(f(x))$ in $F(\varphi(x))$, wo $f(x)$ und $\varphi(x)$ reelle Funktionen sind, offenbar eine Veränderung der Geschwindigkeit des die Curve beschreibenden Punktes.

§. 10.

Aufgabe. Gegeben sei eine algebraische rationale ganze Funktion vom 1sten Grade $A + Bx$ (wo A und B beliebige feste Punkte der Ebene sind); man soll die durch diese Funktion dargestellte Bewegung ermitteln.



Auflösung. Man setze $A+Bx=Y$, so ist $\frac{\partial Y}{\partial x}=B$; also ist die Geschwindigkeit von Y nach Gröfse und Richtung constant und wird durch OB vorgestellt. Da nun aufserdem Y in A ist, wenn x in O, so bewegt sich der Punkt Y in der Parallelen, welche durch A mit OB gezogen werden kann, und zwar ist der am Ende der Zeit x durchlaufene Weg $=OB.x$.

Zusatz 1. Da mittelst der Form $A+Bx$ alle in der Ebene liegenden geraden Linien ausgedrückt werden können, so ist, wenn F eine beliebige Funktion bedeutet, $F(A+Bx)$ der allgemeine Ausdruck aller derjenigen Curven, welche bei der Verwandtschaft $Y=F(X)$ in dem System Y geraden Linien in X entsprechen.

Da man nun die Brennpunkte der Curve $F(A+Bx)$ findet, wenn man die Wurzeln der Gleichung $\frac{\partial F(A+BX)}{\partial X}=0$ in $F(A+Bx)$ für x einsetzt und da man offenbar dieselben Punkte erhält, wenn man die Wurzeln der Gleichung $\frac{\partial F(X)}{\partial X}=0$ in $F(X)$ einsetzt, weil $\frac{\partial F(A+Bx)}{\partial(A+Bx)}.B=\frac{\partial F(A+Bx)}{\partial x}$ ist, so müssen die Brennpunkte des Systems Y bezüglich der Verwandtschaft $Y=F(X)$ identisch sein mit den Brennpunkten der Curve $F(A+Bx)$. Wir erhalten somit den Satz:

Stehen zwei Figuren in der isogonalen Verwandtschaft $Y=F(X)$, so sind alle Curven der einen Figur, welche geraden Linien der andern Figur entsprechen, confocal und zwar haben sie die zu dieser Verwandtschaft gehörigen Brennpunkte zu ihren Brennpunkten,

wobei zugleich daran erinnert werden kann, dafs auch die Winkel, unter denen sich die confocalen Curven schneiden, gleich sein müssen den Winkeln, unter welchen sich die entsprechenden Geraden schneiden.

Es darf hier nicht unerwähnt bleiben, dafs sich das vorstehende Räsonnement auf *alle* in X gezogenen Curven ausdehnen läfst; so dafs wir zu dem scheinbaren Paradoxon gelangen: *Alle Curven in Y, welche beliebigen Curven in X nach der Verwandtschaft $Y=F(X)$ entsprechen, sind confocal.*

Zusatz 2. Ist $f(x)$ eine beliebige reelle Funktion, so ist (nach §. 9) auch $A+B.f(x)$ Ausdruck einer geradlinigen Bewegung und zwar ist der am Ende der Zeit x durchlaufene Weg gleich $OB.f(x)$.

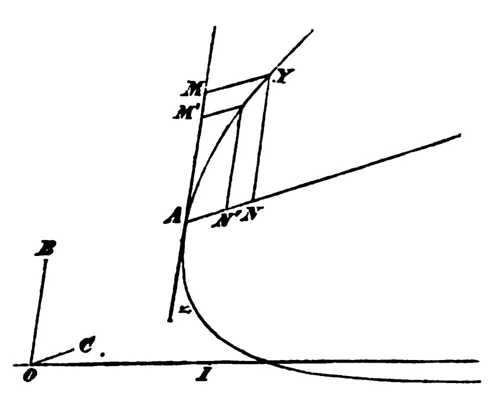
§. 11.

Aufgabe. Es soll die durch die Funktion $A+Bx+Cx^2$ ausgedrückte Bewegung ermittelt werden.

Auflösung. Man setze $A+Bx=M$, $A+Cx^2=N$, aufserdem aber $A+B.1=M'$, $A+C.1^2=N'$, so ist

1) M ein in der Geraden AM' begriffener und in ihr sich bewegender Punkt, so dafs $AM'.x=AM$ (nach §. 10).
2) N ein in der Geraden AN' sich bewegender Punkt, so dafs $AN'.x^2=AN$ (nach §. 10, Zusatz 2).

Zieht man nun MY und NY so, dafs $AMYN$ ein Parallelogramm ist, so ist $Y=M+(N-A)=A+Bx+Cx^2$, also Y der Punkt, dessen Bewegung zu bestimmen ist.



Da aber $AMYN$ ein Parallelogramm ist, so wird AN als Abscisse und AM als Ordinate des Punktes Y in demjenigen Coordinatensystem zu betrachten sein, dessen Abscissenachse AN' und dessen Ordinatenachse AM' ist. Es folgt nun aber aus 1) und 2), dafs

$$\frac{AM'^2}{AN'}=\frac{AM^2}{AN}.$$

Da nun $\frac{AM'^2}{AN'}$ constant ist, so ist auch $\frac{AM^2}{AN}$ constant. Demnach ist die Bewegung von Y so beschaffen, dafs das Quadrat der Ordinate des Punktes Y der Abscisse proportional ist. Die von Y durchlaufene Bahn ist daher eine Parabel. Diese Parabel mufs durch A gehen, weil Y in A, wenn x in O ist; und es mufs AN' ein Durchmesser, AM' aber eine Tangente derselben sein.

Setzen wir nun den zu dem Durchmesser AN' gehörigen Parameter $=p$, so ist offenbar $p=\frac{AM'^2}{AN'}$. Nun ist aber, da $M'=A+B$, $AM'=OB$; ferner, da $N'=A+C$, $AN'=OC$. Folglich ist $p=\frac{OB^2}{OC}$. Die Parabel ist mithin vollständig bestimmt.

Zusatz. Die phoronomische Bedeutung der Constanten A, B, C ist nach §. 8 folgende: A ist der Ausgangspunkt der Bewegung, OB die Geschwindigkeit im Ausgangspunkte, $2OC$ die Beschleunigung im Ausgangspunkte, bei-

des nach Gröfse und Richtung. Will man den Ausgangspunkt verlegen, so braucht man nur $x'+x$ für x zu setzen und erhält so den Ausdruck

$$A+B(x'+x)+C(x'+x)^2 = A'+B'x+Cx^2,$$

wo alsdann

$A' = A+Bx'+Cx'^2$ der neue Ausgangspunkt,

$B' = B+2Cx'$ die Geschwindigkeit in diesem Punkte,

$C = C$ die Beschleunigung im neuen Ausgangspunkte

ist. Man ersieht hieraus, dafs die Beschleunigung in allen Punkten der Parabel dieselbe ist, wodurch das Bewegungsgesetz als mit der Wurfbewegung zusammenfallend hinlänglich charakterisirt ist. Für die Tangente in einem beliebigen, etwa dem Werthe x' der Variabeln entsprechenden Punkte erhalten wir (s. §. 8 am Schlufs) den Ausdruck

$$A+Bx'+Cx'^2+(B+2Cx')x.$$

§. 12.

Um einige Anwendungen des Vorstehenden zu zeigen, bemerken wir nur so viel:

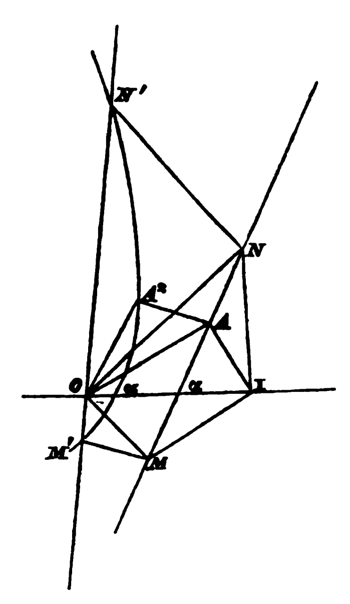
Man kann die Parabel $A+Bx+Cx^2$ zunächst bezüglich der Verwandtschaft $Y = A+BX+CX^2$ als diejenige Curve betrachten, welche im System Y der Hauptachse in X entspricht. Ist nun $P+Qx$ eine beliebige Gerade im System X und also $Y_1 = A+B(P+Qx)+C(P+Qx)^2$ die ihr im System Y entsprechende Curve, so mufs Y_1 offenbar selbst wieder eine Parabel sein, da der Ausdruck für Y_1 wieder vom zweiten Grade ist. Wir gelangen somit bei Berücksichtigung von §. 10, Zusatz, zu dem Resultate:

Stehen zwei Figuren X und Y in der Verwandtschaft $Y = A+BX+CX^2$, so entsprechen alle Geraden in X nur Parabeln in Y; die letzteren sind daher sämmtlich confocal und ihre Durchschnittswinkel sind gleich den Durchschnittswinkeln der Geraden, welchen sie entsprechen.

Um den Brennpunkt der Verwandtschaft, also auch den von $A+Bx+Cx^2$ zu ermitteln, setzen wir den der Gleichung $F'(X) = B+2CX = 0$ entsprechenden Werth, also $-\frac{B}{2C}$ in $A+BX+CX^2$ für X ein und erhalten somit $\frac{4AC-B^2}{4C}$ als ***Ausdruck des Brennpunkts.*** Letzterer fällt in den Nullpunkt, wenn $4AC = B^2$, d. h. wenn $A+Bx+Cx^2$ ein vollständiges Quadrat ist. Wir entnehmen hieraus, dafs $(A+Bx)^2$ Ausdruck einer Parabel ist, deren Brennpunkt in den Nullpunkt fällt, und welche zugleich die Parabel x^2,

die mit der Hauptachse zusammenfällt, unter demselben Winkel schneiden mufs, unter welchem die Gerade $A+Bx$ die Hauptachse x schneidet, weil die parabolischen Bewegungen $(A+Bx)^2$ und x^2 als solche betrachtet werden können, welche bei der isogonalen Verwandtschaft $Y=X^2$ in Y den Bewegungen $A+Bx$ und x in X entsprechen. Hieraus lassen sich mit Leichtigkeit die Eigenschaften der Brennpunkte der Parabel herleiten. Um nur Einiges hierüber zu zeigen, bemerken wir:

1) Es ist $(A+Bx)^2$ das Quadrat der Geraden $A+Bx$. Hieraus folgt der Satz:



Denkt man sich zwei Ecken O und I eines Dreiecks fest und läfst die dritte Ecke A sich auf einer beliebigen Geraden AM bewegen, denkt man sich ferner während der Bewegung fortwährend über OA ein Dreieck OAA^2, welches mit OIA ähnlich und gleichstimmig ist, so wird die Ecke A^2 des letzteren Dreiecks eine Parabel beschreiben, deren Brennpunkt O ist und welche OI unter demselben Winkel schneidet als die Gerade AM (und zwar in beiden Durchschnittspunkten).

2) Denkt man sich zwei confokale Parabeln $(A+Bx)^2$ und $(C+Dx)^2$, so ersieht man aus den entwickelten Ausdrücken $A^2+2ABx+B^2x^2$ und $C^2+2CDx+D^2x^2$, dafs B^2 und D^2 die Beschleunigungen und folglich B^2OI und D^2OI die respectiven Winkel sind (s. §. 11, Zusatz), welche die Achsen der Parabeln mit der Hauptachse bilden. Folglich ist B^2OD^2 gleich dem Winkel, den die beiden Achsen selbst unter einander bilden. Andrerseits bilden aber die Geraden $A+Bx$ und $C+Dx$ selbst einen Winkel, welcher gleich BOD ist; folglich schneiden sich die Parabeln, da sie jenen Geraden gemäfs der isogonalen Verwandtschaft $Y=X^2$ entsprechen, ebenfalls unter dem Winkel BOD. Nun ist aber offenbar $B^2OD^2=B^2OI-D^2OI=2BOI-2DOI=2BOD$. Hieraus ergiebt sich der Satz:

Sind zwei Parabeln confocal, so ist der Winkel, unter welchem sie sich schneiden, halb so grofs, als der Winkel, unter welchem sich ihre Achsen schneiden.

3) Denkt man sich (s. die letzte Figur) zwei durch O gehende, die Gerade $A+Bx$ in den Punkten M und N schneidende Gerade, welche sich um O so drehen, dafs sie fortwährend auf einander senkrecht stehen, so ist bekanntlich $\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{ON^2}$ während der Drehung constant. Sind nun M' und N' die den Punkten M und N respective entsprechenden Punkte der Parabel $(A+Bx)^2$, und folglich $M'=M^2$ und $N'=N^2$, so folgt aus letzteren Gleichungen, dafs einestheils $OM'=OM^2$ und $ON'=ON^2$, anderntheils der Winkel $M'ON'$ doppelt so grofs als der Winkel MON, also gleich $2R$ ist. Da nun $\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{ON^2}$ constant ist, so mufs auch $\frac{1}{OM'}+\frac{1}{ON'}$ constant sein. Hieraus folgt der Satz:

Dreht sich eine durch den Brennpunkt O einer Parabel gehende und die Parabel in M' und N' schneidende Gerade um den Brennpunkt, so ist während der Drehung $\frac{1}{OM'}+\frac{1}{ON'}$ constant, nämlich $=\frac{1}{OQ}$, wenn Q der Scheitel der Parabel ist.

4) Setzt man $A^2=A'$, $2AB=B'$, $B^2=C'$ in dem Ausdruck $(A+Bx)^2$, so ist $B'^2=4A'C'$ oder

$$\frac{B'}{4C'}=\frac{A'}{B'}.$$

In dieser Gleichung liegen aber die beiden metrischen Bestimmungen $\frac{OB'}{4OC'}=\frac{OA'}{OB'}$ und $\angle B'OI-\angle C'OI=\angle A'OI-\angle B'OI$, oder $B'OC'=A'OB'$. Aus der ersteren folgt: *das Quadrat der Geschwindigkeit des die Parabel beschreibenden Punktes ist gleich dem doppelten Produkte aus der constanten Beschleunigung in den Radius vector des betreffenden Punktes.* Aus der letzteren: *Jede Tangente der Parabel bildet mit dem nach ihrem Berührungspunkt gehenden Radius vector und mit dem Durchmesser gleiche Winkel.*

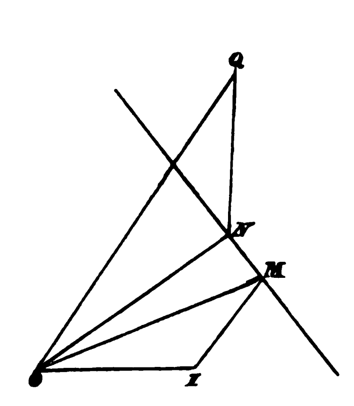
5) Für die Tangente der Parabel $(A+Bx)^2$ in dem dem Werthe x' der Variabeln entsprechenden Punkte erhalten wir den Ausdruck

$$F(x')+xF'(x')=(A+Bx')^2+2B(A+Bx')x.$$

Für letzteren Ausdruck kann man aber auch schreiben $(A+Bx')(A+B(x'+2x))$ oder, wenn man x für $x'+2x$ setzt (also die Geschwindigkeit für die Tangente ändert)

$$(A+Bx')(A+Bx).$$

Aus der Produktform dieses Ausdrucks, welcher für die verschiedenen Werthe von x' alle möglichen Tangenten der Parabel giebt, folgern wir den Satz:



Hat man zwei feste Punkte O und I und eine feste Gerade MN, denkt man sich ferner in letzterer einen festen Punkt M und einen sich in derselben bewegenden Punkt N, und über ON ein Dreieck ONQ construirt, welches dem festen Dreieck OIM ähnlich und gleichstimmig ist, so wird Q eine gerade Linie beschreiben, welche immer Tangente einer und derselben Parabel ist, wo man auch den festen Punkt M in der Geraden annehmen mag. Der Brennpunkt dieser Parabel aber ist in O.

6) Nimmt man in der Tangente $(A+Bx')(A+Bx)$ einen bestimmten Punkt an $(A+Bx')(A+Bx'')$, so liegt derselbe sowohl in $(A+Bx')(A+Bx)$ als auch in $(A+Bx'')(A+Bx)$, ist also der Durchschnittspunkt der beiden Tangenten der Parabel, welche ihre Berührungspunkte in $(A+Bx')^2$ und $(A+Bx'')^2$ haben. Aus dieser Bemerkung lassen sich aber mit Leichtigkeit eine grofse Anzahl von Eigenschaften der Parabel herleiten. Setzen wir z. B. $x'=0$, so erhalten wir $A(A+Bx'')$ als Durchschnittspunkt derjenigen Tangenten, welche ihre Berührungspunkte respective in A^2 und $(A+Bx'')^2$ haben. Bezeichnen wir daher jenen Durchschnittspunkt durch P, jene Berührungspunkte respective durch P' und P'', so dafs also $P=A(A+Bx'')$, $P'=A^2$, $P''=(A+Bx'')^2$, so ist

$$P^2 = P'.P''.$$

Diese Gleichung giebt folgende zwei metrische Bestimmungen

$$(1.)\quad OP^2 = OP'.OP'',$$

d. h. *das Quadrat der Entfernung eines aufserhalb der Parabel liegenden Punktes von dem Brennpunkte ist gleich dem Produkte aus den Radien vectoren, welche sich nach den Berührungspunkten der von jenem Punkte ausgehenden Tangenten ziehen lassen.*

$$(2.)\quad 2POI = P'OI+P''OI$$

oder

$$POP' = POP'',$$

d. h. je zwei Tangenten einer Parabel werden vom Brennpunkte aus unter gleichen Winkeln gesehen; u. s. w.

§. 13.

Aufgabe. Es soll die durch die Funktion $\frac{A+Bx}{Q+Px}$ ausgedrückte Bewegung ermittelt werden.

Auflösung. Zunächst läfst sich die gegebene Funktion stets durch Division mit Q auf die Form $\frac{A+Bx}{1+Px}$, letztere aber durch Substitution von BP für B auf die Form $\frac{A+BPx}{1+Px}$ bringen. Wir wollen uns daher nur mit der letztgenannten Form beschäftigen.

Setzen wir nun $Y=\frac{A+BPx}{1+Px}$, so ist Y in A, wenn $x=0$, ferner Y in B, wenn $x=\infty$. Demnach mufs die fragliche Curve durch A und B gehen.

Aus der Gleichung $Y=\frac{A+BPx}{1+Px}$ folgt aber ferner die folgende

$$Px = \frac{A-Y}{Y-B},$$

welche die beiden metrischen Bestimmungen

$$(1.) \quad x.OP = \frac{AY}{YB},$$

$$(2.) \quad \angle IOP = 2R - AYB$$

involvirt, und zwar nach §. 2, wenn man sich dort Px für X gesetzt denkt.

Da nun $\angle IOP$ constant ist, so mufs nach (2.) auch AYB constant sein. Der Punkt $Y=\frac{A+BPx}{1+Px}$ mufs daher für ein veränderliches x sich so in der Ebene bewegen, dafs der Winkel AYB immer dieselbe Gröfse behält. *Die fragliche Curve ist somit ein Kreis* und zwar derjenige Kreis, in welchem AB Sehne und der zu dieser Sehne gehörige Peripheriewinkel AYB gleich dem Supplementwinkel von IOP ist. Auch folgt aus 1), dafs am Ende der Zeit x $\frac{AY}{YB}=OP.x$ ist. Die Bewegung des Punktes Y geht für ein von 0 bis x wachsendes x von A nach B und zwar auf dem einen der beiden zwischen A und B liegenden Kreisbogen für ein positives, auf dem andern für ein negatives x. Ist unserer bisherigen Annahme entsprechend OI von links nach rechts gerichtet und J über der Hauptachse, wird also die Drehungsrichtung (↶) als positiv genommen, so ist die Kreisbewegung

$\frac{A+BPx}{1+Px}$ für ein positives zunehmendes x $(\curvearrowright)$, also negativ, wenn IOP kleiner als $2R$, positiv, wenn IOP gröfser als $2R$. Ob zwei Kreisbewegungen $\frac{A+BPx}{1+Px}$ und $\frac{A'+B'P'x}{1+P'x}$ einstimmig oder entgegengesetzt sind, läfst sich hiernach leicht beurtheilen.

Ist $IOP=0$ oder $=2R$, so ist der Peripheriewinkel AYB im ersteren Falle $=2R$, im anderen Falle $=0$. In beiden Fällen erhält man eine gerade Linie und zwar ist $OP.x$ gleich dem Schnittverhältnifs $\frac{AY}{YB}$. *Sonach ist allgemein, wenn p eine reelle Zahl ist,* $\frac{A+Bpx}{1+px}$ *Ausdruck einer geraden Linie, in welchem px das Schnittverhältnifs angiebt, nach welchem die Strecke AB durch den die Linie beschreibenden Punkt Y getheilt wird.* So lange px positiv ist, befindet sich Y zwischen A und B, so lange px negativ ist, in der Verlängerung von AB. Für den Mittelpunkt von AB hat man $px=1$ und für den unendlich entfernten Punkt $px=-1$ zu setzen. Die Punktpaare $\frac{A+Bpx}{1+px}$ und $\frac{A-Bpx}{1-px}$ bilden eine Involution, deren Hauptpunkte A und B sind, etc. Wie man sieht, stimmt dies mit dem barycentrischen Calcül überein.

§. 14.

Betrachten wir den Kreis $\frac{A+BPx}{1+Px}$ in seiner Beziehung zu der isogonalen Verwandtschaft $Y=\frac{A+BPX}{1+PX}$, nach welcher er diejenige Curve ist, welche im System Y der Hauptachse in X entspricht. Lassen wir den unabhängigen Punkt X sich, anstatt in der Hauptachse, selbst in einem Kreise $\frac{A'+B'P'x}{1+P'x}$ bewegen, setzen wir also letzteren Ausdruck für x in $\frac{A+BPx}{1+Px}$ ein, so erhalten wir

$$Y=\frac{A+BPA'+(A+BB'P)P'x}{1+PA'+(1+B'P)P'x},$$

also *ebenfalls eine Kreisbewegung,* welche durch die Punkte $\frac{A+BPA'}{1+PA'}$ und $\frac{A+BPB'}{1+PB'}$ geht. Findet also zwischen zwei Figuren die isogonale Verwandtschaft $Y=\frac{A+BPX}{1+PX}$ Statt, *so entspricht jedem Kreise in Y ein Kreis in X, und* (wie sich durch Umkehrung der Gleichung $Y=\frac{A+BPX}{1+PX}$ leicht zei-

gen läfst) ***jedem Kreise in X ein Kreis in Y.*** (Vergl. ***Möbius*** Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung, Leipzig 1855.)

Brennpunkte hat diese Verwandtschaft nicht. Denn setzen wir $F'(X)=\frac{(B-A)P}{(1+PX)^2}=0$, so genügt dieser Gleichung nur ein unendlich grofser Werth von X*). Da uns ein tieferes Eingehen auf diese Verwandtschaft hier nicht gestattet ist, so erlauben wir uns wenigstens die nachstehenden Bemerkungen, da sie weiterhin von Belang sind.

Betrachten wir die Verwandtschaft $Y=\frac{A+BX}{1+X}$, nach welcher umgekehrt $X=\frac{A-Y}{Y-B}$, so liegen in letzterer Gleichung die metrischen Bestimmungen $OX=\frac{AY}{YB}$ und $\angle 1OX=2R-\angle AYB$. Bewegt sich daher X in einer beliebigen durch O gehenden Geraden, so dafs also $1OX$ constant bleibt, so mufs sich Y so bewegen, dafs $\angle AYB$ constant bleibt, also in einem durch A und B gehenden Kreise, was mit dem eben Gesagten übereinstimmt. Einem System von Geraden in X, welche sämmtlich durch O gehen, entspricht daher ein System von Chordalkreisen, welche AB zur Chordale haben. Lassen wir anderentheils X sich in einem um O beschriebenen Kreise bewegen, so dafs also OX constant ist, so mufs Y sich so bewegen, dafs $\frac{AY}{YB}$ constant bleibt. Die der letzteren Bewegung entsprechende Curve mufs aber ein Kreis sein, weil sie für Y einem in X um O beschriebenen Kreise entspricht. Auch mufs, da der um O beschriebene Kreis auf allen durch O gehenden Geraden senkrecht steht, der entsprechende Kreis in Y auf allen Chordalkreisen, welche AB zur Chordale haben, senkrecht stehen. Wir gelangen somit in leichtester Weise zu den Eigenschaften der Orthogonalkreise. Ich will aber hier noch gelegentlich einen leicht abzuleitenden Satz erwähnen, da er wenig oder gar nicht bekannt zu sein scheint.

Denkt man sich in X einen nicht durch O gehenden festen Kreis und eine sich um O drehende Gerade, welche den Kreis in X' und X'' schneidet, so ist bekanntlich $OX'.OX''$ während der Drehung constant. Dieser Figur in X entspricht aber in Y ein nicht durch A gehender (da A in Y dem O

---

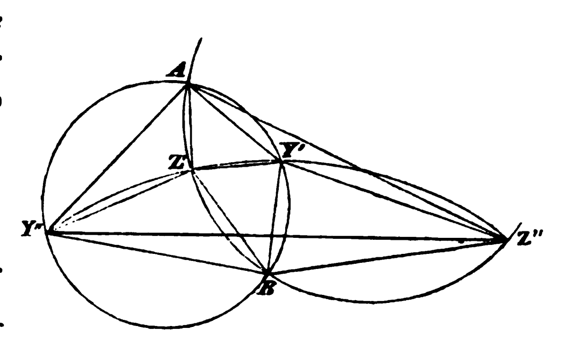
*) Hieraus folgt aber noch nicht, dafs die den geraden Linien in X entsprechenden Kreise in Y keine Brennpunkte haben. Vielmehr kann ein solcher Kreis Brennpunkte zeigen und zeigt sie, wenn man ihn als Glied einer andern isogonalen Verwandtschaft darstellt. Letzteres geschieht durch Transformation des betreffenden Ausdrucks (nach §. 9).

in X entspricht) fester und ein sich fortwährend ändernder Kreis, welcher aber stets durch A und B geht und jenen festen Kreis in Y' und Y'' schneidet. In Folge der Gleichungen $OX' = \frac{AY'}{Y'B}$ und $OX'' = \frac{AY''}{Y''B}$ mufs nun auch das Produkt $\frac{AY'}{Y'B} \cdot \frac{AY''}{Y''B}$ constant sein. Wir können diesen Satz so ausdrücken:

Sind A, B, Y', Y'', Z', Z'' die sechs Durchschnittspunkte dreier Kreise (s. nebenstehende Figur), *so findet die Gleichung*

$$\frac{AY'.AY''}{Y'B.Y''B} = \frac{AZ'.AZ''}{Z'B.Z''B},$$

und folglich auch ebenso die Gleichungen $\frac{Y'Z'.Y'Z''}{Z'Y''.Z''Y''} = \frac{Y'A.Y'B}{AY''.BY''}$ *und* $\frac{Z'Y'.Z'Y''}{Y'Z''.Y''Z''} = \frac{Z'A.Z'B}{AZ''.BZ''}$ *Statt.*



Die Anwendungen, welche dieser Satz gestattet, können wir hier nicht anführen.

Schliefslich wollen wir noch auf die involutorische Kreisverwandtschaft hinweisen, deren einfachster Ausdruck $XY = 1$ ist. Da hier X die reciproke Zahl zu Y ist, so werden wir Curven, welche sich nach dieser Verwandtschaft entsprechen, reciproke Curven nennen.

§. 15.

Aufgabe. Die durch $\frac{A+Bpe^{xi}}{1+pe^{xi}}$ ausgedrückte Bewegung zu ermitteln.

Auflösung. Setzen wir $Y = \frac{A+BX}{1+X}$ und $X = pe^{xi}$, so dafs also Y sich in der zu ermittelnden Curve bewegt, so mufs in Folge der Gleichungen $p = OX = \frac{AY}{YB}$ und $x = lOX = 2R - AYB$, da p constant ist, Y sich so bewegen, dafs das Verhältnifs $\frac{AY}{YB}$ constant ist. Mit Bezugnahme auf das im vorigen §. Gesagte mufs daher Y einen der Orthogonalkreise zu dem System der durch A und B gehenden Chordalkreise beschreiben und zwar denjenigen Orthogonalkreis, für welchen das Verhältnifs $\frac{AY}{YB}$ den constanten Werth p hat. Auch ist am Ende der Zeit x $\angle AYB = 2R - x$.

Die Durchschnittspunkte dieses Kreises mit AB entsprechen den Werthen 0 und π, sind daher $\frac{A \pm Bp}{1 \pm p}$, also harmonische Punkte zu A und B. Ist p und also auch das Verhältnifs $\frac{AY}{YB} = 1$, so beschreibt Y eine Gerade, welche auf AB im Mittelpunkte normal steht.

Die Richtung der Kreisbewegung $\frac{A + Bpe^{xi}}{1 + pe^{xi}}$ ist positiv oder negativ, je nachdem $p < 1$ oder > 1. Hiernach läfst sich leicht beurtheilen, ob zwei unter dieser Form gegebene Kreisbewegungen einstimmig oder entgegengesetzt sind.

Die Punkte A und B sind conjugirte Pole des Kreises $\frac{A + Bpe^{xi}}{1 + pe^{xi}}$. Ist nun $p = 0$ und $B = \infty$, aber so, dafs Bp einen endlichen Werth B hat, so erhält man $Y = A + Be^{xi}$. Hier ist A Mittelpunkt und OB Halbmesser. Fällt also der eine von zwei conjugirten Polen eines Kreises in's Unendliche, so ist der andere im Mittelpunkt.

Anmerkung. Der Gegensatz zwischen den beiden Formen für die geradlinige Bewegung $\frac{A + Bpx}{1 + px}$ und $\frac{A + Be^{xi}}{1 + e^{xi}}$ ist sehr bemerkenswerth. Wir können diese Ausdrücke noch übereinstimmender machen, wenn wir $\frac{A + Be^{\mu + x}}{1 + e^{\mu + x}}$ und $\frac{A + Be^{(\mu + x)i}}{1 + e^{(\mu + x)i}}$ schreiben. In dem ersteren bedeutet $\mu + x$ den Logarithmus eines Schnittverhältnisses, in dem zweiten einen Winkel.

§. 16.

Aufgabe. Es soll die durch $\cos(x + \alpha i)$ ausgedrückte Bewegung ermittelt werden.

Auflösung. Es ist zunächst

$$(I.) \qquad Y = \cos(x + \alpha i) = \tfrac{1}{2}(e^{xi - \alpha} + e^{\alpha - xi}).$$

Bringt man diesen Ausdruck auf die Form $p + qi$, so erhält man

$$Y = a \cos x + ib \sin x,$$

wo $a = \frac{1}{2}(e^{-\alpha} + e^{\alpha})$ und $b = \frac{1}{2}(e^{-\alpha} - e^{\alpha})$.

Hieraus folgt aber, dafs, wenn η und ξ die respectiven Abstände des Punktes Y von der Hauptachse und der zu ihr durch O gezogenen Normalen sind, $\xi = a \cos x$ und $\eta = b \sin x$ ist. Da nun aber $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, so ist auch $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1$, folglich bewegt sich Y in einer *Ellipse*, welche ihren Mittelpunkt im Nullpunkt hat und deren grofse Achse in die Hauptachse

der Ebene fällt. Die grofse Achse ist $2a = e^{-\alpha} + e^{\alpha}$, die kleine Achse $2b = e^{-\alpha} - e^{\alpha}$.

Um die Brennpunkte zu erhalten, brauchen wir nur

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = -\sin(x + \alpha i) = 0$$

zu setzen. Aus letzterer Gleichung folgt aber $\cos(x + \alpha i) = \pm 1$. Die Brennpunkte fallen somit in I und I'.

Um das Bewegungsgesetz zu ermitteln, bemerken wir, dafs in Folge der Gleichung (I.) Y die Mitte der Verbindungslinie der beiden reciproken Punkte $e^{xi-\alpha}$ und $e^{\alpha-xi}$ ist. Durch letztere Punkte werden aber, wenn x sich ändert, Kreise beschrieben, welche respective Halbmesser von der Länge $e^{-\alpha}$ und e^{α} haben; und zwar geschehen beide Kreisbewegungen nach entgegengesetzter Richtung und mit der Winkelgeschwindigkeit 1. Wir haben uns also vorzustellen, dafs die vom Nullpunkt ausgehenden Halbmesser $r = e^{-\alpha}$ und $\varrho = e^{\alpha}$ (im Anfange der Bewegung) auf einander liegen und sich sodann um O nach entgegengesetzter Richtung mit gleicher Winkelgeschwindigkeit drehen. Alsdann beschreibt die Mitte der Verbindungslinie der Endpunkte dieser Halbmesser die Ellipse $\cos(x + \alpha i)$.

Die Bewegung $\cos(x + \alpha i)$ ist einstimmig mit der des Endpunkts des gröfseren Kreishalbmessers, also einstimmig mit $e^{\alpha-xi}$, wenn α positiv ist. Den einem bestimmten Bogen der Ellipse entsprechenden Drehungswinkel der beiden Kreishalbmesser, also die diesem Bogen entsprechende Zunahme von x wollen wir die Amplitude des Bogens nennen.

§. 17.

Versucht man es aus obigen Ausdruck Eigenschaften der Ellipse zu entwickeln, so ereignet sich das Merkwürdige, dafs jede der bekannten goniometrischen Formeln, wie z. B. $\cos^2\mu + \sin^2\mu = 1$, sofern blofs cosinus und sinus in derselben vorkommen, so gedeutet werden kann, dafs sie eine bemerkenswerthe Eigenschaft der Ellipse giebt. Folgende Beispiele werden dies klar machen.

1) Es ist

$$\frac{\partial \cos(x + \alpha i)}{\partial x} = -\sin(x + \alpha i) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} + \alpha i\right).$$

Nun ist aber, wenn wir $\cos(x + \alpha i) = P$ setzen, $\frac{\partial \cos(x + \alpha i)}{\partial x}$ die Richtungsgröfse der Geschwindigkeit im Punkte P der Ellipse. Anderntheils ist, wenn

wir $Q = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} + \alpha i\right)$ setzen, Q ein so in der Ellipse liegender Punkt, dafs die Amplitude des Ellipsenbogens $PQ = \frac{\pi}{2}$ ist. In obiger Gleichung liegen nun aber folgende beide metrische Bestimmungen:

a) die Richtung von OQ kommt mit der Geschwindigkeits-, d. i. Tangentialrichtung in P überein; OQ und OP sind daher conjugirte Halbdurchmesser. Wir können dies so aussprechen: ***Wird ein Ellipsenbogen durch die Endpunkte zweier conjugirten Halbdurchmesser begränzt, so ist die Amplitude dieses Bogens gleich*** $\frac{\pi}{2}$.

b) Die Länge von OQ ist gleich der Geschwindigkeit in P. Also: ***Die Geschwindigkeit in einem beliebigen Punkte ist gleich dem Halbdurchmesser, welcher dem nach dem ersteren Punkte gehenden Halbdurchmesser conjugirt ist.***

Zusatz. Es sind $\cos(x + \alpha i)$ und $\sin(x + \alpha i)$ für jeden beliebigen Werth von x stets die Endpunkte conjugirter Halbdurchmesser. Daher ist $\sin(x + \alpha i)$ ebenfalls Ausdruck einer Ellipse, nämlich derselben, welche durch $\cos(x + \alpha i)$ ausgedrückt wird.

2) Es ist

$$\frac{\partial^2 \cos(x + \alpha i)}{\partial x^2} = -\cos(x + \alpha i).$$

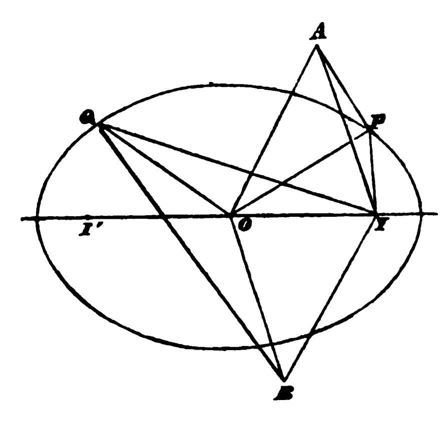
Hieraus folgt unmittelbar: ***die Beschleunigung ist gleich dem Halbmesser und hat mit ihm entgegengesetzte Richtung.***

3) Es ist

$$\cos^2(x + \alpha i) + \sin^2(x + \alpha i) = 1.$$

Setzen wir $P = \cos(x + \alpha i)$ und $Q = \sin(x + \alpha i)$, so sind, da

$$\sin(x + \alpha i) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2} + \alpha i\right)$$



ist, (nach 1) Zusatz) P und Q die Endpunkte conjugirter Halbdurchmesser. Da nun nach obiger Gleichung $P^2 + Q^2 = 1$ ist, so erhalten wir den Satz:

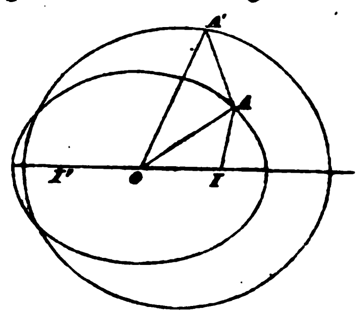
Ist O der Mittelpunkt, I ein Brennpunkt einer Ellipse, sind ferner P und Q die Endpunkte zweier conjugirten Halbdurchmesser und errichtet man über jedem der letztern ein Dreieck OPA und OQB, so dafs OPA ∾ OIP und OQB ∾ OIQ, so ist OBIA ein Parallelogramm.

Zugleich folgt aus $P^2+Q^2=1$ das Wesen der involutorischen isogonalen Verwandtschaft $X^2+Y^2=1$. Sind nämlich X und Y zwei einander nach dieser Verwandtschaft entsprechende Punkte der Ebene, so sind sie die Endpunkte zweier conjugirten Halbdurchmesser einer Ellipse, welche ihre Brennpunkte in ± 1 hat (vergl. oben).

4) Es ist

$$\cos^2(x+ai) = \frac{1+\cos(2x+2ai)}{2}.$$

Um diese Gleichung zu deuten, bemerken wir zunächst, dafs $\cos(2x+2ai)$ offenbar selbst der Ausdruck einer Ellipse ist, da man nur (mit Aenderung der Geschwindigkeit) $2x$ für x zu setzen braucht, um einen Ausdruck von der Form $\cos(x+ai)$ zu erhalten. Da aber die beiden Curven $\cos(2x+2ai)$ und $\frac{1+\cos(2x+2ai)}{2}$ in der Verwandtschaft $Y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}X$ stehen, und dies eine Aehnlichkeitsverwandtschaft ist, so ist $\frac{1+\cos(2x+2ai)}{2}$ ebenfalls Ausdruck einer Ellipse, und zwar liegen ihre Brennpunkte, da $\cos(2x+2ai)=\pm 1$ ist, wenn der Differentialquotient jenes Ausdrucks, nämlich $-\sin(2x+2ai)=0$ gesetzt wird, in $\frac{1\pm 1}{2}$ d. h. in O und I. Die im Eingang dieser Nummer aufgestellte goniometrische Gleichung liefert also folgenden merkwürdigen Satz:



Denkt man sich zwei Ecken O und I eines Dreiecks OIA, von denen die eine O der Mittelpunkt, die andere I ein Brennpunkt einer Ellipse ist, fest, und läfst die dritte Ecke A sich auf der Ellipse bewegen, denkt man sich ferner fortwährend über OA ein Dreieck OAA' construirt, so dafs OIA ∾ OAA', so wird die Ecke A' dieses letzteren sich ebenfalls in einer Ellipse bewegen, welche den Mittelpunkt O und den Brennpunkt I der gegebenen Ellipse zu Brennpunkten hat.

Wächst die Amplitude in $\cos(x+ai)$ um eine bestimmte Gröfse ξ, so wächst offenbar die entsprechende Amplitude in $\frac{1+\cos(2x+2ai)}{2}$ um 2ξ. Wir folgern hieraus, dafs, wenn AB und $A'B'$ entsprechende Bogen beider Ellipsen sind, die Amplitude von $A'B'$ doppelt so grofs ist, als die von AB. Durchläuft also z. B. A auf der zuerst gegebenen Ellipse den zwischen den Endpunkten zweier conjugirten Halbdurchmesser liegenden Bogen, so durchläuft

A' die halbe Ellipse. Andere merkwürdige Beziehungen aufzuführen, müssen wir hier unterlassen.

5) Es ist

$$\cos(x-\alpha i)\sin(x+\alpha i)-\sin(x-\alpha i)\cos(x+\alpha i) = \sin 2\alpha i.$$

Um diese Gleichung zu deuten, nehmen wir an, es seien P und Q zwei einander sehr nahe Punkte der Ellipse $\cos(x+\alpha i)$, also $P=\cos(x+\alpha i)$ und $Q=\cos(x+\partial x+\alpha i)=P-\sin(x+\alpha i).\partial x$. Alsdann ist nach §. 3 der Flächeninhalt des unendlich kleinen Sektors $POQ=\frac{1}{4i}(P\overline{Q}-\overline{P}Q)$, da er als ein Dreieck betrachtet werden kann.

Setzt man in letzterem Ausdruck demnach $P=\cos(x+\alpha i)$ und folglich $\overline{P}=\cos(x-\alpha i)$, $Q=P-\sin(x+\alpha i).\partial x$ und demnach $\overline{Q}=\overline{P}-\sin(x-\alpha i).\partial x$, so erhält man mit Berücksichtigung der im Eingange dieser Nummer aufgestellten Gleichung

$$POQ = \frac{\sin 2\alpha i}{4i}\cdot\partial x = \frac{e^{2\alpha}-e^{-2\alpha}}{8}\,\partial x.$$

Bezeichnen wir nun den von OP und der halben grofsen Achse eingeschlossenen Sektor durch F, und somit POQ durch ∂F, so erhalten wir aus der letzteren Gleichung die folgende:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{e^{2\alpha}-e^{-2\alpha}}{8}.$$

Da folglich der Differentialquotient $\frac{\partial F}{\partial x}$ constant ist, so ersehen wir, dafs *je zwei Sektoren der Ellipse den Amplituden der zugehörigen Bogen proportional sind.* Hierdurch ist aber das Bewegungsgesetz für den Ausdruck $\cos(x+\alpha i)$ charakterisirt. *Es ist nämlich* $\cos(x+\alpha i)$ *derjenige Ausdruck einer elliptischen Bewegung, nach welchem der Halbdurchmesser, welcher zu dem die Ellipse beschreibenden Punkte gehört, in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume überstreicht.*

Der Leser wird nun im Stande sein, selbst goniometrische Gleichungen, wie die obigen, zu deuten. Er wird dann z. B. finden, dafs mit Berücksichtigung von §. 3 aus der Gleichung

$$\cos(x+\alpha i)\cos(x-\alpha i)+\sin(x+\alpha i)\sin(x-\alpha i) = \cos 2\alpha i$$

ohne Weiteres hergeleitet werden kann, dafs die Summe der Quadrate je zweier conjugirten Halbdurchmesser einer Ellipse constant ist; ferner aus der Gleichung

$$\sin(x+\alpha i)\cos(x-\alpha i)-\cos(x+\alpha i)\sin(x-\alpha i) = \sin 2\alpha i,$$

dafs der Inhalt des von zwei conjugirten Halbdurchmessern und der Verbindungslinie ihrer Endpunkte eingeschlossenen Dreiecks constant ist; ferner aus den Gleichungen

$$(1+\cos(x+ai))(1+\cos(x-ai)) = 4\cos^2\tfrac{1}{2}(x+ai)\cos^2\tfrac{1}{2}(x-ai),$$
$$(1-\cos(x+ai))(1-\cos(x-ai)) = 4\sin^2\tfrac{1}{2}(x+ai)\sin^2\tfrac{1}{2}(x-ai),$$

dafs die Summe der Verbindungslinien eines Punktes der Ellipse mit den beiden Brennpunkten constant ist, u. s. w. Wobei wir zugleich bemerken, dafs alle diese Sätze unter der Formel

$$\cos(x\pm y+ai\pm\beta i) = \cos(x+ai)\cos(y+\beta i)\mp\sin(x+ai)\sin(y+\beta i)$$

und folglich auch unter dem aus letzterer abzuleitenden allgemeinen Satze, durch welchen eine Beziehung zwischen drei confocalen Ellipsen $\cos(x+ai)$, $\cos(y+\beta i)$ und $\cos(z+ai+\beta i)$ oder $\cos(z+ai-\beta i)$ ausgedrückt wird, enthalten sein müssen. Dieser umfassende Satz dürfte aber erst bei einer späteren Gelegenheit zu erörtern sein.

§. 18.

Aufgabe. ***Es soll die durch die Funktion*** $\cos(\alpha+xi)$ ***ausgedrückte Bewegung ermittelt werden.***

Auflösung. Es ist zunächst

$$Y = \cos(\alpha+xi) = \tfrac{1}{2}(e^{\alpha i-x}+e^{x-\alpha i}),$$

woraus hervorgeht, dafs Y als die Mitte der Verbindungslinie der Punkte $M=e^{\alpha i-x}$ und $N=e^{x-\alpha i}$ zu denken ist. Diese Punkte beschreiben aber offenbar gerade Linien, welche durch den Nullpunkt gehen, und zwar ist stets $\angle IOM=\alpha$ und $\angle ION=-\alpha$, und somit $MON=2\alpha$. Ferner ist $OM=e^x$ und $ON=e^{-x}$, folglich $OM.ON=1$. Aus letzterer Gleichung folgt aber ohne Weiteres, dafs der in der Mitte zwischen M und N befindliche Punkt Y eine ***Hyperbel*** beschreiben mufs und dafs die Punkte M und N sich in den Asymptoten derselben bewegen. Der von den Asymptoten eingeschlossene Winkel ist daher $=2\alpha$, woraus hervorgeht, dafs $\cos\left(\frac{\pi}{4}+xi\right)$ der Ausdruck einer gleichseitigen Hyperbel ist. Die Brennpunkte fallen natürlich, da wir es hier wieder mit der Verwandtschaft $Y=\cos X$ zu thun haben, wieder nach ± 1. Die Ellipse $\cos(x+ai)$ und die Hyperbel $\cos(\alpha'+xi)$ sind daher confocal.

Dem Leser mufs es überlassen bleiben, hier auf analoge Weise, wie wir es bei der Ellipse gethan haben, durch Anwendung goniometrischer Glei-

chungen Eigenschaften dieser hyperbolischen Bewegung zu ermitteln. Dafs confocale Ellipsen und Hyperbeln auf einander senkrecht stehen, folgt einfach daraus, dafs beide, bei der Verwandtschaft $Y = \cos X$, Geraden im System X entsprechen, welche auf einander senkrecht stehen (nämlich den Geraden $x + \alpha i$ und $\alpha' + xi$).

§. 19.

Aufgabe. Es soll die durch $\dfrac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + xi\right)}$ ausgedrückte Bewegung ermittelt werden.

Auflösung. Setzen wir wieder $Y = \dfrac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + xi\right)}$, so wird der Gleichung $\dfrac{\partial Y}{\partial x} = 0$ genügt, wenn $\sin\left(\frac{\pi}{4} + xi\right) = 0$, also $\dfrac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + xi\right)} = \pm 1$ ist. Die Brennpunkte der fraglichen Curve fallen somit in I und I'. Sei nun P ein beliebiger Punkt der Curve, so ist (nach §. 3)

$$PI = \left(\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + xi\right)} - 1\right)\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - xi\right)} - 1\right),$$

$$PI' = \left(\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + xi\right)} + 1\right)\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - xi\right)} + 1\right).$$

Durch Multiplication dieser Gleichungen und zweckentsprechende Reduction erhalten wir

$$PI.PI' = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + xi\right).\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - xi\right)$$

oder, da $\frac{\pi}{4} + xi$ und $\frac{\pi}{4} - xi$ Complementswinkel sind,

$$PI.PI' = 1.$$

Die vorgegebene Curve hat somit die Eigenschaft, dafs das Produkt der Abstände eines beliebigen Punktes derselben von den beiden Brennpunkten constant ist, nämlich gleich dem Quadrate der halben gegenseitigen Entfernung der Brennpunkte. Sie ist demnach eine *Lemniscate*.

Zugleich ersehen wir, da $\cos\left(\frac{\pi}{4} + xi\right)$ der Ausdruck einer gleichseitigen Hyperbel ist, dafs *die Lemniscate die reciproke Curve einer gleichseitigen Hyperbel ist.* Da hiernach diese beiden Curven in involutorischer Kreisver-

wandtschaft stehen, so läfst sich hieraus eine grofse Anzahl merkwürdiger Eigenschaften der Lemniscate ohne Mühe entwickeln, worauf wir hier um so mehr verzichten müssen, als wir vielleicht später Gelegenheit nehmen werden, die Lemniscate unter einem allgemeineren Gesichtspunkte zu betrachten.

Indem ich diese Betrachtungen einstweilen abbreche, bemerke ich noch, dafs es kein Befremden erregen darf, wenn hier zusammengehörige Curven, wie die Parabel und die Ellipse mittelst scheinbar ganz heterogener Ausdrücke behandelt worden sind. Alle hier vorgebrachten Ausdrücke von Kegelschnitten können auf eine gemeinsame Form gebracht werden, unter welcher auch der im barycentrischen Calcül behandelte Kegelschnitt-Ausdruck

$$\frac{Al+2Bmx+Cnx^2}{l+2mx+nx^2}$$

enthalten ist. Vorläufig galt es nur, nach Aufstellung des Begriffs der isogonalen Verwandtschaft, dem Leser die einfachsten Ausdrücke von Curven vorzuführen, und zugleich gelegentlich an diesen Beispielen zu zeigen, dafs mittelst des Punktcalcüls schon in den ersten Anfängen Bemerkenswerthes geleistet werden kann. Eine vollständige, alle bei den Curven in Betracht kommenden Momente enthaltende Theorie kann erst dann aufgestellt werden, wenn die Lehre von den nicht isogonalen Verwandtschaften, welche auf den Funktionen zweier reellen Variabeln beruhen, abgehandelt sein wird.

Liegnitz, im Juni 1857.

14.

Ueber die Reduction der zweiten Variation auf ihre einfachste Form.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Berlin.)

Seit *Jacobi* durch seine im 17ten Bande dieses Journals erschienene Abhandlung über die zweite Variation der einfachen Integrale der Variationsrechnung neue Wege erschlofs, ist man vielfach damit beschäftigt gewesen, die dort gegebenen Resultate zu beweisen; und noch kürzlich hat eine schöne Abhandlung von *Hesse* (dieses Journal Bd. 54, p. 227) die Darstellung dieser Speculationen zum Gegenstande gehabt. Indefs hat man bis jetzt, soviel ich weifs, nicht daran gedacht, den Resultaten *Jacobi*s diejenige Allgemeinheit zu geben, welche zur Vervollständigung der erwähnten Theorie erforderlich ist. Die Arbeit *Jacobi*s bezieht sich nur auf einfache Integrale, bei welchen in die zu integrirende Function eine einzige abhängige Veränderliche eingeht. Die nothwendige Verallgemeinerung dieser Resultate würde einerseits vielfache Integrale in den Bereich ihrer Betrachtung ziehen, andrerseits den Fall einer gröfseren Anzahl abhängiger Variabeln berücksichtigen. Sie würde sich endlich mit dem Einflusse zu beschäftigen haben, welchen Bedingungsgleichungen zwischen den gesuchten Functionen auf die Gestaltung der zweiten Variation ausüben. Die folgenden Betrachtungen haben den Zweck, in diesen Richtungen einen Schritt weiter zu führen. Ich werde zunächst einfache Integrale betrachten, mit einer beliebigen Anzahl abhängiger Variabeln unter dem Integralzeichen, und begleitet von einer beliebigen Anzahl von Bedingungsgleichungen; ich werde dabei zunächst voraussetzen, dafs nur die ersten Ableitungen der abhängigen Variabeln in den Bedingungsgleichungen und unter dem Integralzeichen vorkommen, so aber, dafs in die Bedingungsgleichungen Variable eingehen können, welche die zu integrirende Function nicht enthält, und umgekehrt. Man wird sehen, wie hiedurch auch die allgemeine Aufgabe gelöst ist:

Die zweite Variation eines einfachen Integrals, welches eine beliebige Anzahl abhängiger Variabeln und beliebige Differentialquotienten derselben enthält, zwischen welchen eine beliebige Anzahl von Bedingungen gegeben ist, auf die kleinste Zahl von Variationen zurückzuführen.

Ein kleiner Abschnitt endlich wird sich mit der zweiten Variation vielfacher Integrale beschäftigen, unter der Voraussetzung, dafs nur eine einzige abhängige Variable und nur die ersten Ableitungen derselben in die zu integrirende Function eingehen.

Derjenige Abschnitt der Variationsrechnung, welcher sich mit der zweiten Variation der einfachen Integrale beschäftigt, darf somit als, in den Umrissen wenigstens, vollständig dargestellt betrachtet werden. Die Kriterien des Maximums und Minimums kommen zurück auf die Betrachtung einer gegebenen Function zweiter Ordnung, welche innerhalb der Grenzen weder ihr Zeichen ändern noch verschwinden darf; und auf die Betrachtung einer gewissen, aus partikulären Integralen der isoperimetrischen Gleichungen zusammengesetzten Determinante, welche innerhalb der Grenzen niemals verschwinden darf.

Die Behandlung vielfacher Integrale, abgesehen von dem betrachteten Falle, scheint noch grofsen Schwierigkeiten zu unterliegen *).

§. 1.

Es bezeichne f eine Function der Functionen $y_1, y_2, \dots y_n$ und ihrer ersten Differentialquotienten nach x, so wie der Gröfse x selbst; die Function, zwischen den Werthen $x=a$ und $x=b$ integrirt, soll ein Maximum oder Minimum werden. Die Functionen y seien in ihrer Unabhängigkeit von einander beschränkt durch die Gleichungen

$$(1.)\quad \varphi_1=0,\quad \varphi_2=0,\quad \dots\quad \varphi_x=0,$$

welche die Functionen y und deren erste Ableitungen enthalten; ohne dafs dabei die Beschränkung hinzugefügt werden soll, dafs nicht in einigen der φ, oder selbst in f gewisse der y und $\frac{dy}{dx}$ ganz fehlen könnten. Man bemerkt übrigens leicht, dafs Bedingungen, wie sie bei den isoperimetrischen Problemen vorkommen, welche erfordern, dafs ein gewisses anderes Integral einen gegebenen Werth habe, auf den Gang der folgenden Untersuchungen keinen wesentlichen Einflufs haben und daher übergangen werden können.

Man behandelt das vorliegende Problem nach dem Vorgange von *Lagrange* bekanntlich so, dafs man den Ausdruck

$$(2.)\quad V=\int_a^b (f+\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\cdots)\,dx$$

*) Gegenwärtig, zur Zeit des Drucks der vorliegenden Abhandlung, ist es mir gelungen, diese Schwierigkeiten zu überwinden, und es wird eine spätere, bereits vollendete Abhandlung die Ausdehnung dieser Transformation auf vielfache Integrale zum Gegenstande haben.

in Bezug auf die in f eingehenden y zu einem Minimum macht, wo die λ gewisse Functionen von x sind. Das Verschwinden der ersten Variation von V giebt dann die Gleichungen:

$$(3.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y_1}+\lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}+\lambda_2\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y_1}+\cdots = \dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{\partial f}{\partial \frac{dy_1}{dx}}+\lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \frac{dy_1}{dx}}+\lambda_2\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \frac{dy_1}{dx}}+\cdots\right\} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y_2}+\lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y_2}+\lambda_2\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y_2}+\cdots = \dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{\partial f}{\partial \frac{dy_2}{dx}}+\lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \frac{dy_2}{dx}}+\lambda_2\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \frac{dy_2}{dx}}+\cdots\right\} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial y_n}+\lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y_n}+\lambda_2\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y_n}+\cdots = \dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{\partial f}{\partial \frac{dy_n}{dx}}+\lambda_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \frac{dy_n}{dx}}+\lambda_2\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \frac{dy_n}{dx}}+\cdots\right\} \end{cases}$$

welche zusammen mit den Gleichungen (1.) hinreichen, um die y und die λ zu bestimmen, so wie gewisse Gleichungen, welche zur Bestimmung der Integrationsconstanten dienen.

Um aber zu entscheiden, ob die gefundenen Werthe der y das Integral V wirklich zu einem Minimum oder Maximum machen, ist es nöthig die zweite Variation zu untersuchen. Setzt man in dem Integral V an die Stelle von $y_1, y_2, \ldots$ die Ausdrücke $y_1+\varepsilon w_1$, $y_2+\varepsilon w_2$ etc., wo die w beliebige Functionen von x, ε aber eine sehr kleine Zahl bedeutet, so geht V über in

$$V+\varepsilon V_1+\varepsilon^2 V_2,$$

und nach dem Vorigen werden die y so bestimmt, dafs V_1 verschwindet. Es mufs dann, damit ein Minimum eintrete, V_2 für alle beliebigen Functionen w positiv, damit ein Maximum eintrete, für alle negativ sein; mit einem Worte, das Vorzeichen von V_2 ist zu discutiren.

Es hat aber V_2 die Gestalt

$$(4.)\quad V_2=\int_a^b F\,dx,$$

wo F ebenso aus $f+\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2\ldots$ entsteht, wie V_2 aus V; so dafs sich also F als eine homogene Function zweiter Ordnung der w und ihrer ersten Differentialquotienten darstellt.

Kann man nun, wie dies in der That möglich ist, durch partielle Integration die Function F in V_2 zurückführen auf eine andere Function zweiter Ordnung mit nur n Argumenten, welche sich als lineare Functionen der w

und ihrer Differentialquotienten darstellen, nämlich auf die Function

$$(5.)\qquad 2\mathrm{F} = c_{11} W_1^2 + c_{22} W_2^2 + 2c_{12} W_1 W_2 + \cdots + c_{nn} W_n^2,$$

so haben die Functionen W vollständig dieselbe Willkürlichkeit wie die Functionen w; und wenn man den w jeden beliebigen Werth beilegen konnte, so kann man bei den W dasselbe thun. Man hat also dann nur das Integral

$$V_2 = \int_a^b \mathrm{F}\,dx$$

zu untersuchen, oder mit andern Worten, das Zeichen der Function F innerhalb der gegebenen Grenzen a, b, und für beliebige Argumente W. In der That, man kann dann nach bekannten Methoden stets F in ein Aggregat von Quadraten zerlegen, dessen Argumente abermals, statt der W, als unabhängige willkürliche Functionen betrachtet werden können; und damit V_2 stets positiv oder stets negativ sei, ist es nöthig und hinreichend, dafs die Coefficienten der Quadrate sämmtlich dasselbe Zeichen haben; wäre einer derselben für einen gewissen Werth von x entgegengesetzten Zeichens, so brauchte man nur die Argumente sämmtlich verschwinden zu lassen, bis auf das entsprechende, und diesem für diesen bestimmten Werth von x einen gewissen Werth beizulegen, um dem ganzen Integral V_2 das entgegengesetzte Zeichen zu geben.

Lassen wir für den Augenblick die Beziehung unserer Betrachtungen zu den Problemen des Maximums und Minimums ganz bei Seite, so kommt also die Aufgabe allein auf die Aufstellung der Function F hinaus.

Aber die w sind nicht vollständig von einander unabhängig; es bestehen nämlich zwischen ihnen die aus den Gleichungen (1.) hervorgehenden Relationen:

$$(6.)\qquad \begin{cases} 0 = w_1 \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} + w_2 \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_2} + \cdots + \dfrac{dw_1}{dx} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\frac{dy_1}{dx}} + \dfrac{dw_2}{dx} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\frac{dy_2}{dx}} + \cdots = \Phi_1 \\ 0 = w_1 \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y_1} + w_2 \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y_2} + \cdots + \dfrac{dw_1}{dx} \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\frac{dy_1}{dx}} + \dfrac{dw_2}{dx} \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\frac{dy_2}{dx}} + \cdots = \Phi_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Es ist daher nicht nöthig, dafs F unmittelbar die Gestalt annehme

$$F = \mathrm{F} + \frac{dB}{dx},$$

wie im Vorigen vorausgesetzt wurde; sondern es kann noch eine lineare Function der Φ hinzutreten, deren Coefficienten wiederum lineare Functionen

der w sind; es kann also werden:

$$(7.)\quad F = \mathrm{F} + \frac{dB}{dx} + \Psi_1\Phi_1 + \Psi_2\Phi_2 + \cdots$$

wo die Ψ von der Form sind:

$$(8.)\quad \Psi_i = C_1^{(i)} w_1 + C_2^{(i)} w_2 + \cdots + C_n^{(i)} w_n.$$

Da es aber darauf ankommt, in der transformirten Function F die W unmittelbar statt der w gebrauchen zu können, so müssen auch die Bedingungsgleichungen (6.) in lineare Bedingungen zwischen den W übergehen; d. h. es mufs sein:

$$(9.)\quad \Phi_i = L_1^{(i)} W_1 + L_2^{(i)} W_2 + \cdots L_n^{(i)} W_n.$$

Endlich, da die Function F aus F durch partielle Integration entstanden sein soll, und also die Glieder, welche die Producte der Differentialquotienten enthalten, sich nicht verändert haben können, müssen die W die Gestalt haben:

$$(10.)\quad W_i = \frac{dw_i}{dx} + \alpha_1^{(i)} w_1 + \alpha_2^{(i)} w_2 + \cdots \alpha_n^{(i)} w_n.$$

Die Aufgabe ist nunmehr vollständig abgegränzt, und läfst sich so aussprechen:

Die Function F, welche homogen und zweiter Ordnung ist in Bezug auf die 2n Gröfsen $w_1, w_2, \ldots, \frac{dw_1}{dx}, \frac{dw_2}{dx}, \ldots,$ soll in drei Theile zerlegt werden, deren einer eine homogene Function F *zweiter Ordnung mit den Argumenten* (10.) *ist, deren zweiter der vollständige Differentialquotient einer homogenen Function zweiter Ordnung der w ist, und deren dritter endlich eine lineare Function von $\varkappa$ gegebenen linearen Ausdrücken* (6.) *der w und ihrer Differentialquotienten ist; während diese Ausdrücke selbst in lineare Functionen der Argumente W übergehen.*

Die Unbekannten des Problems sind die $\frac{n.n+1}{2}$ Coefficienten von B, die n^2 Coefficienten α, welche in die W eingehen, die $n.\varkappa$ Coefficienten C in (8.), und die $n.\varkappa$ Coefficienten L in (9.); zusammen $\frac{n(3n+4\varkappa+1)}{2}$ unbekannte Gröfsen. Die Coefficienten in F sind als solche kaum zu rechnen, da sie unmittelbar den Coefficienten der Produkte $\frac{dw_i}{dx}\cdot\frac{dw_\varkappa}{dx}$ gleich werden. Es sind aber dann vermöge der Gleichung (7.) noch $\frac{2n.2n+1}{2} - \frac{n.n+1}{2} = \frac{n(3n+1)}{2}$,

und wegen der Gleichungen (9.) $2n.\varkappa$ Gleichungen zu erfüllen. Die Zahl der Gleichungen ist also der Zahl der unbestimmten Gröfsen genau gleich, und die Aufgabe daher im allgemeinen möglich.

Unter den Gleichungen, welche aus (7.) entstehen, sind $\frac{n.n+1}{2}$ Differentialgleichungen erster Ordnung. Die Aufgabe führt also $\frac{n.n+1}{2}$ willkürliche Constanten mit sich.

§. 2.

Die Bestimmung der Functionen F, B, Ψ, W hängt mit den Gleichungen (3.) aufs Genaueste zusammen, ebenso wie das Entsprechende bei einem Integrale, welches nur *eine* abhängige Variable enthält, lange bekannt ist. Dieser Zusammenhang soll nun dargestellt werden.

Sei c eine der Constanten, welche die Integration der Gleichungen (3.), (1.) im Allgemeinen mit sich führt, und sei

$$(11.)\qquad \frac{\partial y_i}{\partial c} = u_i, \qquad \frac{\partial \lambda_i}{\partial c} = \mu_i.$$

Dann gehen die Gleichungen (3.), (1.), nach c differentiirt, in die folgenden beiden Systeme über:

$$(12.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Omega}{\partial u_1} = \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial \Omega}{\partial \frac{du_1}{dx}}, \\ \dfrac{\partial \Omega}{\partial u_2} = \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial \Omega}{\partial \frac{du_2}{dx}}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \dfrac{\partial \Omega}{\partial u_n} = \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial \Omega}{\partial \frac{du_n}{dx}}, \end{cases}$$

$$(13.)\qquad \frac{\partial \Omega}{\partial \mu_1} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \mu_2} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \mu_\varkappa} = 0,$$

wo Ω diejenige homogene Function zweiter Ordnung der μ, u, $\frac{du}{dx}$ ist, welche entsteht, sobald in dem Ausdrucke $f+\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\cdots$ an die Stelle von y_1, y_2, ... λ_1, λ_2, ... die Functionen

$$y_1+\varepsilon u_1, \quad y_2+\varepsilon u_2, \quad \dots, \quad \lambda_1+\varepsilon\mu_1, \quad \lambda_2+\varepsilon\mu_2, \quad \dots$$

treten, und in der Entwickelung nach Potenzen von ε der Coefficient von ε^2 genommen wird; Gleichungen, welche man auch als einer Minimumsaufgabe angehörig betrachten kann. Setzt man statt der u die w, so gehen die Glei-

chungen (13.) in die Gleichungen (6.) über; setzt man die μ, welche in diese Gleichungen nicht eingehen, zugleich Null, so verwandelt sich Ω in F.

Die Gleichungen (12.), (13.) bilden ein System von Differentialgleichungen, dessen allgemeine Lösungen die Gestalt haben

$$(14.)\qquad u_i = \Sigma\gamma\frac{\partial y_i}{\partial c},\qquad \mu_i = \Sigma\gamma\frac{\partial \lambda_i}{\partial c},$$

wo die Summe über alle $2n$ Constanten c auszudehnen ist*), und die γ ebensoviel neue Integrationsconstanten bedeuten.

Durch verschiedene Wahl der γ kann man beliebig Systeme der u, μ bestimmen. Es soll im folgenden mit n verschiedenen solcher Systeme gleichzeitig operirt werden; und dieselben sollen durch obere Indices 1, 2, ... n unterschieden werden.

Es gilt zunächst der Satz:

dafs für irgend zwei Systeme

$$\begin{matrix} u_1^{(i)} & u_2^{(i)} & \dots & \mu_1^{(i)} & \mu_2^{(i)} & \dots \\ u_1^{(r)} & u_2^{(r)} & \dots & \mu_1^{(r)} & \mu_2^{(r)} & \dots \end{matrix}$$

der Ausdruck

$$\left\{u_1^{(i)}\frac{\partial\Omega}{\partial\frac{du_1^{(r)}}{dx}}+u_2^{(i)}\frac{\partial\Omega}{\partial\frac{du_2^{(r)}}{dx}}+\dots+u_n^{(i)}\frac{\partial\Omega}{\partial\frac{du_n^{(r)}}{dx}}\right\}$$
$$-\left\{u_1^{(r)}\frac{\partial\Omega}{\partial\frac{du_1^{(i)}}{dx}}+u_2^{(r)}\frac{\partial\Omega}{\partial\frac{du_2^{(i)}}{dx}}+\dots+u_n^{(r)}\frac{\partial\Omega}{\partial\frac{du_n^{(i)}}{dx}}\right\}$$

einer Constanten gleich wird.

In der That, nach den bekannten Eigenschaften der homogenen Functionen zweiter Ordnung, verändert sich der Ausdruck

$$u_1^{(i)}\frac{\partial\Omega}{\partial u_1^{(r)}}+u_2^{(i)}\frac{\partial\Omega}{\partial u_2^{(r)}}+\dots u_n^{(i)}\frac{\partial\Omega}{\partial u_n^{(r)}}+\frac{du_1^{(i)}}{dx}\frac{\partial\Omega}{\partial\frac{du_1^{(r)}}{dx}}+\frac{du_2^{(i)}}{dx}\frac{\partial\Omega}{\partial\frac{du_2^{(r)}}{dx}}+\dots$$
$$+\mu_1^{(i)}\frac{\partial\Omega}{\partial\mu_1^{(r)}}+\mu_2^{(i)}\frac{\partial\Omega}{\partial\mu_2^{(r)}}+\dots$$

nicht, wenn man die Indices i und r vertauscht. Zugleich verschwinden

*) Das System der Gleichungen (1.), (3.) giebt in der That nur $2n$ Constanten. Denn differentiirt man die Gleichungen (1.) nach x, so bilden diese, wie man leicht sieht, mit (3.) ein System, welches $2n+\varkappa$ Constanten verlangt. Die Gleichungen (1.) sind aber $\varkappa$ Integrale dieses Systems, deren Constanten den particularen Werth Null erhalten haben. Es bleiben also für die Gleichungen (1.), (3.) nur $2n$ Constanten übrig.

aber nach (13.) die Coefficienten der μ, und nach (12.) wird das Uebrige ein vollständiges Differential, indem man $\frac{\partial\Omega}{\partial u_1^{(r)}}$ etc. durch $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\frac{du_1^{(r)}}{dx}}\right)$ etc. ersetzen kann. Man hat also die Gleichung:

$$\frac{d}{dx}\left\{u_1^{(i)}\frac{\partial\Omega}{\partial\frac{du_1^{(r)}}{dx}}+u_2^{(i)}\frac{\partial\Omega}{\partial\frac{du_2^{(r)}}{dx}}+\cdots\right\}$$
$$=\frac{d}{dx}\left\{u_1^{(r)}\frac{\partial\Omega}{\partial\frac{du_1^{(i)}}{dx}}+u_2^{(r)}\frac{\partial\Omega}{\partial\frac{du_2^{(i)}}{dx}}+\cdots\right\}$$

Durch Integration folgt hieraus unmittelbar der obige Satz.

Betrachten wir nun genauer diejenigen partikularen Systeme der u, μ, bei welchen diese Integrationsconstante gleich Null wird. Da für diese Systeme

$$(14.)\qquad u_1^{(i)}\frac{\partial\Omega}{\partial\frac{du_1^{(r)}}{dx}}+u_2^{(i)}\frac{\partial\Omega}{\partial\frac{du_2^{(r)}}{dx}}+\cdots=u_1^{(r)}\frac{\partial\Omega}{\partial\frac{du_1^{(i)}}{dx}}+u_2^{(r)}\frac{\partial\Omega}{\partial\frac{du_2^{(i)}}{dx}}+\cdots$$

so kann man immer $\frac{n.n+1}{2}$ Funktion β_{ir} so bestimmen, dafs

$$(15.)\qquad\begin{cases}\dfrac{\partial\Omega}{\partial\frac{du_1^{(r)}}{dx}}=\beta_{11}u_1^{(r)}+\beta_{12}u_2^{(r)}+\cdots\beta_{1n}u_n^{(r)}\\[2ex]\dfrac{\partial\Omega}{\partial\frac{du_2^{(r)}}{dx}}=\beta_{21}u_1^{(r)}+\beta_{22}u_2^{(r)}+\cdots\beta_{2n}u_n^{(r)}\\[1ex]\cdots\cdots\cdots\cdots\\[1ex]\dfrac{\partial\Omega}{\partial\frac{du_n^{(r)}}{dx}}=\beta_{n1}u_1^{(r)}+\beta_{n2}u_2^{(r)}+\cdots\beta_{nn}u_n^{(r)},\end{cases}$$

wo $\beta_{ir}=\beta_{ri}$. Denn die $\frac{n.n-1}{2}$ Beziehungen, welche nöthig sind, damit die $\frac{n.n+1}{2}$ Gröfsen β den n^2 Gleichungen (15.) genügen können, sind eben die $\frac{n.n-1}{2}$ Gleichungen (14.), welche, wie man unmittelbar sieht, durch die Gleichungen (15.), welches auch die Werthe der β seien, identisch erfüllt werden.

Differentiirt man nun die Gleichungen (15.) mit Rücksicht auf die Gleichungen (12.), so erhält man ferner:

$$(16.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\Omega}{\partial u_1^{(r)}} = \dfrac{d\beta_{11}}{dx}u_1^{(r)} + \dfrac{d\beta_{12}}{dx}u_2^{(r)} + \cdots + \beta_{11}\dfrac{du_1^{(r)}}{dx} + \beta_{12}\dfrac{du_2^{(r)}}{dx} + \cdots \\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial u_2^{(r)}} = \dfrac{d\beta_{12}}{dx}u_1^{(r)} + \dfrac{d\beta_{22}}{dx}u_2^{(r)} + \cdots + \beta_{12}\dfrac{du_1^{(r)}}{dx} + \beta_{22}\dfrac{du_2^{(r)}}{dx} + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial u_n^{(r)}} = \dfrac{d\beta_{1n}}{dx}u_1^{(r)} + \dfrac{d\beta_{2n}}{dx}u_2^{(r)} + \cdots + \beta_{1n}\dfrac{du_1^{(r)}}{dx} + \beta_{2n}\dfrac{du_2^{(r)}}{dx} + \cdots. \end{cases}$$

Es ist eine merkwürdige Eigenschaft dieses Systems, dafs sich aus den Gleichungen (15.), (16.) die u und μ vollständig eliminiren lassen, so dafs man ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung für die $\frac{n.n+1}{2}$ Gröfsen β erhält. Die Funktion Ω nämlich hat die folgende Gestalt:

$$(17.)\quad \begin{cases} 2\Omega = a_{11}u_1^2 + a_{22}u_2^2 + 2a_{12}u_1u_2 + \cdots a_{nn}u_n^2 \\ \quad + 2\dfrac{du_1}{dx}(b_1^{(1)}u_1 + b_2^{(1)}u_2 + \cdots b_n^{(1)}u_n) \\ \quad + 2\dfrac{du_2}{dx}(b_1^{(2)}u_1 + b_2^{(2)}u_2 + \cdots b_n^{(2)}u_n) + \cdots \\ \quad + c_{11}\left(\dfrac{du_1}{dx}\right)^2 + c_{22}\left(\dfrac{du_2}{dx}\right)^2 + 2c_{12}\dfrac{du_1}{dx}\dfrac{du_2}{dx} + \cdots c_{nn}\left(\dfrac{du_n}{dx}\right)^2 \\ \quad + 2S\mu\left\{p_1u_1 + p_2u_2 + \cdots p_nu_n + q_1\dfrac{du_1}{dx} + q_2\dfrac{du_2}{dx} + \cdots q_n\dfrac{du_n}{dx}\right\}, \end{cases}$$

wo die Summe S sich auf die $\varkappa$ verschiedenen Systeme der μ, p, q bezieht. Bestimmen wir also n^2 Gröfsen α, welche den Gleichungen genügen:

$$(18.)\quad \begin{cases} \dfrac{du_1^{(r)}}{dx} = \alpha_1^{(1)}u_1^{(r)} + \alpha_2^{(1)}u_2^{(r)} + \cdots \alpha_n^{(1)}u_n^{(r)}, \\ \dfrac{du_2^{(r)}}{dx} = \alpha_1^{(2)}u_1^{(r)} + \alpha_2^{(2)}u_2^{(r)} + \cdots \alpha_n^{(2)}u_n^{(r)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{du_n^{(r)}}{dx} = \alpha_1^{(n)}u_1^{(r)} + \alpha_2^{(n)}u_2^{(r)} + \cdots \alpha_n^{(n)}u_n^{(r)}, \end{cases}$$

und $\varkappa.n$ Gröfsen M_r, welche den Gleichungen genügen:

$$(19.)\quad \begin{cases} \mu^{(1)} = M_1 u_1^{(1)} + M_2 u_2^{(1)} + \cdots M_n u_n^{(1)}, \\ \mu^{(2)} = M_1 u_1^{(2)} + M_2 u_2^{(2)} + \cdots M_n u_n^{(2)}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \mu^{(n)} = M_1 u_1^{(n)} + M_2 u_2^{(n)} + \cdots M_n u_n^{(n)}, \end{cases}$$

so stellen sich die Gleichungen (15.), (16.) als lineare Funktionen der u, gleich Null gesetzt, dar; und wenn man also die Coefficienten dieser u verschwinden läfst, wird aus (15.):

$$(20.)\quad \begin{cases} b_i^{(1)} + c_{11}\alpha_i^{(1)} + c_{12}\alpha_i^{(2)} + \cdots c_{1n}\alpha_i^{(n)} + Sq_1 M_i = \beta_{i1}, \\ b_i^{(2)} + c_{21}\alpha_i^{(1)} + c_{22}\alpha_i^{(2)} + \cdots c_{2n}\alpha_i^{(n)} + Sq_2 M_i = \beta_{i2}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ b_i^{(n)} + c_{n1}\alpha_i^{(1)} + c_{n2}\alpha_i^{(2)} + \cdots c_{nn}\alpha_i^{(n)} + Sq_n M_i = \beta_{in}, \end{cases}$$

während ganz ebenso aus (16.) die Gleichungen hervorgehen:

$$(21.)\quad \begin{cases} a_{i1} + (b_i^{(1)}\alpha_1^{(1)} + b_i^{(2)}\alpha_1^{(2)} + \cdots b_i^{(n)}\alpha_1^{(n)}) + Sp_i M_1 \\ \qquad = \frac{d\beta_{i1}}{dx} + (\beta_{i1}\alpha_1^{(1)} + \beta_{i2}\alpha_1^{(2)} + \cdots), \\ a_{i2} + (b_i^{(1)}\alpha_2^{(1)} + b_i^{(2)}\alpha_2^{(2)} + \cdots b_i^{(n)}\alpha_2^{(n)}) + Sp_i M_2 \\ \qquad = \frac{d\beta_{i2}}{dx} + (\beta_{i1}\alpha_2^{(1)} + \beta_{i2}\alpha_2^{(2)} + \cdots), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{in} + (b_i^{(1)}\alpha_n^{(1)} + b_i^{(2)}\alpha_n^{(2)} + \cdots b_i^{(n)}\alpha_n^{(n)}) + Sp_i M_n \\ \qquad = \frac{d\beta_{in}}{dx} + (\beta_{i1}\alpha_n^{(1)} + \beta_{i2}\alpha_n^{(2)} + \cdots). \end{cases}$$

Bemerken wir noch, dafs aus den Gleichungen (13.), d. h. aus der Gleichung

$$(22.)\quad p_1 u_1^{(r)} + p_2 u_2^{(r)} + \cdots + q_1 \frac{du_1^{(r)}}{dx} + q_2 \frac{du_2^{(r)}}{dx} + \cdots = 0,$$

welche $n.\varkappa$ Gleichungen darstellt, mit Hülfe der Gleichungen (18.) hervorgeht:

$$(23.)\quad \begin{cases} 0 = p_1 + q_1\alpha_1^{(1)} + q_2\alpha_1^{(2)} + \cdots q_n\alpha_1^{(n)}, \\ 0 = p_2 + q_1\alpha_2^{(1)} + q_2\alpha_2^{(2)} + \cdots q_n\alpha_2^{(n)}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ 0 = p_n + q_1\alpha_n^{(1)} + q_2\alpha_n^{(2)} + \cdots q_n\alpha_n^{(n)}, \end{cases}$$

so sieht man, dafs die n^2 Gleichungen (20.) und die $n.\varkappa$ Gleichungen (23.) genügen, um die Functionen M und α ohne Hülfe der μ und u durch die β auszudrücken. Denkt man sich alsdann diese Werthe in (21.) eingeführt, so erhält man Differentialgleichungen erster Ordnung für die β selbst.

Es ist auch leicht die Gleichungen (21.) so umzugestalten, dafs sie sich unmittelbar, wie es nöthig ist, auf $\frac{n.n+1}{2}$ Gleichungen reduciren. Denn man braucht nur die Gleichungen (20.) mit $\alpha_r^{(1)}, \alpha_r^{(2)}, \dots \alpha_r^{(n)}$ zu multipliciren, und von der r^{ten} Gleichung (21.) abzuziehen, indem man die Gleichungen (23.) berücksichtigt, um die für i und r symmetrische Gleichung zu erhalten:

$$(24.)\qquad a_{ir} - \Sigma_\varrho \Sigma_\sigma c_{\varrho\sigma} \alpha_i^{(\varrho)} \alpha_r^{(\sigma)} + S(p_i M_r + p_r M_i) = \frac{d\beta_{ir}}{dx},$$

welche die $\frac{n.n+1}{2}$ gesuchten Gleichungen darstellt.

Da sich die α und M als lineare Functionen der β darstellen, so erhält man also $\frac{d\beta_{ir}}{dx}$ ausgedrückt durch eine bis zur zweiten Ordnung ansteigende Function zweiter Ordnung der β. Die Lösungen dieser Gleichungen aber erhält man, wenn man aus (20.) die β durch die M und α, diese selbst aber aus (18.), (19.) durch jene particularen Lösungen der Gleichungen (12.), (13.) ausdrückt, welche den Bedingungsgleichungen (14.) genügen. Man kann dies auch als Eigenschaft des particularen Systems in folgendem Theorem aussprechen:

Die Bestimmung des particularen Systems der n^2 Gröfsen u führt auf die Lösung eines Systems von $\frac{n.n+1}{2}$ Differentialgleichungen erster Ordnung (24.), *nach dessen Auflösung n getrennte Systeme von je n Differentialgleichungen* (18.) *zu behandeln sind.*

§. 3.

Die Gleichungen (24.) aber sind es, welche zugleich das in §. 1 vorgelegte Problem absolviren.

Multipliciren wir die Gleichungen (24.) mit $w_i w_r$ und summiren nach i und r, so finden wir:

$$(25.)\qquad \Sigma_i \Sigma_r a_{ir} w_i w_r - \Sigma_\varrho \Sigma_\sigma c_{\varrho\sigma} (\alpha_1^{(\varrho)} w_1 + \alpha_2^{(\varrho)} w_2 + \cdots)(\alpha_1^{(\sigma)} w_1 + \alpha_2^{(\sigma)} w_2 + \cdots)$$
$$+ 2S(p_1 w_1 + p_2 w_2 + \cdots)(M_1 w_1 + M_2 w_2 + \cdots) = \Sigma_i \Sigma_r w_i w_r \frac{d\beta_{ir}}{dx}.$$

Die Gleichungen (20.) geben zugleich:

$$(26.)\quad \begin{cases} 2\Sigma_r \frac{dw_r}{dx}(b_1^{(r)}w_1+b_2^{(r)}w_2+\cdots b_n^{(r)}w_n) \\ +\Sigma_\varrho \Sigma_\sigma c_{\varrho\sigma}\left\{\frac{dw_\varrho}{dx}(\alpha_1^{(\sigma)}w_1+\alpha_2^{(\sigma)}w_2+\cdots)+\frac{dw_\sigma}{dx}(\alpha_1^{(\varrho)}w_1+\alpha_2^{(\varrho)}w_2+\cdots)\right\} \\ +2S\left(q_1\frac{dw_1}{dx}+q_2\frac{dw_2}{dx}+\cdots\right)(M_1w_1+M_2w_2+\cdots) \\ =2\left\{\frac{dw_1}{dx}(\beta_{11}w_1+\beta_{12}w_2+\cdots)+\frac{dw_2}{dx}(\beta_{21}w_1+\beta_{22}w_2+\cdots)+\cdots\right\}. \end{cases}$$

Nimmt man nun noch die identische Gleichung hinzu:

$$(27.)\qquad \Sigma_i\Sigma_r c_{ir}\frac{dw_i}{dx}\frac{dw_r}{dx}-\Sigma_\varrho\Sigma_\sigma c_{\varrho\sigma}\frac{dw_\varrho}{dx}\frac{dw_\sigma}{dx}=0$$

und addirt die Gleichungen (25.), (26.), (27.), so erhält man aus den ersten Gliedern der linken Seite gerade die Function F, und es wird:

$$(28.)\qquad 2F-\Sigma_\varrho\Sigma_\sigma c_{\varrho\sigma}W_\varrho W_\sigma$$
$$+2S(M_1w_1+M_2w_2+\cdots)\left(p_1w_1+p_2w_2+\cdots+q_1\frac{dw_1}{dx}+q_2\frac{dw_2}{dx}+\cdots\right)$$
$$=\frac{d}{dx}(\Sigma_i\Sigma_r\beta_{ir}w_iw_r),$$

wo der Kürze wegen gesetzt ist:

$$(29.)\qquad W_\varrho=\frac{dw_\varrho}{dx}-(\alpha_1^{(\varrho)}w_1+\alpha_2^{(\varrho)}w_2+\cdots\alpha_n^{(\varrho)}w_n).$$

Die Gleichung (28.) stimmt, wie man sieht, mit der Gleichung (7.) genau überein, sobald man setzt:

$$(30.)\qquad \begin{cases} -\Psi=M_1w_1+M_2w_2+\cdots M_nw_n \\ 2B=\Sigma_i\Sigma_r\beta_{ir}w_iw_r; \end{cases}$$

denn der Ausdruck Φ, welcher aus einer Bedingungsgleichung φ entstand, wenn man für die y_i den Ausdruck $y_i+\varepsilon w_i$ setzte und den Coefficienten von ε nahm, ist offenbar kein anderer als:

$$(31.)\qquad \Phi=p_1w_1+p_2w_2+\cdots p_nw_n+q_1\frac{dw_1}{dx}+q_2\frac{dw_2}{dx}+\cdots+q_n\frac{dw_n}{dx}.$$

Aber diese Function Φ sollte sich nach (9.) als lineare Function der W darstellen. Nun braucht man endlich nur noch die Gleichungen (23.), (18.) zu beachten, um sogleich zu sehen, dafs Φ die Gestalt annimmt:

$$(32.)\qquad \Phi=q_1W_1+q_2W_2+\cdots q_nW_n=0.$$

Man hat demnach folgendes Theorem bewiesen:

Die zweite Variation $\int F\,dx$ läfst sich immer zurückführen auf die Form $\int \mathrm{F}\,dx$, wo F *diejenige Function ist, welche aus den Termen höchster Ordnung in F hervorgeht, wenn man darin die Differentialquotienten der w durch neue Functionen W ersetzt. Zwischen diesen W bestehen dann noch lineare Beziehungen* (32.) *in gleicher Zahl mit den vorhandenen Bedingungsgleichungen, während sie übrigens willkürlich sind.*

Die Untersuchung des Vorzeichens der zweiten Variation ist so auf die Untersuchung des Zeichens einer homogenen Function zweiter Ordnung zurückgeführt, zwischen deren Argumenten gewisse lineare Beziehungen obwalten.

Die neuen Argumente W drücken sich vermittelst der ursprünglichen w und unserer particularen Integrale in Determinantenform aus. Es wird nämlich aus (18.), (29.):

$$(31.)\qquad W_\varrho = \frac{1}{R}\begin{vmatrix} \frac{dw_\varrho}{dx} & w_1 & w_2 & \dots & w_n \\ \frac{du_\varrho^{(1)}}{dx} & u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & \dots & u_n^{(1)} \\ \frac{du_\varrho^{(2)}}{dx} & u_1^{(2)} & u_2^{(2)} & \dots & u_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{du_\varrho^{(n)}}{dx} & u_1^{(n)} & u_2^{(n)} & \dots & u_n^{(n)} \end{vmatrix},$$

wo R die Determinante der Functionen u bezeichnet. Aus dieser Form sieht man, dafs für die Anwendbarkeit der vorliegenden Transformation die Bedingung auftritt: *dafs sich die in den u enthaltenen willkürlichen Constanten so müssen bestimmen lassen, dafs R innerhalb der Grenzen nicht verschwindet, wenn nicht zugleich sämmtliche Zähler der W verschwinden.*

§. 4.

Die in dem Vorigen angestellten Betrachtungen lassen sich nun unmittelbar auf diejenigen Integrale ausdehnen, welche nicht blos die ersten, sondern beliebig hohe Differentialquotienten der abhängigen Functionen unter

dem Integralzeichen enthalten. Denn setzen wir:

$$(32.)\qquad \frac{dy_i}{dx}=y_i^{(1)},\quad \frac{d^2y_i}{dx^2}=\frac{dy_i^{(1)}}{dx}=y_i^{(2)}\quad \text{etc.},$$

so können wir annehmen, dafs die Function unter dem Integralzeichen nur die y selbst und ihre ersten Differentialquotienten enthalte, während die Gleichungen (32.) als Bedingungsgleichungen hinzutreten. Und so können wir wenigstens zu *einer* Reduction die obigen Betrachtungen anwenden. Es zeigt sich aber, dafs diese Reduction bereits alles Erforderliche leistet.

An die Stelle der u treten in diesem Falle die y mit ihren sämmtlichen Differentialquotienten, bis zu dem zweithöchsten, welcher vorkommt. Betrachten wir also den Ausdruck W_ϱ in (31.), so sehen wir, dafs er wegen Gleichheit zweier Vertikalreihen identisch verschwindet, wenn nicht $\frac{dw_\varrho}{dx}$ den höchsten, w_ϱ selbst den zweithöchsten Differentialquotienten eines y repräsentirt. Wir sehen also, dafs die neue Function F, da ein grofser Theil ihrer Argumente verschwindet, sich reducirt auf eine homogene Function zweiter Ordnung der übrig bleibenden n Argumente W, während die Coefficienten dieselben sind, welche sich in der Function F in die zweiten Dimensionen der jedesmaligen höchsten Differentialquotienten multiplicirt finden. Zwischen den Argumenten aber bestehen noch die den Gleichungen (32.) entsprechenden, die von etwaigen Bedingungsgleichungen herrühren.

Sind die höchsten vorkommenden Differentialquotienten respective die r_1^{ten}, r_2^{ten}, etc. r_n^{ten}, so bedarf man

$$n(r_1+r_2+\cdots r_n)$$

verschiedener Systeme der den u entsprechenden Functionen, welche sich hier aus den Gröfsen

$$\frac{\partial}{\partial c}\,\frac{d^\alpha y_i}{dx^\alpha}$$

auf lineare Weise zusammensetzen. Die Art und Weise wie man diese Systeme zu partikularisiren hat, ergiebt sich unmittelbar aus den Gleichungen (14.).

Als ein Beispiel ergiebt sich der von *Jacobi* behandelte Fall. In der That, sei das Integral gegeben:

$$(33.)\qquad V=\int_a^b f\left(y,\frac{dy}{dx},\cdots\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},\frac{d^ny}{dx^n}\right)dx,$$

so kann man dasselbe zurückführen auf das folgende:

$$(34.)\quad V=\int_a^b\Big\{f\Big(y,y_1,\dots y_{n-1},\frac{dy_{n-1}}{dx}\Big)+\lambda_1\Big(\frac{dy}{dx}-y_1\Big)+\lambda_2\Big(\frac{dy_1}{dx}-y_2\Big)+\cdots\lambda_{n-1}\Big(\frac{dy_{n-2}}{dx}-y_{n-1}\Big)\Big\}dx,$$

wo die y als verschiedene Variable zu betrachten sind, die den Gleichungen unterliegen:

$$(35.)\quad \frac{dy}{dx}-y_1=0,\quad \frac{dy_1}{dx}-y_2=0,\quad \dots\quad \frac{dy_{n-2}}{dx}-y_{n-1}=0.$$

Die Gleichungen, welche die erste Variation von V verschwinden machen, sind nunmehr:

$$(36.)\quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d\lambda_1}{dx}, \\ \frac{\partial f}{\partial y_1}-\lambda_1 = \frac{d\lambda_2}{dx}, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial f}{\partial y_{n-2}}-\lambda_{n-2} = \frac{d\lambda_{n-1}}{dx}, \\ \frac{\partial f}{\partial y_{n-1}}-\lambda_{n-1} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{\partial f}{\partial \frac{dy_{n-1}}{dx}}\right\}, \end{cases}$$

aus denen auch durch Elimination der λ unmittelbar die Gleichung hervorgeht:

$$(37.)\quad \frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_1}+\frac{d^2}{dx^2}\frac{df}{dy_2}-+\cdots=0,$$

welches die gewöhnliche Form ist.

Ist nun c eine der $2n$ Integrationsconstanten der Gleichungen (36.), und

$$(38.)\quad u_i=\Sigma\gamma\frac{\partial y_i}{\partial c},\quad \mu_i=\Sigma\gamma\frac{\partial \lambda_i}{\partial c},$$

so folgen aus (35.), (36.) die Gleichungen:

$$(39.)\quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial u} = \frac{d\mu_1}{dx}, & \frac{du}{dx}=u_1, \\ \frac{\partial F}{\partial u_1}-\mu_1 = \frac{d\mu_2}{dx}, & \frac{du_1}{dx}=u_2, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots \\ \frac{\partial F}{\partial u_{n-2}}-\mu_{n-2} = \frac{d\mu_{n-1}}{dx}, & \frac{du_{n-2}}{dx}=u_{n-1}, \\ \frac{\partial F}{\partial u_{n-1}}-\mu_{n-1} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{\partial F}{\partial \frac{du_{n-1}}{dx}}\right\}, & \end{cases}$$

wo nämlich

$$(40.)\quad 2F = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}u^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y_1}u_1 u + \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2}u_1^2 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial\frac{dy_{n-1}}{dx}\,\partial\frac{dy_{n-1}}{dx}}\left(\frac{du_{n-1}}{dx}\right)^2$$

gesetzt worden.

Zwischen n verschiedenen Systemen $u_i^{(h)}$, $\mu_i^{(h)}$ bestehen dann $\frac{n.n-1}{2}$ Relationen, welche in der Gleichung enthalten sind:

$$(41.)\quad \left\{u^{(h)}\frac{\partial\Omega^{(r)}}{\partial\frac{du^{(r)}}{dx}} + u_1^{(h)}\frac{\partial\Omega^{(r)}}{\partial\frac{du_1^{(r)}}{dx}} + \cdots + u_{n-1}^{(h)}\frac{\partial\Omega^{(r)}}{\partial\frac{du_{n-1}^{(r)}}{dx}}\right\} - \left\{u^{(r)}\frac{\partial\Omega^{(h)}}{\partial\frac{du^{(h)}}{dx}} + u_1^{(r)}\frac{\partial\Omega^{(h)}}{\partial\frac{du_1^{(h)}}{dx}} + \cdots + u_{n-1}^{(r)}\frac{\partial\Omega^{(h)}}{\partial\frac{du_{n-1}^{(h)}}{dx}}\right\} = \text{Const.},$$

wenn

$$(42.)\quad \Omega = F + \mu_1\left(\frac{du}{dx} - u_1\right) + \mu_2\left(\frac{du_1}{dx} - u_2\right) + \cdots \mu_{n-1}\left(\frac{du_{n-2}}{dx} - u_{n-1}\right),$$

und welche in diesem speciellen Falle die folgenden werden:

$$(43.)\quad \left(u^{(h)}\mu_1^{(r)} + u_1^{(h)}\mu_2^{(r)} + \cdots u_{n-2}^{(h)}\mu_{n-1}^{(r)} + u_{n-1}^{(h)}\frac{\partial F^{(r)}}{\partial\frac{du_{n-1}^{(r)}}{dx}}\right) - \left(u^{(r)}\mu_1^{(h)} + u_1^{(r)}\mu_2^{(h)} + \cdots u_{n-2}^{(r)}\mu_{n-1}^{(h)} + u_{n-1}^{(r)}\frac{\partial F^{(h)}}{\partial\frac{du_{n-1}^{(h)}}{dx}}\right) = \text{Const.}$$

Für das gesuchte partikulare System hat man nur Const. = 0 zu setzen. Dann sind die $2n^2$ Constanten der u auf $\frac{n.n+1}{2}$ zurückgeführt; und nunmehr können wir aus den früheren Betrachtungen die neue Form der zweiten Variation unmittelbar hinschreiben, nämlich:

$$(44.)\quad V_2 = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\partial^2 f}{\left(\partial\frac{dy_{n-1}}{dx}\right)^2}\cdot\frac{W^2}{R^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\partial^2 f}{\left(\partial\frac{d^n y}{dx^n}\right)^2}\cdot\frac{W^2}{R^2}\,dx,$$

wo

$$(45.)\quad R = \begin{vmatrix} u^{(1)} & u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & \cdots & u_{n-1}^{(1)} \\ u^{(2)} & u_1^{(2)} & u_2^{(2)} & \cdots & u_{n-1}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u^{(n)} & u_1^{(n)} & u_2^{(n)} & \cdots & u_{n-1}^{(n)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u^{(1)} & \frac{du^{(1)}}{dx} & \cdots & \frac{d^{n-1}u^{(1)}}{dx^{n-1}} \\ u^{(2)} & \frac{du^{(2)}}{dx} & \cdots & \frac{d^{n-1}u^{(2)}}{dx^{n-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u^{(n)} & \frac{du^{(n)}}{dx} & \cdots & \frac{d^{n-1}u^{(n)}}{dx^{n-1}} \end{vmatrix}$$

$$(46.)\quad W = \begin{vmatrix} w & w_1 & w_2 & \dots & \frac{dw_{n-1}}{dx} \\ u^{(1)} & u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & \dots & \frac{du_n^{(1)}}{dx} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u^{(n)} & u_1^{(n)} & u_2^{(n)} & \dots & \frac{du_n^{(n)}}{dx} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} w & \frac{dw}{dx} & \frac{d^2w}{dx^2} & \dots & \frac{d^nw}{dx^n} \\ u^{(1)} & \frac{du^{(1)}}{dx} & \frac{d^2u^{(1)}}{dx^2} & \dots & \frac{d^nu^{(1)}}{dx^n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u^{(n)} & \frac{du^{(n)}}{dx} & \frac{d^2u^{(n)}}{dx^2} & \dots & \frac{d^nu^{(n)}}{dx^n} \end{vmatrix},$$

was die gewöhnliche Form ist.

§. 5.

Ich wende mich nun zu der Betrachtung eines $n$fachen Integrals mit Einer abhängigen Variable. Sei also:

$$(47.)\quad V = \int^{(n)} f\left(y,\ \frac{\partial y}{\partial x_1},\ \frac{\partial y}{\partial x_2},\ \dots\ \frac{\partial y}{\partial x_n},\ x_1,\ \dots\right) dx_1\, dx_2 \dots dx_n.$$

Die Aufgabe, V zu einem Minimum zu machen, erfordert zunächst das Verschwinden der ersten Variation, welches die bekannte partielle Differentialgleichung giebt:

$$(48.)\quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial y}{\partial x_1}} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial y}{\partial x_2}} + \dots \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial y}{\partial x_n}}.$$

Die zweite Variation aber, d. h. der Coefficient von ε^2 in der Entwickelung des Ausdrucks von V, wenn statt y darin $y + \varepsilon w$ gesetzt wird, nimmt dann die Gestalt an:

$$(49.)\quad 2V_2$$

$$= \int^{(n)} \left(a_{00} w^2 + 2a_{01} w \frac{\partial w}{\partial x_1} + 2a_{02} w \frac{\partial w}{\partial x_2} + \dots + a_{11} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 + \dots\right) dx_1\, dx_2 \dots dx_n$$

wo:

$$(49\text{ a.})\quad a_{00} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial y},\quad a_{01} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial \frac{\partial y}{\partial x_1}},\quad a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial \frac{\partial y}{\partial x_1}\, \partial \frac{\partial y}{\partial x_1}},\quad \text{etc.}$$

Es ist die Aufgabe den Ausdruck V_2 auf eine möglichst wenig umfangreiche Form zu reduciren, wozu die partielle Integration das Mittel bietet.

Man kann die Function f, welche unter dem Integralzeichen von V_2 steht, und welche wir $2F$ nennen wollen, immer unter der folgenden Gestalt darstellen:

$$(50.)\quad 2F=\left\{a_{11}\left(\frac{\partial\frac{w}{m}}{dx_1}\right)^2+a_{22}\left(\frac{\partial\frac{w}{m}}{dx_2}\right)^2+2a_{12}\frac{\partial\frac{w}{m}}{\partial x_1}\frac{\partial\frac{w}{m}}{\partial x_2}+\cdots\right\}m^2$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_1}(v_1 w^2)+\frac{\partial}{\partial x_2}(v_2 w^2)+\cdots\frac{\partial}{\partial x_n}(v_n w^2),$$

wo m, v_1, v_2, ... v_n zu bestimmende Functionen sind. Da nun die letzten Glieder sämmtlich einmal integrirt werden können, so reducirt sich dann der ein $n$faches Integral enthaltende Theil von V_2, der uns hier allein interessirt, auf

$$(51.)\quad (V_2)$$
$$=\int^{(n)}\left\{a_{11}\left(\frac{\partial\frac{w}{m}}{\partial x_1}\right)^2+a_{22}\left(\frac{\partial\frac{w}{m}}{\partial x_2}\right)^2+2a_{12}\frac{\partial\frac{w}{m}}{\partial x_1}\frac{\partial\frac{w}{m}}{\partial x_2}+\cdots\right\}m^2\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n,$$

also wiederum auf das Aggregat der höchsten Terme mit verändertem Argument. Diese Reduction geschieht wiederum mit Hülfe der Differentialgleichung (48.), genau so wie bei einfachen Integralen.

In der That, wenn man die Gleichungen aufsucht, welche in der Gleichung (50.) enthalten sind, so werden dies folgende:

$$(52.)\left\{\begin{aligned}
a_{00} &= \frac{1}{m^2}\left(a_{11}\left(\frac{\partial m}{\partial x_1}\right)^2+a_{22}\left(\frac{\partial m}{\partial x_2}\right)^2+2a_{12}\frac{\partial m}{\partial x_1}\frac{\partial m}{\partial x_2}+\cdots a_{nn}\left(\frac{\partial m}{\partial x_n}\right)^2\right)\\
&\qquad+\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+\cdots\frac{\partial v_n}{\partial x_n}\\
a_{01} &= -\frac{1}{m}\left(a_{11}\frac{\partial m}{\partial x_1}+a_{21}\frac{\partial m}{\partial x_2}+\cdots a_{n1}\frac{\partial m}{\partial x_n}\right)+v_1\\
a_{02} &= -\frac{1}{m}\left(a_{12}\frac{\partial m}{\partial x_1}+a_{22}\frac{\partial m}{\partial x_2}+\cdots a_{n2}\frac{\partial m}{\partial x_n}\right)+v_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{0n} &= -\frac{1}{m}\left(a_{1n}\frac{\partial m}{\partial x_1}+a_{2n}\frac{\partial m}{\partial x_2}+\cdots a_{nn}\frac{\partial m}{\partial x_n}\right)+v_n.
\end{aligned}\right.$$

Wenn man nun die v mit Hülfe der letzten Gleichungen aus der ersten eliminirt, so verschwinden zugleich die zweiten Dimensionen der Differential-

quotienten von m, und man erhält einfach:

$$(53.)\quad m\left(a_{00}-\frac{\partial a_{01}}{\partial x_1}-\frac{\partial a_{02}}{\partial x_2}\cdots-\frac{\partial a_{0n}}{\partial x_n}\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i1}\frac{\partial m}{\partial x_1}+a_{i2}\frac{\partial m}{\partial x_2}+\cdots a_{in}\frac{\partial m}{\partial x_n}\right).$$

Wie erhalten aber dieselbe Gleichung auch, wenn wir die Gleichung (48.) nach irgend einer darin enthaltenen Integrationsconstante c differentiiren und dann

$$m=\frac{\partial y}{\partial c}$$

setzen. Der allgemeine Werth von m hat also die Form:

$$(54.)\quad m=\Sigma\gamma\frac{\partial y}{\partial c},$$

wo die Summe auszudehnen ist über alle Integrationsconstanten c, und wo die γ neue Constanten bedeuten.

Die Constanten c in ihrer Gesammtheit bilden die ganze in der Function y auftretende Willkürlichkeit, und dieselbe wird im Allgemeinen derjenigen Unbestimmtheit gleichkommen, welche durch zwei willkürliche Functionen von je $n-1$ Argumenten bedingt wird. Da indefs über die Art und Weise, wie diese Willkürlichkeiten in der Lösung einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung auftreten, nichts bekannt ist, so steht ebensowenig etwas über die Rolle fest, welche die Constanten γ in der Function m spielen. Enthält y eine willkürliche Funktion Π, mit beliebigen Differentialquotienten Π' etc. derselben, welche also einen Theil der Constanten c in sich vereinigt, so geht der entsprechende Theil von m über in

$$\Omega\frac{\partial y}{\partial \Pi}+\Omega'\frac{\partial y}{\partial \Pi'}+\cdots,$$

wo die Ω' wieder die Ableitungen der neuen willkürlichen Function Ω sind, wie Π' die Ableitungen von Π, und wo die Function Ω dieselben Argumente wie Π selber enthält.

Die Grenzen des Integrals müssen so eingeschränkt werden, dafs man im Stande ist, die Constanten γ in einer Weise zu bestimmen, welche die Function m innerhalb der Grenzen niemals verschwinden läfst, da sonst die zu integrirende Function durch das Unendliche gehen würde. Man kann den Sinn dieser Bedingung an dem folgenden Beispiele verdeutlichen.

Es sei $n=2$. Dann können wir y als die dritte Coordinate eines Punktes betrachten, dessen andere Coordinaten x_1, x_2 sind. Das Integral

ist auszudehnen über die Projection eines Theils einer Oberfläche, welche durch die Gleichung:

$$y = f(x_1, x_2, c_1, c_2, \ldots)$$

ausgedrückt ist, und für welche zwei Grenzcurven gegeben sein mögen, durch welche sie hindurchzugehen gezwungen ist. Irgend eine Oberfläche, welche gleichfalls der Gleichung (48.) genügt, und welche der obigen sehr nahe kommt, hat dann die Gleichung:

$$\overline{y} = f(x_1, x_2, c_1 + \varepsilon\gamma_1, c_2 + \varepsilon\gamma_2, \ldots),$$

wo eine sehr kleine Gröfse ist, und die γ beliebige Constanten; oder, wenn man nach Potenzen von ε entwickelt:

$$\overline{y} = y + \varepsilon\left\{\gamma_1 \frac{\partial y}{\partial c_1} + \gamma_2 \frac{\partial y}{\partial c_2} + \cdots\right\}.$$

Diese nächste Oberfläche kann sehr verschieden gewählt werden, da die Constanten γ sehr verschiedene Werthe erhalten können. Sie schneidet die erste Oberfläche in einer Curve, welche durch die Gleichungen dargestellt ist:

$$y = f(x_1, x_2, c_1, c_2, \ldots), \qquad \gamma_1 \frac{\partial y}{\partial c_1} + \gamma_2 \frac{\partial y}{\partial c_2} + \cdots = 0,$$

und welche im Allgemeinen zum Theil innerhalb, zum Theil aufserhalb desjenigen Oberflächentheils liegen wird, über welchen die Integration sich ausdehnt. Damit nun das Integral V_2 einen Sinn habe, ist es nöthig, dafs es eine Combination der γ gebe, für welche der Ausdruck:

$$\gamma_1 \frac{\partial y}{\partial c_1} + \gamma_2 \frac{\partial y}{\partial c_2} +$$

innerhalb des bezeichneten Raumes niemals verschwinde; d. h. es mufs unter allen möglichen nächsten Oberflächen wenigstens *eine* geben, deren Schnittcurve mit der betrachteten Oberfläche ganz aufserhalb des Raumes der Integration liegt.

Berlin, den 5. November 1857.

15.

Eine Bemerkung über Integration linearer Differentialgleichungen.

(Von Herrn *A. Weiler* zu Mannheim.)

Schon *Euler* hat gezeigt, dafs man der linearen Differentialgleichung:

$$\text{(I.)} \quad (a_2+b_2x)y''+(a_1+b_1x)y'+(a_0+b_0x)y = 0$$

genüge durch die Form $y=\int_{u_1}^{u_2} e^{ux}V\,du$, wo V eine Function von u ist, und die Integrationsgrenzen u_1 und u_2 von x unabhängig sind. Nimmt man abkürzend:

$$U_0=a_2u^2+a_1u+a_0 \quad \text{und} \quad U_1=b_2u^2+b_1u+b_0,$$

so findet man den Werth:

$$V=\frac{1}{U_1}e^{\int\frac{U_0}{U_1}du},$$

und die Integrationsgrenzen u_1 und u_2 sind die Wurzeln u der quadratischen Gleichung $U_1=0$. Um das allgemeine Integral der linearen Differentialgleichung darzustellen, bedarf man zwei verschiedener besonderer Integrale. Man findet ein zweites in der Form $y=(a_2+b_2x)^n\int_{u_1}^{u_2} e^{ux}V\,du$. Denn setzt man $y=(a_2+b_2x)^n z$, so geht die Differentialgleichung (I.) über in:

$$\text{(II.)} \quad (a_2+b_2x)z''+(2nb_2+a_1+b_1x)z'+(b_1.n+a_0+b_0x)z = 0,$$

und zur Bestimmung des Exponenten n hat man die Gleichung:

$$b_2^2(n-1)+a_1b_2-a_2b_1 = 0.$$

Die neue Differentialgleichung aber liefert wie vorhin eine andre Form:

$$y=\int_{u_1}^{u_2} e^{ux}V\,du.$$

Für den Fall $b_2^2=a_1b_2-a_2b_1$ hat man $n=0$, und es ist einleuchtend, dafs dann jene beiden besonderen Integrale identisch sind. Für diesen Fall hat Herr *Spitzer* neulich im 54sten Bande dieses Journals S. 280 ein zweites besonderes Integral in der Form:

$$y=\int_{u_1}^{u_2} l((a_2+b_2x)U_1)e^{ux}V\,du$$

entwickelt, wo U_1 und V und die Integrationsgrenzen u_1 und u_2 mit den für die erste Form gegebenen Werthen übereinstimmen.

Ich habe die Mittheilung des Herrn *Spitzer* mit meinen eigenen Resultaten in dem in Rede stehenden Theil der Integralrechnung verglichen, und bei dieser Gelegenheit sind denn einige allgemeine Betrachtungen und Erwägungen in meiner Erinnerung wach geworden, welche, wie ich glaube, allen hierher gehörigen Untersuchungen zur Richtschnur dienen sollten. Wenn gleich dieselben nichts Neues enthalten, so dachte ich doch, es sei nicht ganz überflüssig, bei Gelegenheit darauf zurückzukommen, da vielleicht nicht überall das gehörige Gewicht darauf gelegt wird.

Man erinnere sich zunächst, dafs das allgemeine Integral der linearen Differentialgleichung:

$$Yz'' + Y_1 z' + Y_2 z = 0,$$

worin Y, Y_1 und Y_2 beliebige Functionen von y sind, jedesmal die Form:

$$z = c_1 z_1 + c_2 z_2$$

hat, wo z_1 und z_2 besondere Integrale der linearen Differentialgleichung, c_1 und c_2 aber willkürliche von y unabhängige Gröfsen sind. Daraus schliefst man, wenn irgend ein anderes besonderes Integral z_3 vorliegt, dafs dann jedesmal die Gleichung:

$$z_3 = c_1 z_1 + c_2 z_2$$

besteht, wo c_1 und c_2 bestimmte von y unabhängige Gröfsen sind. Man könnte demnach die Integration jener Differentialgleichung als abgethan betrachten, sobald einmal zwei besondere Integrale z_1 und z_2 bekannt sind. Allein es giebt verschiedene Rücksichten, welche auch weiteren Untersuchungen über die Form des allgemeinen Integrals ein Interesse geben; und diese Rücksichten ins besondere sind es, welche in den vorliegenden Zeilen hervorzuheben beabsichtigt wurde.

Es versteht sich, dafs man derjenigen Form des allgemeinen Integrals den Vorzug geben wird, in der die Gröfsen z_1 und z_2 durch die möglichst einfachen Functionen von y ausgedrückt sind. Man hat also einen Grund, noch weitere besondere Integrale aufzusuchen, wenn dadurch die beiden schon bekannten besonderen Integrale z_1 und z_2 durch andere einfachere Formen ersetzt werden können. Was nun die oben berührte Differentialgleichung:

$$(a_2 + b_2 x)y'' + (a_1 + b_1 x)y' + (a_0 + b_0 x)y = 0$$

angeht, so erhält man, wenn b_2 nicht gleich Null ist, durch einige Transformationen jedesmal die einfachere Gleichung:

$$yz'' + (y - a - b)z' - az = 0,$$

und diese liefert die beiden besonderen Integrale:

$$z_1 = \int_0^\infty e^{-u} u^b (u-y)^a du \qquad (b+1>0)$$

$$z_2 = \int_y^\infty e^{-u} u^b (u-y)^a du \qquad (a+1>0),$$

welche in allen Fällen ihre Gültigkeit behalten. Das von Herrn *Spitzer* aufgestellte besondere Integral gilt aber nur so lange, als nicht $b_2 = 0$ ist; es entspricht hier der Bedingung $a+b+1=0$, oder auch der Differentialgleichung:

$$yz'' + (y+1)z' - az = 0,$$

und zeigt sich also in der Form:

$$(3.) \qquad z_3 = \int_0^1 e^{-uy} u^{-a-1} (u-1)^a l(yu(u-1))\, du.$$

Doch glaube ich nicht, dafs ein Grund vorliegt, diese Form (3.) einer der beiden vorhin angegebenen vorzuziehen, welche für den Fall $a+b+1=0$ durch:

$$(1.) \qquad z_1 = \int_0^\infty e^{-u} u^{-a-1} (u-y)^a du \qquad (-a>0)$$

$$(2.) \qquad z_2 = \int_y^\infty e^{-u} u^{-a-1} (u-y)^a du \qquad (a+1>0)$$

dargestellt werden.

Ich erwähne hier noch eine andere Rücksicht, welche Veranlassung giebt, mehr als zwei besondere Integrale einer linearen Differentialgleichung der zweiten Ordnung aufzusuchen. Wenn nämlich drei solcher Functionen bekannt sind, so hat man jedesmal auch eine endliche Gleichung zwischen diesen drei Functionen; und wenn diese durch drei bestimmte Integrale z_1, z_2 und z_3 sich ausdrücken, so ist durch jene endliche Gleichung:

$$z_3 = c_1 z_1 + c_2 z_2$$

der Weg angedeutet, auf welchem man das eine von diesen bestimmten Integralen auf die beiden anderen zurückführt. Wie nun aber in dem vorliegenden Falle die beiden von y unabhängigen Gröfsen c_1 und c_2 zu bestimmen sind, damit das bestimmte Integral z_3 durch die beiden anderen in (1.) und (2.) gegebenen bestimmten Integrale berechnet werden kann, dies mag für jetzt dahin gestellt sein.

Mannheim, im April 1858.

16.

Théorème sur les déterminants gauches.

(Par M. *A. Cayley.*)

Dans le mémoire intitulé „Recherches ultérieures sur les déterminants gauches", ce journal t. L. pp. 299—313 (1855), j'ai donné une formule pour le développement d'un déterminant gauche bordé; mais j'ai omis de remarquer un cas particulier assez important. La formule générale se rapporte à un déterminant tel que:

$$\overline{\alpha 123|\beta 123} = \begin{vmatrix} \alpha\beta, & \alpha 1, & \alpha 2, & \alpha 3 \\ 1\beta, & 11, & 12, & 13 \\ 2\beta, & 21, & 22, & 23 \\ 3\beta, & 31, & 32, & 33 \end{vmatrix}$$

que l'on obtient en bordant d'une manière quelconque la matrice gauche

$$\begin{pmatrix} 11, & 12, & 13 \\ 21, & 22, & 23 \\ 31, & 32, & 33 \end{pmatrix}.$$

On a par exemple:

$$\begin{aligned} \overline{\alpha 123|\beta 123} = \ & \alpha\beta.11.22.33 \\ & +\alpha\beta.12.12.33 \\ & +\alpha\beta.13.13.22 \\ & +\alpha\beta.23.23.11 \\ & +\alpha 1.\beta 1.22.33 \\ & +\alpha 2.\beta 2.11.33 \\ & +\alpha 3.\beta 3.11.22 \\ & +\alpha 123.\beta 123 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\alpha 1234|\beta 1234} = \ & \alpha\beta.11.22.33.44 \\ & +\alpha\beta.12.12.33.44 \\ & +\ \cdots\cdots \\ & +\alpha\beta 1234.1234 \\ & +\alpha 1.\beta 1.22.33.44 \\ & +\ \cdots\cdots \\ & +\alpha 123.\beta 123.44 \\ & +\ \cdots\cdots \\ & +\alpha 234.\beta 234.11 \end{aligned}$$

où les expressions $\alpha\beta 12$, $\alpha\beta 13$ etc. sont des *Pfaffiens*. Cela étant, le déterminant formé en bordant d'une manière quelconque une matrice gauche et symétrique peut se nommer déterminant gauche et symétrique bordé, et la formule fait voir qu'un déterminant de cette espèce se réduit toujours au produit de deux *Pfaffiens*. En effet en écrivant dans les exemples $11=22=33=44=0$, on obtient:

$$\overline{\alpha 123|\beta 123} = \alpha 123 . \beta 123$$
$$\overline{\alpha 1234|\beta 1234} = \alpha\beta 1234 . 1234$$

et de même pour un déterminant gauche et symétrique bordé quelconque, suivant que l'ordre du déterminant est pair ou impair. Je remarque à propos de cela, que dans le cas d'un déterminant d'ordre pair, le terme $\alpha\beta$ est multiplié par un mineur premier lequel (comme déterminant gauche et symétrique d'ordre impair) se réduit à zéro; le déterminant ne contient donc pas ce terme $\alpha\beta$, et sera par conséquent fonction lineo-linéaire des quantités $\alpha 1$, $\alpha 2$ etc. et 1β, 2β etc.; de manière qu'on ne saurait être surpris de voir ce déterminant se présenter sous la forme d'un produit de deux facteurs, dont l'un est fonction linéaire de $\alpha 1$, $\alpha 2$ etc. et l'autre fonction linéaire de 1β, 2β etc. Mais pour un déterminant d'ordre impair, le coefficient du terme $\alpha\beta$ ne se réduit pas à zéro; en supposant donc que le déterminant puisse s'exprimer comme produit de deux facteurs, il est nécessaire que l'un de ces facteurs soit (comme le déterminant même) fonction linéaire de $\alpha\beta$ et lineo-linéaire de $\alpha 1$, $\alpha 2$ etc. et 1β, 2β etc.; de cette manière on se rend compte de la différence de la forme des facteurs, qui a lieu dans les deux cas dont il s'agit.

En écrivant $\beta=\alpha$ (ce qui implique $\alpha\alpha=0$, car on suppose toujours $\alpha\beta=-\beta\alpha$) le déterminant gauche et symétrique bordé se séduit à un déterminant gauche et symétrique ordinaire, de plus le *Pfaffien* $\alpha\beta 1234$ se réduit à zéro, et les équations deviennent:

$$\overline{\alpha 123|\alpha 123} = (\alpha 123)^2$$
$$\overline{\alpha 1234|\alpha 1234} = 0;$$

savoir, quand l'ordre est pair, le déterminant se réduit au carré d'un *Pfaffien*, et quand l'ordre est impair, le déterminant s'évanouit; ce qui est en effet la propriété fondamentale des déterminants gauches et symétriques.

2 Stone Buildings, Londres, le 16 Nov. 1857.

17.

Ueber die binomische Reihe.

(Von Herrn *E. Heine* zu Halle.)

In den Comptes rendus der Pariser Akademie vom 26[sten] October 1857 p. 641 behandelt *Catalan* die binomische Reihe:

$$f(x) = 1+\frac{n}{1}x+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\cdots$$

für $x=\pm 1$, um eine Lücke zu ergänzen, die er in den geschätztesten Werken bemerkt hat. Es scheint nach dieser Aeufserung nicht allgemein bekannt zu sein, dafs derselbe Gegenstand bereits von *Cauchy* in den Exercices T. I. p. 8 behandelt, und durch *Abel's* sehr allgemeine Untersuchungen über die binomische Reihe im I[sten] Bande dieses Journals oder Oeuvres complètes T. I. p. 66 etc. vollständig erledigt ist. Die Methode dieser Autoren ist von der des Herrn *Catalan* durchaus verschieden; sie betrachten nicht das Restglied, sondern gehn auf dem Wege, auf dem man zu zeigen pflegt, dafs zwei Gleichheiten noch für einen besondern Werth der Veränderlichen bestehen, welcher ursprünglich beim Beweise ausgeschlossen war. Unter diesen Umständen wird es erlaubt sein, an dieser Stelle auf jenen elementaren Gegenstand zurückzukommen, und zusammenzustellen, was zum Beweise der Sätze nöthig ist. Da *Abel* den allgemeinsten Fall eines imaginären n im Auge hat, so habe ich hier, wo es sich um ein reelles n handelt, die allgemeine Untersuchung dem speciellen Falle in der Art angepafst, wie es bereits seit einer Reihe von Jahren in meinen Vorlesungen geschieht.

Da $f(x)$, wenn $x<1$ ist, gleich dem positiven Werthe von $(1+x)^n$ wird, so hat man nur zu untersuchen, ob in den Fällen, in welchen $(1\pm 1)^n$ einen Werth hat, die Reihe noch für $x=\pm 1$ convergirt. Denn eine nach x geordnete convergente Reihe ist eine continuirliche Function von x, ebenso wie $(1+x)^n$ von $x=-1$ bis $x=+1$, letztere mit Ausnahme des Falles, dafs $x=-1$ und zugleich n negativ ist, in welchem übrigens auch die Reihe divergiren wird. Man weifs aber, dafs wenn $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei von $x=a$ bis $x=b$ mit Einschlufs der Grenzen continuirliche Functionen sind, und wenn *innerhalb* der Grenzen die Gleichung $\varphi(x)=\psi(x)$ stattfindet, sie auch *für* die Grenzen besteht.

Wir betrachten I. den Fall eines positiven n, und setzen 1) $x=-1$. Die Summe von 2, 3, ... $(p+1)$ Gliedern wird dann (wie *Gaufs* bemerkt) offenbar respective

$$-\frac{n-1}{1},\quad \frac{(n-1)(n-2)}{1.2},\quad \ldots\quad (-1)^p\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-p)}{1.2.3\ldots p},$$

nimmt also mit wachsendem p fortwährend ab. Die unendliche Reihe hat also eine Summe, und diese ist daher $(1-1)^n=0$.

Wegen eines späteren Falles erwähne ich die Folgerung, dafs jenes summatorische Glied zur Grenze 0 convergirt, dafs daher $\frac{m(m-1)\dots(m-p+1)}{1.2\dots p}$ für $p=\infty$ noch verschwindet, wenn m negativ und kleiner als 1 ist.

Ist 2) $x=+1$, so convergirt $f(x)$ sicher, da die Glieder dieselben Zahlwerthe wie im ersten Falle haben, und die Zeichen von der Stelle an abwechseln, von welcher an sie oben gleich werden. Es ist also $f(1)=2^n$.

Es sei II. n negativ. Dann wachsen die Glieder $1, \frac{n}{1}, \frac{n(n-1)}{1.2}, \dots$ wenn n gröfser als 1 ist, so dafs wenn 1) $x=-1$, die Summe der Reihe wie man sich ausdrückt ∞ wird. Aber auch wenn $n<1$, ist diese Summe noch ∞, indem die Glieder gleiche Zeichen haben, und gröfser sind als die entsprechenden der folgenden:

$$1,\ \frac{n}{1},\ \frac{n.1}{1.2},\ \frac{n.1.2}{1.2.3},\ \dots$$

Setzen wir schliefslich 2) $x=1$, so divergirt nach dem Obigen die Reihe, wenn $n>1$, stellt also nicht 2^n dar; sie convergirt jedoch für $n<1$. Fafst man nämlich das erste und zweite, das dritte und vierte Glied, u. s. f. zusammen, so entsteht die Reihe:

$$\frac{n+1}{1}+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}+\frac{(n+1)n\dots(n-3)}{1.2.3.4.5}+\dots,$$

in der $(n+1)$ positiv ist, die also die halbe Summe von $(1+1)^{n+1}$ und $(1-1)^{n+1}$, also $=2^n$ wird.

Allerdings folgt hieraus nicht unmittelbar, dafs $f(1)$ selbst convergirt; z. B. divergirt die Reihe:

$$(1+1),\quad -\left(1+\frac{1}{1}\right),\quad \left(1+\frac{1}{1.2}\right),\quad -\left(1+\frac{1}{1.2.3}\right),\quad \dots,$$

während diejenige convergirt, welche man durch Zusammenfassen von zwei Gliedern in obiger Art erhält: zu dem Rückschlufs gehört noch die Bedingung, dafs das $(p+1)^{\text{te}}$ Glied für $p=\infty$ verschwindet. Dies ist aber bei $f(1)$ der Fall, indem hier in

$$\frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{1.2\dots p}$$

sich n verhält, wie in I., 1) der Buchstabe m.

Aus dem Obigen folgt, dafs wenn man sich des Ausdrucks bedienen will, 0^n sei für ein negatives n unendlich, dafs dann $f(x)=(1+x)^n$ noch für $x=\pm1$ sei, den einzigen Fall ausgenommen, dafs n negativ und >1, und zugleich $x=1$ ist.

Ist n imaginär, so findet man ähnliche Resultate, indem man nach den Zeichen und Werthen des reellen Theiles von n eintheilt (*Abel,* Bd. I. dieses Journals p. 334), wenn man einmal weifs, welchem Werthe von $(1+x)^n$ für $x<1$ die Reihe $f(x)$ gleich ist. Man kann sich dazu der Sätze bedienen, welche *Gaufs* in seinen Disquis. gen. circa ser. infin. etc. in der Sectio III, §. 16 No. I, II und III angiebt, welche man unmittelbar auf die Moduln oder vielmehr die Normen der Ausdrücke anwendet, die wir oben betrachteten.

Halle, 1858.

18.

Ueber die lineare Abhängigkeit von Functionen einer einzigen Veränderlichen.

(Von Herrn *E. B. Christoffel* in Montjoie.)

Eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung ohne zweiten Theil zwischen y und der unabhängigen Veränderlichen x hat bekanntlich stets n Integrale $y_1, y_2, \ldots y_n$, der Beschaffenheit, dafs es unmöglich ist, n Constanten $a_1, a_2, \ldots a_n$ zu bestimmen, welche den Ausdruck:

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_n y_n = H$$

identisch zu Null machen, ohne dafs zu gleicher Zeit alle diese Constanten verschwinden; es ist in diesem Falle H das complete Integral jener Differentialgleichung. Läfst sich dagegen H durch constante Werthe von $a_1, a_2, \ldots a_n$, die alle oder zum Theil von Null verschieden sind, zum Verschwinden bringen, so reichen die Functionen $y_1, y_2, \ldots y_n$ zur Darstellung des completen Integrals nicht aus. — Ganz ähnliche Verhältnisse finden bei den linearen Differenzengleichungen statt.

Hat man demnach n Integrale einer solchen Gleichung gefunden, so mufs man untersuchen, ob zwischen denselben eine lineare homogene Relation existirt, oder nicht, ob man also aus ihnen das complete, oder nur ein partikulares Integral zusammensetzen kann. Die Entscheidung dieser Frage hängt von analytischen Kriterien ab, welche im Folgenden hergeleitet werden sollen.

Wenn ferner durch die Anwendung dieser Kriterien gefunden ist, dafs zwischen gegebenen Functionen eine lineare homogene Relation besteht, so kann man verlangen, dafs dieselbe wirklich aufgestellt werde. Dabei zeigt es sich, dafs die Werthe der Coefficienten, mit welchen die einzelnen Functionen in dieser Relation behaftet sind, im Allgemeinen von den Grenzen abhängen, zwischen denen die unabhängige Veränderliche liegt, und für andere Grenzen ganz verschieden ausfallen. Die folgende Untersuchung wird lehren, dafs auch die Bestimmung dieser Grenzen nach allgemeinen Prinzipien von Statten geht, so dafs für die beiden Hauptfragen, auf welche man auf diesem Gebiete stöfst, leitende Grundsätze vorhanden sind.

Um die zu dieser Untersuchung erforderlichen Unterscheidungen treffen zu können, ist es nothwendig, den Begriff der Function in folgender Weise zu erweitern.

Es bezeichne x eine Veränderliche, welche *jeden reellen Werth* annehmen kann, m eine zweite Veränderliche, welche *nur positive und negative ganzzahlige Werthe* annimmt. Ist nun eine Function $f(x)$ zwischen den willkürlichen reellen Grenzen a und b gegeben, so stellt die Gleichung $y = f(x)$ eine Curve dar, welche von $x = a$ bis $x = b$ in gegebener Weise verläuft. Die Gleichung $y = f(m)$ dagegen stellt vermöge der über m getroffenen Bestimmung ein System von Punkten dar, deren Abscissen die zwischen den Grenzen a und b enthaltenen ganzen Zahlen sind. Sowie nun $f(x)$ eine Function von x ist, weil es für jedes zwischen a und b liegende x einen bestimmten Werth hat, so ist $f(m)$ eine Function von m, weil es für jedes zwischen a und b liegende m einen bestimmten Werth hat. Da man aber durch jenes System von Punkten beliebig viele unter einander nicht im Mindesten verwandte Curven $y = f_1(x)$ legen kann, so dafs, für jedes zwischen a und b liegende m, $f_1(m) = f(m)$ ist, so sieht man, dafs die Natur dieses Systems von Punkten, nämlich die Function $f(m)$ ganz unabhängig ist von den Werthen, welche $f(x)$ für die nicht ganzzahligen Abscissen annimmt. Man mufs also bei der Definition der Function von m die Vorstellung, dafs sie in einem Ausdrucke enthalten sei, der auch für nicht ganzzahlige Werthe der Veränderlichen gewisse Werthe hat, als ganz unwesentlich fallen lassen, und sich diese Function entweder graphisch durch ein auf bestimmte Axen bezogenes System von Punkten, oder was genau dasselbe ist, numerisch durch eine Tabelle gegeben denken, in welcher die eine Colonne diejenigen Werthe enthält, welche m annehmen kann, während die andere Colonne jedesmal den zugehörigen Functionalwerth liefert.

Da nach dem Gesagten unzählig viele Functionen von x dieselbe Function von m enthalten, so kann durch eine Function von m ohne Hinzufügung weiterer Bedingungen keine einzige Function von x bestimmt sein. Aber es ist wesentlich zu bemerken, dafs man von den Functionen von m zu den Functionen von x übergehen kann. Hängt nämlich $f(m)$ noch von einer willkürlichen Constanten ε in der Weise ab, dafs $f(m) = F(m\varepsilon)$ ist, wo ε nicht anders als in der Verbindung $m\varepsilon$ vorkommt, so setze man $m\varepsilon = x$; dann entspricht der Aenderung von m um eine Einheit die von x um ε, d. h. um

eine Gröfse, welche vermöge ihrer Willkürlichkeit auf jeden Grad von Kleinheit gebracht werden kann.

Auf dieselbe Art, wie die Functionen von m, lassen sich auch Functionen einer Veränderlichen m' definiren, welche sich nicht mehr wie m um constante, sondern um ganz beliebige Differenzen ändert. Aber da die Werthe, welche m' annehmen kann, eine bestimmte Aufeinanderfolge zeigen, so kann man m', und folglich auch jede Function von m' als Function von m betrachten.

Sind $n+1$ Functionen von m gegeben, $f(m)$, $f_1(m)$, .. $f_n(m)$, so kann man stets eine lineare homogene Relation $Af(m)+A_1f_1(m)+\cdots+A_nf_n(m)=0$ aufstellen, in welcher mindestens einer der Coefficienten A, A_1, .. A_n von Null verschieden ist, und welche für bestimmte n aufeinanderfolgende Werthe von m, etwa für $m=m_0$, m_0+1, .. m_0+n-1 gültig ist. In dem besondern Falle, wo diese nämliche Relation auch noch für die Werthe $m=m_0-1$, m_0-2, .. m_0-q; m_0+n, m_0+n+1, .. m_0+n+p stattfindet, nenne ich die Functionen $f(m)$, $f_1(m)$, .. $f_n(m)$ *linearabhängig für die Werthe* $m=m_0-q$, m_0-q+1, .. m_0+n+p. Die Anzahl der Werthe von m, für welche gegebene Functionen von m linearabhängig sind, kann demnach nie kleiner sein, als die Anzahl der Functionen. Es ist nach dem Vorangeschickten kaum nöthig zu bemerken, dafs die Eigenschaft der Linearabhängigkeit sich nicht auf die Functionen $f(x)$, $f_1(x)$, .. $f_n(x)$ bezieht, in welchen jene enthalten sind, sondern nur auf die besondern Werthe, welche diese Functionen für die angegebenen ganzzahligen Werthe von x annehmen. — Sind die gegebenen Functionen in den Intervallen $m=m'$, $m'+1$, .. $m''-1$; $m=m''$, $m''+1$, .. $m'''-1$; ... $m=m^i$, m^i+1, .. m^k-1 linearabhängig, während die Relationen, durch welche diese Abhängigkeit ausgedrückt wird, in den einzelnen Intervallen verschieden sind, so nenne ich die Functionen wieder linearabhängig für die Werthe $m=m'$, $m'+1$, .. m^k-1.

Wenn die gegebenen Functionen in einem bestimmten Intervall den Bedingungen der Linearabhängigkeit nicht genügen, so nenne ich sie *linearunabhängig für die in jenem Intervall enthaltenen Werthe von m.*

Es ist nach dem oben Angedeuteten einleuchtend, wie diese Definitionen auf den Fall einer continuirlichen Veränderlichen x übertragen werden. Will man dieselben benutzen, um zu untersuchen, ob und innerhalb welcher Grenzen die Functionen $f(m)$, $f_1(m)$, .. $f_n(m)$ linearabhängig sind, so mufs man zunächst die Coefficienten A, A_1, .. A_n so bestimmen, dafs die Gleichung

$Af(m)+A_1f_1(m)+\cdots+A_nf_n(m)=0$ für $m=m_0,\ m_0+1,\ ..\ m_0+n-1$ stattfindet, wo m_0 irgend einen besondern Werth von m vorstellt. Ist dies geschehen, so mufs man versuchen, ob diese Gleichung auch noch für einen der Werthe $m=m_0-1$, m_0+n besteht, und wenn eins von beiden der Fall ist, weiter versuchen, ob sie auch noch für folgende Werthe von m gültig bleibt. Man gelangt alsdann von selbst zu den Grenzen, innerhalb derer die Linearabhängigkeit stattfindet. Besteht diese Relation aber nicht mehr für $m=m_0-1$, m_0+n, so mufs man die Coefficienten $A,\ A_1,\ ..\ A_n$ von Neuem für einen andern Werth von m_0 bestimmen, und dasselbe Verfahren wiederholen. Um dieses grade in den wichtigsten Fällen unbrauchbare Verfahren überflüssig zu machen, dienen die im Folgenden zu entwickelnden Kriterien für die Linearabhängigkeit der Functionen von m.

1.

Seien $n+1$ Functionen $f(m),\ f_1(m),\ ..\ f_n(m)$ gegeben, welche für die Werthe $m=m_0,\ m_0+1,\ ..\ m_0+n+p$ linearabhängig sind. Dann mufs $p \gtreqless 0$ sein. Es sind nun drei Fälle möglich:

1) entweder besteht zwischen diesen Functionen nur eine einzige lineare homogene Relation, welche für alle jene Werthe von m gültig ist;

2) oder es bestehen mehrere dieser Relationen, für die nämlichen Werthe von m;

3) oder endlich zerfällt jene Reihe von Werthen in $q+r$ Intervalle (deren jedes aus mehr als n Werthen besteht) von zweierlei Art, so dafs in den q Intervallen der ersten Art eine einzige lineare homogene Relation existirt, während in den r Intervallen der zweiten Art die gegebenen Functionen durch mehr als eine dieser Relationen mit einander verbunden sind. Hierin ist der Fall mitbegriffen, wo eine der Zahlen q oder r gleich Null ist.

Im ersten Falle hat man, wenn m einen der Werthe $m_0,\ m_0+1,\ ..\ m_0+p$ bedeutet, die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&Af(m)+A_1f_1(m)+\cdots+A_nf_n(m)=0,\\
&Af(m+1)+A_1f_1(m+1)+\cdots+A_nf_n(m+1)=0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&Af(m+n)+A_1f_1(m+n)+\cdots+A_nf_n(m+n)=0.
\end{aligned}$$

Setzt man demnach:

$$(1.)\qquad \Sigma\pm f(m)f_1(m+1)\,..\,f_n(m+n)=\Delta(m),$$

$$(2.)\qquad \frac{\partial\Delta(m)}{\partial f_\mu(m+n)}=\Delta_\mu(m),$$

so folgt aus den n ersten jener Gleichungen für ein unbestimmtes ω:

$$(3.)\qquad A_\mu = \omega\Delta_\mu(m).$$

Da nun der Voraussetzung gemäfs wenigstens einer der Coefficienten A_μ von Null verschieden ist, so folgt, *dafs in unserm Falle wenigstens eine der Gröfsen $\Delta_\mu(m)$ für jedes der Reihe m_0, m_0+1, .. m_0+p+1 angehörige m von Null verschieden ist, während die Determinante $\Delta(m)$ für die Werthe $m = m_0$, m_0+1, .. m_0+p verschwindet.*

Im zweiten Falle hat man für jedes der Reihe m_0, m_0+1, .. m_0+p+n angehörige m wenigstens zwei von einander unabhängige Relationen:

$$Af(m)+A_1f_1(m)+\cdots+A_nf_n(m) = 0,$$
$$Bf(m)+B_1f_1(m)+\cdots+B_nf_n(m) = 0,$$

woraus wiederum für die Werthe $m = m_0$, m_0+1, .. m_0+p die Gleichung $\Delta(m) = 0$ folgt. Da aber der Voraussetzung gemäfs die Quotienten $\frac{B}{A}$, $\frac{B_1}{A_1}$, .. $\frac{B_n}{A_n}$ wenigstens zum Theil von einander verschieden sind, so erhält man, wenn aus beiden Gleichungen eine der Functionen f_μ eliminirt wird, stets eine Relation derselben Art zwischen den übrigen Functionen, in welcher wenigstens ein Coefficient von Null verschieden ist. Daraus folgt, *dafs man in diesem Falle nothwendig die Gleichungen $\Delta_\mu(m) = 0$ hat,* wo μ jede der Zahlen 0, 1, .. n, und m einen beliebigen der Werthe m_0, m_0+1, .. m_0+p+1 vorstellt. Bestehen mehr als zwei Relationen zwischen den gegebenen Functionen unabhängig von einander, so erhält man aufser den Gleichungen $\Delta(m) = 0$, $\Delta_\mu(m) = 0$ noch weitere Formeln, welche für unsern Zweck jedoch kein näheres Interesse haben.

Was *den dritten Fall* betrifft, so sieht man leicht, dafs wenn alle in den unentwickelten Determinanten $\Delta(m)$ oder $\Delta_\mu(m)$ vorkommenden Argumente demselben Intervall angehören, sich die in den beiden ersten Fällen gegebenen Erörterungen mit den nöthigen Modificationen wörtlich wiederholen lassen. Liegen diese Argumente dagegen in zwei aufeinanderfolgenden Intervallen, so lassen sich in Bezug auf die in diesen Intervallen stattfindenden Relationen sehr verschiedene Voraussetzungen machen, von denen hier nur eine einzige discutirt werden soll. Nimmt man an, dafs von den linearen Relationen, welche in den einzelnen Intervallen stattfinden, keine auch im andern gültig ist, so kann man augenscheinlich aus diesen Relationen keine allgemeingültigen Gleichungen herleiten, in welchen aus beiden Intervallen bestimmte Functional-

werthe, aber aufser diesen keine andern Gröfsen mehr vorkommen. *Man kann daher über den Werth von $\Delta(m)$ oder $\Delta_\mu(m)$ im Allgemeinen gar nichts festsetzen, sobald die in ihnen vorkommenden Argumente verschiedenen Intervallen angehören; liegen dagegen diese Argumente in demselben Intervall, so ist auf jeden Fall $\Delta(m) = 0$, und es sind aufserdem alle $\Delta_\mu(m)$ gleich Null, oder wenigstens ein Theil derselben von Null verschieden, jenachdem das Intervall von der zweiten oder der ersten Art ist.* Die Anzahl der Werthe von m, für welche die in $\Delta(m)$ vorkommenden Argumente zwei aufeinanderfolgenden Intervallen angehören können, ist gleich n, und kann diese Zahl nicht übersteigen, da jedes Intervall mehr als n Argumente umfafst. *Sind daher $n+1$ Functionen linearabhängig, so kann es vorkommen, dafs n, aber nicht mehr aufeinanderfolgende Werthe ihrer Determinante $\Delta(m)$ von Null verschieden sind. Ist umgekehrt $\Delta(m)$ für mehr als n aufeinanderfolgende Werthe von m von Null verschieden, so können jene Functionen nicht für alle Werthe von m linearabhängig sein.*

2.

Ich gehe jetzt von der Voraussetzung aus, dafs $\Delta(m)$ für die Werthe $m = m_0,\ m_0+1, \ldots m_0+p$ verschwindet, dagegen für die Werthe $m = m_0-1$, m_0+p+1 von Null verschieden ist. Dann gilt der Satz, *dafs die Functionen $f, f_1, \ldots f_n$ für die Werthe $m = m_0,\ m_0+1, \ldots m_0+p+n$ linearabhängig sind.*

Es soll zunächst bewiesen werden, dafs dieser Satz für $n+1$ Functionen gilt, wenn er für n Functionen stattfindet. Setzt man:

$$(1.)\qquad \varphi(m) = Af(m)+A_1f_1(m)+\cdots+A_nf_n(m),$$

und nimmt für die Coefficienten $A, A_1, \ldots A_n$ bestimmte Zahlen, welche den Gleichungen:

$$(2.)\qquad \varphi(m') = 0,\quad \varphi(m'+1) = 0,\quad \ldots\quad \varphi(m'+n-1) = 0$$

genügen, wo m' irgend einen besondern Werth von m bedeutet, so erhält man aus den Gleichungen (2.) und einer der folgenden:

$$Af(m'-1)+A_1f_1(m'-1)+\cdots+A_nf_n(m'-1) = \varphi(m'-1),$$
$$Af(m'+n)+A_1f_1(m'+n)+\cdots+A_nf_n(m'+n) = \varphi(m'+n),$$

die Gleichungen:

$$(3.)\qquad A_\mu\Delta(m'-1) = (-1)^n\varphi(m'-1)\Delta_\mu(m'),$$
$$(4.)\qquad A_\mu\Delta(m') = \varphi(m'+n)\Delta_\mu(m').$$

Ist nun m' eine der Zahlen m_0, m_0+1, .. m_0+p, so verschwindet in (4.) der Voraussetzung zufolge die linke Seite, und man hat:

$$(5.)\qquad \varphi(m'+n)\varDelta_\mu(m') = 0,$$

so dafs entweder $\varphi(m'+n)=0$ ist, oder sämmtliche $\varDelta_\mu(m')$ verschwinden. Es zerfällt daher im Allgemeinen die Reihe m_0, m_0+1, .. m_0+p in Intervalle von zweierlei Art; in denen der ersten Art ist wenigstens eine der Gröfsen $\varDelta_\mu(m')$ von Null verschieden, und es sind daher, wie behauptet, die Functionen $f, f_1, \ldots f_n$ in diesem Intervall linearabhängig. In den Intervallen der zweiten Art, in welchen man die $n+1$ Relationen $\varDelta_\mu(m')=0$ hat, sind je n der gegebenen Functionen linearabhängig vermöge der Voraussetzung, dafs obiger Satz für n Functionen gültig sei. In der That haben die Determinanten $\varDelta_\mu(m)$ dieselbe Form wie $\varDelta(m)$, während sie eine Function weniger enthalten.

In einem Intervall der ersten Art kann nur eine einzige lineare homogene Relation zwischen den gegebenen Functionen stattfinden; in einem der zweiten Art dagegen bestehen in Folge der gemachten Voraussetzungen $n+1$ Relationen, deren jede von einer Function frei ist. Eine Anzahl von $n+1$ Relationen dieser Form kann sich nicht aus einer einzigen Relation herleiten lassen, *es bestehen daher in den Intervallen der zweiten Art mindestens zwei lineare Relationen zwischen den gegebenen Functionen unabhängig von einander.*

Da $\varDelta(m_0-1)=(-1)^n\{f(m_0-1)\varDelta_0(m_0)+f_1(m_0-1)\varDelta_1(m_0)+\cdots\}$ von Null verschieden ist, so mufs von den Gröfsen $\varDelta_\mu(m_0)$, also auch von den zu ihnen proportionalen Gröfsen A_μ, eine wenigstens von Null verschieden sein. Die Werthe m_0, m_0+1, .. m_0+n gehören also zu einem Intervall der ersten Art, in welchem nur eine einzige Relation $\varphi(m)=0$ stattfindet; und diese Gleichung kann wegen (3.) nicht auch für den Werth $m=m_0-1$ bestehen. — Gehört ferner der Werth m_0+p zu einem Intervall der ersten Art, so besteht die in demselben stattfindende lineare Relation wegen (4.) auch für den Werth $m'=m_0+p+n$, während sie unmöglich für den folgenden Werth von m' stattfinden kann. Liegt jener Werth in einem Intervall der zweiten Art, so hat man der Voraussetzung gemäfs mindestens zwei von einander unabhängige lineare Relationen $\psi(m)=0$, $\chi(m)=0$, welche für die Werthe $m_0+p+n-1$, $m_0+p+n-2$, .. stattfinden. Für dieselben Werthe besteht also auch die Relation $\alpha\psi(m)+\beta\chi(m)=0$, in welcher man die Zahlen α und β so bestimmen kann, dafs dieselbe auch für $m=m_0+p+n$

stattfindet. Auch diese Relation kann unmöglich für $m = m_0 + p + n + 1$ stattfinden, wie man leicht sieht, wenn man in (4.) $m' = m_0 + p + 1$ setzt.

Es bleibt nur noch übrig, obigen Satz für zwei Functionen nachzuweisen, da er alsdann auf jede Anzahl von Functionen ausgedehnt werden kann. Dieser Beweis ergiebt sich ohne Weiteres aus dem Vorangehenden, da nämlich in unserm Falle $\varDelta_0(m) = -f_1(m)$, $\varDelta_1(m) = f(m)$ ist, so besteht in den Intervallen der zweiten Art jede beliebige lineare Relation zwischen den gegebenen Functionen, während für die Intervalle der ersten Art die Linearabhängigkeit der gegebenen Functionen bereits nachgewiesen ist. Auch wiederholen sich die Bemerkungen, durch welche die Grenzen nachgewiesen wurden, innerhalb deren die Linearabhängigkeit nothwendig stattfindet.

Aus diesen Beweisen ergeben sich nun weiter folgende Sätze:

1) Damit gegebene $n+1$ Functionen $f(m)$, $f_1(m)$, .. $f_n(m)$ für alle Werthe von m linearunabhängig sind, ist erforderlich und hinreichend, dafs ihre Determinante $\varDelta(m)$ für alle Werthe von m von Null verschieden ist.

2) Ist die Anzahl aufeinanderfolgender Werthe von m, für welche $\varDelta(m)$ von Null verschieden ist, nie gröfser als n, so sind die Functionen $f(m)$, $f_1(m)$, .. $f_n(m)$ für alle Werthe von m linearabhängig.

An diese Sätze, welche in Verbindung mit den im Anfange bewiesenen die vollständigen Kriterien für die Linearabhängigkeit oder Unabhängigkeit gegebener Functionen enthalten, schliefsen sich folgende Bemerkungen, die zur Bestimmung der Grenzen dienen, innerhalb welcher die Linearabhängigkeit im Allgemeinen durch verschiedene lineare Relationen ausgedrückt wird.

3) Sind zwei Intervalle, in welchen $\varDelta(m)$ verschwindet, durch n oder weniger Werthe von m getrennt, für welche $\varDelta(m)$ von Null verschieden ist, so kann keine lineare Relation zwischen den gegebenen Functionen, welche in dem einen Statt findet, auch im andern gültig sein.

Dies ergiebt sich unmittelbar aus dem vorhin geführten Beweise. Ist ferner m' der erste Werth von m in einem Intervall der ersten Art, $m'-1$ der letzte in einem von der zweiten Art, und $\varphi(m) = 0$ die in jenem stattfindende lineare Relation, welche also für $m = m'$, $m'+1$, .. besteht, so ist in (3.) $\varDelta(m'-1) = 0$, dagegen von den Gröfsen $\varDelta_\mu(m')$ mindestens eine von Null verschieden, also nothwendig $\varphi(m'-1) = 0$. Da ferner in der Gleichung $A_\mu \varDelta(m'-2) = (-1)^n . \varphi(m'-2) \varDelta_\mu(m'-1)$ beide Seiten unabhängig von $\varphi(m'-2)$ verschwinden, so kann dieser Werth von Null verschieden sein, so dafs also die Relation $\varphi(m) = 0$ nothwendig für $m = m'-1$, aber nicht auch für

$m = m' - 2$ stattfindet. — Ist ferner $m'+1$ der erste Werth in einem Intervall der zweiten Art, m' der letzte in einem von der ersten Art, und $\varphi(m) = 0$ die in letzterem stattfindende lineare Relation, so ist nach dem vorhin Bewiesenen $\varphi(m'+n) = 0$; aber da in der Gleichung

$$A_\mu \Delta(m'+1) = \varphi(m'+n+1)\Delta_\mu(m'+1)$$

beide Seiten unabhängig von $\varphi(m'+n+1)$ verschwinden, so kann dies von Null verschieden sein.

4) Sind also zwei Intervalle der ersten Art durch eines von der zweiten Art geschieden, so ist die lineare Relation, welche in dem einen stattfindet, nicht nothwendig auch in dem andern gültig.

5) Ist ein Intervall der ersten Art, welches die Werthe $m = m_0$, $m_0+1, \ldots m'_0$ umfafst, durch zwei andere von der zweiten Art begrenzt, so findet in ihm eine einzige lineare Relation statt, welche für die Werthe $m = m_0 - 1, m_0, \ldots m'_0 + n$, aber nicht nothwendig auch noch für die Werthe $m_0 - 2$ und $m'_0 + n + 1$ gültig ist.

Um diese Sätze auf ein Beispiel anzuwenden, nehme ich an, dafs: $\Delta(m) = 0$ ist für jedes m, und dafs sämmtliche $\Delta_\mu(m)$ verschwinden, wenn m einer der Gruppen:

$$m_1,\ m_1+1, \ldots m'_1 - 1;\ m_2,\ m_2+1, \ldots m'_2 - 1;\ \ldots m_\mu,\ m_\mu+1, \ldots m'_\mu - 1$$

angehört, während für jeden andern Werth von m wenigstens eine jener Gröfsen von Null verschieden ist; und sei $m_1 < m'_1 < m_2 < m'_2 \ldots < m_\mu < m'_\mu$. Dann findet zwischen den $n+1$ Functionen eine einzige lineare Relation statt für $m = -\infty, \ldots m_1 + n - 1$; eine andere für $m = m'_1 - 1, m'_1, \ldots m_2 + n - 1$; eine dritte für $m = m'_2 - 1, m'_2, \ldots m_3 + n - 1$; u. s. f.; und endlich eine im Allgemeinen von jenen verschiedene für $m = m'_\mu - 1, m'_\mu, \ldots \infty$. Dagegen sind jede beliebige n von den gegebenen Functionen linearabhängig für die Werthe $m = m_1, m_1+1, \ldots m'_1 + n - 2$; $m = m_2, m_2+1, \ldots m'_2 + n - 2$; $\ldots m = m_\mu, m_\mu + 1, \ldots m'_\mu + n - 2$, und es finden in den einzelnen Intervallen im Allgemeinen verschiedene lineare Relationen statt.

3.

Ich werde jetzt die lineare Differenzengleichung:

$$(1.)\quad P(m)f(m+n) + P_1(m)f(m+n-1) + \cdots + P_n(m)f(m) = 0$$

untersuchen, in welcher die Coefficienten $P, P_1, \ldots P_n$ analytische Functionen von m sind, und dabei die erlaubte Voraussetzung machen, dafs für

keinen Werth von m sämmtliche Coefficienten verschwinden. Ist dies nämlich nicht der Fall, so darf man (1.) nur durch eine Function $\varphi(m)$ dividiren, welche nur dann verschwindet, wenn sämmtliche Coefficienten verschwinden, und sich jedesmal in derselben Weise der Null nähert, wie derjenige Coefficient, welcher von allen am langsamsten gegen Null convergirt. Ebenso werde ich voraussetzen, dafs für keinen Werth von m einer oder mehrere dieser Coefficienten unendlich grofs werden.

Es handelt sich bei dieser Untersuchung, wie im Folgenden bei den linearen Differentialgleichungen, wesentlich darum, genau festzusetzen, welchen Grad von Allgemeinheit das complete Integral einer solchen Gleichung im Allgemeinen, und welchen dasselbe unter gewissen Bedingungen erreichen kann. Dieser Grad hängt ab von der Anzahl linearunabhängiger Functionen, durch welche jener Gleichung und gleichzeitig etwaigen Bedingungen genügt wird.

Das allgemeinste Verfahren zur Integration von (1.) besteht darin, dafs man die Werthe $f(m_0)$, $f(m_0+1)$, .. $f(m_0+n-1)$ der gesuchten Function als willkürlich gegeben betrachtet, und dann mittelst (1.) die Werthe $f(m_0+n)$, $f(m_0+n+1)$, .. $f(m_0+n+p)$ successive bestimmt. Ist dies geschehen, und giebt man der Function $f(m)$ für alle übrigen Werthe von m einen willkürlichen Verlauf, so sage ich der Kürze wegen, dafs sie der Gleichung (1.) für die Werthe:

$$\text{(a.)}\qquad m = m_0,\ m_0+1,\ \ldots\ m_0+p$$

genügt.

Sind n Functionen $f_1(m)$, $f_2(m)$, .. $f_n(m)$ gegeben, welche der Gleichung (1.) für die Werthe (a.) genügen, so hat man demnach für die nämlichen Werthe von m:

$$\text{(2.)}\quad \begin{cases} P(m)f_1(m+n)+P_1(m)f_1(m+n-1)+\cdots+P_n(m)f_1(m)=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P(m)f_n(m+n)+P_1(m)f_n(m+n-1)+\cdots+P_n(m)f_n(m)=0, \end{cases}$$

und wenn man hieraus die Coefficienten P_1, P_2, .. P_{n-1} eliminirt, nach der frühern Bezeichnung:

$$\text{(3.)}\qquad P(m)\Delta_0(m+1) = (-1)^n P_n(m)\Delta_0(m).$$

Mittelst dieser Gleichung läfst sich nun zunächst leicht nachweisen, dafs unter gewissen Umständen n linearunabhängige Integrale der Gleichung (1.) existiren. Setzt man nämlich voraus, dafs die Coefficienten $P(m)$ und $P_n(m)$ für die Werthe (a.) von Null verschieden sind, so kann man die willkürlichen

Werthe $f_1(m_0)$, $f_1(m_0+1)$, .. $f_1(m_0+n-1)$, $f_2(m_0)$ etc. immer so annehmen, dafs $\Delta_0(m_0)$ von Null verschieden ist. Da somit auch $\Delta_0(m_0+1)$, $\Delta_0(m_0+2)$, .. $\Delta_0(m_0+p+1)$ von Null verschieden sind, so folgt nach dem Frühern, dafs die Functionen f_1, f_2, .. f_n für die Werthe:

$$\text{(b.)} \qquad m = m_0, \; m_0+1, \; .. \; m_0+p+n$$

linearunabhängig sind.

Ich werde jetzt umgekehrt beweisen, dafs für alle Werthe von m, für welche n linearunabhängige Functionen der Gleichung (1.) genügen sollen, die Gröfsen $P(m)$ und $P_n(m)$ von Null verschieden sein müssen.

Sind die vorhin gegebenen Functionen für die Werthe (b.) linearunabhängig, so ist $\Delta_0(m)$ von Null verschieden für $m = m_0$, m_0+1, .. m_0+p+1, also in der ganzen Ausdehnung der Gleichung (3.) weder $\Delta_0(m)$ noch $\Delta_0(m+1)$ gleich Null. Es ist daher nicht möglich, dafs eine der Gröfsen $P(m)$ und $P_n(m)$, aber nicht zugleich die andere verschwinde; und umgekehrt würde, wenn dies der Fall wäre, eine der Gröfsen $\Delta_0(m)$ und $\Delta_0(m+1)$ gleich Null sein, also eine Linearabhängigkeit zwischen den gegebenen Functionen bestehen. Die Coefficienten $P(m)$ und $P_n(m)$ können aber auch für keinen der Werthe (a.) zugleich verschwinden. Setzt man nämlich $\frac{\partial \Delta_0(m)}{\partial f_\mu(m)} = \Delta_{0,\mu}(m)$, woraus:

$$\begin{aligned} \Delta_0(m) &= f_1(m)\Delta_{0,1}(m) + f_2(m)\Delta_{0,2}(m) + \cdots \\ (-1)^{n-1}\Delta_0(m+1) &= f_1(m+n)\Delta_{0,1}(m) + f_2(m+n)\Delta_{0,2}(m) + \cdots \end{aligned}$$

folgt, so ergiebt sich unter der Voraussetzung $P(m) = 0$ und $P_n(m) = 0$ aus den Gleichungen (2.), dafs entweder sämmtliche Coefficienten der Gleichung (1.), oder sämmtliche Gröfsen $\Delta_{0,\mu}(m)$ verschwinden. Das Erstere ist gleich im Anfange ausgeschlossen worden; wäre das Andere der Fall, so hätte man auch $\Delta_0(m) = 0$, $\Delta_0(m+1) = 0$, woraus der Voraussetzung zuwider die Linearabhängigkeit der gegebenen Functionen für die Werthe von m, $m+1$, .. $m+n$ folgt.

Bezeichnet man demnach durch m' die besonderen Werthe von m, für welche einer der Coefficienten $P(m)$ und $P_n(m)$, oder beide zugleich verschwinden, so hat man folgende Regeln:

1) Gegebene n Functionen, welche der Gleichung (1.) für einen der Werthe m' genügen, können nicht linearunabhängig sein.

2) Will man die Gleichung (1.) durch n linearunabhängige Functionen

integriren, so ist dazu erforderlich, dafs für keinen der Werthe m' jede dieser Functionen der Gleichung (1.) Genüge leiste.

3) Hat man umgekehrt n linearunabhängige Functionen, welche der Gleichung (1.) in bestimmten Intervallen genügen, so kann es unter den Werthen m' keinen geben, für welchen sämmtliche Functionen der Gleichung (1.) genügen.

4) Stellt man bei der Integration der Gleichung (1.) die Bedingung, dafs das gesuchte Integral jener Gleichung auch noch für einen der Werthe m' genüge, so giebt es keine n, sondern höchstens $n-1$ linearunabhängige Functionen, welche diesen Bedingungen genügen, und ihre Anzahl kann durch weitere Bedingungen auch noch weiter reducirt werden.

Aus diesen Sätzen folgt, dafs bei der Integration der Gleichung (1.) die erste Aufgabe darin besteht, die besondern Werthe m' zu ermitteln. Dadurch zerfällt die Reihe der Werthe von m in Intervalle, zwischen denen die Werthe m' eingeschaltet sind; in jedem einzelnen Intervall mufs die Integration besonders vorgenommen werden.

Hieran schliefst sich der bekannte Satz, dafs die Gleichung (1.) nie mehr als n linearunabhängige Integrale haben kann. Denn genügen die Functionen $f, f_1, \dots f_n$ jener Gleichung für die Werthe (a.), so folgt $\Delta(m)=0$, woraus sich weiter ergiebt, dafs diese Functionen für die Werthe (b.) linearabhängig sind. Bilden die Werthe (a.) eines der eben beschriebenen Intervalle, und sind in demselben die Functionen $f_1, f_2, \dots f_n$ linearunabhängig, so sind $\Delta_0(m_0)$, $\Delta_0(m_0+1)$, .. $\Delta_0(m_0+p+1)$ von Null verschieden, und es besteht für die Werthe (b.) eine einzige lineare Relation:

$$Af(m)+A_1f_1(m)+\dots+A_nf_n(m)=0,$$

in welcher A von Null verschieden sein mufs. Denn, wäre $A=0$, so müfsten wegen der Linearunabhängigkeit von $f_1, f_2, \dots f_n$ auch die übrigen Coefficienten $A_1, A_2, \dots A_n$ verschwinden. Es besteht also für sämmtliche Werthe (b.) eine einzige Relation von der Form:

$$f(m) = a_1f_1(m)+a_2f_2(m)+\dots+a_nf_n(m).$$

Genügen die Functionen $f, f_1, \dots f_n$ der Gleichung (1.) in mehreren aufeinanderfolgenden Intervallen, in denen $f_1, f_2, \dots f_n$ linearunabhängig sind, so kann für einen beliebigen der zwischen jenen Intervallen eingeschalteten Werthe m' wenigstens eine der letztern Functionen der Gleichung (1.) nicht Genüge leisten, also $\Delta(m')$ nicht gleich Null sein.

Sind daher zwischen zwei dieser Intervalle n oder weniger Werthe m' eingeschaltet, so mufs die in dem einen stattfindende lineare Relation von der im andern bestehenden gänzlich verschieden sein (§. 2. 3)).

4.

Die noch rückständige Untersuchung von Functionen, welche von einer stetigen Veränderlichen abhängen, erledigt sich aus dem Vorangehenden mittelst der identischen Gleichung:

$$(1.)\qquad \Sigma \pm f(m) f_1(m+1) \,..\, f_n(m+n) = \Sigma \pm f(m) \varDelta f_1(m) \,..\, \varDelta^n f_n(m),$$

in welcher nach der gewöhnlichen Bezeichnung von Differenzen:

$$\varDelta^i f_k(m) = f_k(m+i) - i f_k(m+i-1) + \frac{i(i-1)}{1.2} f_k(m+i-2) - \cdots + (-1)^i f_k(m)$$

ist. Dieselbe wird einfach dadurch bewiesen, dafs man auf der rechten Seite für die Differenzen ihre Entwicklungen setzt, und dann durch Addition von Verticalreihen reducirt. Aus (1.) ergiebt sich:

$$(2.)\qquad \varDelta_\mu(m) = \frac{\partial \varDelta(m)}{\partial \varDelta^n f_\mu(m)}.$$

Nun wird an den frühern Betrachtungen gar nichts geändert, wenn man überall statt der Argumente m, $m+\mu$ der einzelnen Functionen dasselbe Vielfache derselben $(m+\mu)\varepsilon$ einführt, also auch nicht, wenn man $m\varepsilon = x$, $\varepsilon = \partial x$ setzt. Dann ist:

$$\varDelta^i f_k(m\varepsilon) = \partial x^i f_k^{(i)}(x),$$

$$\frac{\varDelta(m\varepsilon)}{\partial x^{\frac{1}{2}n(n+1)}} = \Sigma \pm f(x) f_1'(x) \,..\, f_n^{(n)}(x) = \mathrm{E}(x),$$

$$\frac{\varDelta_\mu(m\varepsilon)}{\partial x^{\frac{1}{2}n(n-1)}} = \frac{\partial \mathrm{E}(x)}{\partial f_\mu^{(n)}(x)} = \mathrm{E}_\mu(x),$$

u. s. w. Dies festgestellt, hat man folgende Sätze:

1) Verschwindet $\mathrm{E}(x)$ für alle Werthe von $x = x_0$ bis $x = x_1$, wo $x_0 < x_1$ ist, so sind die Functionen $f(x)$, $f_1(x)$, .. $f_n(x)$ für diese nämlichen Werthe von x linearabhängig. Ist $\varphi(x) = 0$ eine der linearen Relationen, welche für $x = x_1$ und kleinere Werthe von x stattfinden, und construirt man die Curve $y = \varphi(x)$ für alle Werthe von x, die gröfser als x_1 sind, so hat diese Curve für $x = x_1$ mit der Abscissenaxe einen Contact von der n^{ten} Ordnung.

2) Sind zwei Intervalle, in denen $\mathrm{E}(x)$ verschwindet, durch Werthe von x getrennt, für welche $\mathrm{E}(x)$ von Null verschieden ist, so wird die

Linearabhängigkeit der gegebenen Functionen in beiden Intervallen im Allgemeinen durch verschiedene Relationen ausgedrückt.

3) Damit gegebene $n+1$ Functionen $f(x)$, $f_1(x)$, .. $f_n(x)$ für alle Werthe von x linearunabhängig sind, ist es erforderlich und hinreichend, dafs ihre Determinante $E(x)$ für alle Werthe von x von Null verschieden ist.

Nennt man ferner ein Intervall, in welchem mindestens eine der Gröfsen $E_\mu(x)$ von Null verschieden ist, ein Intervall der ersten Art, dagegen ein solches, in welchem sämmtliche $E_\mu(x)$ verschwinden, eines von der zweiten Art, während $E(x)=0$ vorausgesetzt wird, so hat man weiter:

4) Sind zwei Intervalle der ersten Art durch eines von der zweiten Art geschieden, so ist die lineare Relation, welche in dem einen stattfindet, nicht nothwendig auch im andern gültig.

5) Ist ein Intervall der ersten Art, welches sich von $x=x_0$ bis $x=x_1$ incl. ausdehnt, durch zwei andere von der zweiten Art begrenzt, so findet in ihm eine einzige lineare Relation $\varphi(x)=0$ statt. Construirt man die Curve $y=\varphi(x)$ für die Werthe $x<x_0$ und $x>x_1$, so hat der erste Zweig für $x=x_0$ mit der Abscissenaxe einen Contact von der ersten, der andere für $x=x_1$ einen von der n^{ten} Ordnung. Nur in besondern Fällen kann in diesen Punkten der Contact auf eine höhere Ordnung steigen.

Ich wende mich zur Untersuchung der Differentialgleichung:

$$(3.)\quad A(x)f^{(n)}(x)+A_1(x)f^{(n-1)}(x)+\ldots+A_n(x)f(x) = 0,$$

und betrachte statt derselben zunächst die Gleichung:

$$(4.)\quad A(m\varepsilon)\frac{\Delta^n f(m\varepsilon)}{\varepsilon^n}+A_1(m\varepsilon)\frac{\Delta^{n-1}f(m\varepsilon)}{\varepsilon^{n-1}}+\cdots+A_n(m\varepsilon)f(m\varepsilon) = 0,$$

welche durch die Substitution:

$$A_s = \varepsilon^{n-s}\Big\{P_s+(n-s+1)P_{s-1}+\frac{(n-s+2)(n-s+1)}{1.2}P_{s-2}+\cdots \\ +\frac{n(n-1)\ldots(n-s+1)}{1.2\ldots s}P\Big\},$$

oder:

$$P_s = \frac{A_s}{\varepsilon^{n-s}}-(n-s+1)\frac{A_{s-1}}{\varepsilon^{n-s+1}}+\frac{(n-s+2)(n-s+1)}{1.2}\frac{A_{s-2}}{\varepsilon^{n-s+2}}-\cdots \\ +(-1)^s\frac{n(n-1)\ldots(n-s+1)}{1.2\ldots s}A$$

die Form:

$$P(m\varepsilon)f((m+n)\varepsilon)+P_1(m\varepsilon)f((m+n-1)\varepsilon)+\cdots+P_n(m\varepsilon)f(m\varepsilon) = 0$$

annimmt. Es läfst sich daher alles, was im vorigen Paragraph festgestellt

wurde, auch auf vorstehende Gleichung (4.) übertragen, welches auch der Werth von ε sei, also auch dann, wenn ε unter einer beliebigen Grenze liegt.

Bezeichnet man daher durch m' die Werthe von m, für welche bei einem bestimmten, unter einer gegebenen Grenze liegenden ε eine der Gröfsen

$$P(m\varepsilon) = \frac{A(m\varepsilon)}{\varepsilon^n},$$

$$P_n(m\varepsilon) = (-1)^n\left\{\frac{A(m\varepsilon)}{\varepsilon^n} - \frac{A_1(m\varepsilon)}{\varepsilon^{n-1}} + \frac{A_2(m\varepsilon)}{\varepsilon^{n-2}} - \cdots\right\},$$

oder beide zusammen im Vergleich zu allen übrigen Gröfsen P_s verschwinden, so sieht man augenblicklich, dafs, wenn jene Grenze immer kleiner genommen wird, diese Werthe sich auf diejenigen reduciren, für welche $P(m\varepsilon)$ verschwindet.

Macht man nun die erlaubte Voraussetzung, dafs es keinen endlichen Werth von x giebt, für welchen alle Coefficienten $A_s(x)$ verschwinden, oder für den einer oder mehrere derselben die Grenzen des Endlichen übersteigen, und bezeichnet durch x' diejenigen Werthe von x, für welche $A(x)$ verschwindet, so erhält man folgende Resultate:

1) Gegebene n Functionen, welche der Gleichung (3.) für einen der Werthe x' genügen, können nicht linearunabhängig sein.

2) Will man die Gleichung (3.) durch n linearunabhängige Functionen integriren, so ist dazu erforderlich, dafs für keinen der Werthe x' jede dieser Functionen der Gleichung (3.) genüge.

3) Hat man umgekehrt n linearunabhängige Functionen, welche der Gleichung (3.) in bestimmten Intervallen genügen, so kann es unter den Werthen x' keinen geben, für den jede dieser Functionen der Gleichung (3.) genügt.

4) Stellt man bei der Integration von (3.) die Bedingung, dafs das gesuchte Integral jener Gleichung auch noch für einen der Werthe x' genüge, so giebt es keine n, sondern höchstens $n-1$ linearunabhängige Functionen, welche jenen Bedingungen genügen, und ihre Anzahl kann durch weitere Bedingungen auch noch weiter reducirt werden.

Hat man n Functionen $f_1, f_2, \ldots f_n$, welche der in 2) aufgestellten Bedingung genügen, so erhält man durch Elimination von $A_1, A_2, \ldots A_n$ aus den Gleichungen:

$$A(x)f_1^{(n)}(x) + A_1(x)f_1^{(n-1)}(x) + \cdots + A_n(x)f_1(x) = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A(x)f_n^{(n)}(x) + A_1(x)f_n^{(n-1)}(x) + \cdots + A_n(x)f_n(x) = 0$$

die folgende:

$$A(x)\frac{\partial E_0(x)}{\partial x}+A_1(x)E_0(x) = 0.$$

Da in der ganzen Ausdehnung dieser Gleichung $A(x)$ von Null verschieden ist, so hat man entweder $E_0(x)=0$, also auch $\frac{\partial E_0}{\partial x}=0$, oder:

$$\frac{\partial E_0}{E_0\,\partial x}+\frac{A_1}{A} = 0,$$

woraus:

$$(5.)\qquad E_0(x) = e^{-\int\frac{A_1(x)}{A(x)}\partial x}$$

folgt. Die rechte Seite dieser Gleichung enthält eine durch die Integration eingeführte Constante, welche dadurch bestimmt werden mufs, dafs man für x einen besondern Werth einsetzt. Dabei entscheidet sich zugleich die Frage, ob E_0 gleich Null oder von Null verschieden ist, d. h. ob jene Integrale linearabhängig oder linearunabhängig sind.

Die obigen vier Sätze bedürfen einer Erläuterung, welche ich für den dritten und vierten Satz an zwei einfachen Beispielen geben will. Die Gleichung $(x^2-1)f''+2xf'-2f=0$ hat die Integrale $f_1=x$, $f_2=x\lg\frac{x+1}{x-1}-2$, während $x'=\pm 1$ ist. Diese Integrale sind linearunabhängig, also darf eines derselben für $x=-1$, und eines für $x=1$ der Differentialgleichung nicht genügen. Dies ist in der That mit f_2 der Fall, da f_2 in der Nähe jener Werthe aufhört der Voraussetzung zu entsprechen, dafs seine Aenderung der Aenderung von x proportional sei, also von der Herstellung der Differentialquotienten f' und f'' für jene Werthe keine Rede sein kann. — Untersucht man die Wärmebewegung in einer Vollkugel nach der *Fourier*'schen Theorie für den Fall, wo die Temperatur u nur von der Zeit t und dem aus dem Centrum genommenen Radiusvector x abhängt, so hat man für alle Punkte der Kugel ohne Ausnahme $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{a^2}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial u}{\partial x}\right)$. Ist α eine willkürliche Constante, so kann man ein particulares Integral finden, wenn man noch die Gleichung $\frac{\partial u}{\partial t}=-\alpha^2 u$ hinzunimmt. Dann erhält man:

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\alpha^2}{a^2}x\,u = 0,$$

und es ist ein solches Integral zu suchen, welches dieser Gleichung für den Punkt $x=0$ genügt. Diese Gleichung hat die Integrale:

$$f_1 = c_1\frac{\sin\frac{\alpha x}{a}}{x},\qquad f_2 = c_2\frac{\cos\frac{\alpha x}{a}}{x},$$

von denen das Letztere zu verwerfen ist, weil es der Gleichung nicht für $x = 0$ genügt.

Aus art. 3 übertragen wir noch folgende Sätze. Hat man $n+1$ Functionen $f, f_1, \ldots f_n$, welche der Gleichung (3.) für alle Werthe von $x = x_0$ bis $x = x_1$ genügen, so sind dieselben für die nämlichen Werthe von x linearabhängig. Sind die Functionen $f_1, f_2, \ldots f_n$ in jenem Intervall linearunabhängig, so besteht in demselben eine einzige Relation von der Form:

$$f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \cdots + a_n f_n(x).$$

Genügen diese nämlichen Functionen der Gleichung (3.) in zwei aufeinanderfolgenden Intervallen, zwischen denen ein Werth x' liegt, für den $\Delta(x)$, $\Delta'(x), \ldots \Delta^{(\mu)}(x)$ verschwinden, und ist $\mu \gtreqless n$, so mufs die in dem einen Intervall stattfindende lineare Relation von der im andern bestehenden gänzlich verschieden sein.

5.

Es ist hier am Orte, einige Eigenschaften der im Vorhergehenden betrachteten Determinanten anzuschliefsen. Es ist:

$$\Sigma \pm VU . V_1 U_1' . V_2 U_2'' \ldots V_n U_n^{(n)} = VV_1 \ldots V_n \Sigma \pm UU_1' U_2'' \ldots U_n^{(n)},$$

und wenn man $U_{\nu+1}^{(\mu)} - U_\nu^{(\mu)} = \Delta U_\nu^{(\mu)}$, $\Delta U_{\nu+1}^{(\mu)} - \Delta U_\nu^{(\mu)} = \Delta^2 U_\nu^{(\mu)}$ etc. setzt:

$$\Sigma \pm U \Delta U' \Delta^2 U'' \ldots \Delta^n U^{(n)} = \Sigma \pm UU_1' U_2'' \ldots U_n^{(n)},$$

eine Formel, welche man auf dieselbe Art, wie die Gleichung (1.) art. 4 beweist. Die Verbindung dieser Gleichungen giebt:

$$(1.) \quad \Sigma \pm VU . \Delta(VU') . \Delta^2(VU'') \ldots \Delta^n(VU^{(n)})$$
$$= VV_1 V_2 \ldots V_n \Sigma \pm U \Delta U' \Delta^2 U'' \ldots \Delta^n U^{(n)}.$$

Setzt man in dieser $V = \frac{1}{U}$, $V_1 = \frac{1}{U_1}$, $\ldots$ $V_n = \frac{1}{U_n}$, so folgt:

$$\Sigma \pm U \Delta U' \Delta^2 U'' \ldots \Delta^n U^{(n)} = UU_1 U_2 \ldots U_n \Sigma \pm \Delta\left(\frac{U'}{U}\right) \Delta^2\left(\frac{U''}{U}\right) \ldots \Delta^n\left(\frac{U^{(n)}}{U}\right).$$

Wiederholt man diese Operation und setzt:

$$\Delta\left(\frac{U^{(\mu)}}{U}\right) = U^{\mu,0}, \quad \Delta\left(\frac{U^{\mu,0}}{U^{1,0}}\right) = U^{\mu,1}, \quad \Delta\left(\frac{U^{\mu,1}}{U^{2,1}}\right) = U^{\mu,2}, \quad \text{etc.},$$

so ergiebt sich schliefslich:

$$(2.) \quad \Sigma \pm U \Delta U' \Delta^2 U'' \ldots \Delta^n U^{(n)}$$
$$= UU_1 \ldots U_n . U^{1,0} U_1^{1,0} \ldots U_{n-1}^{1,0} . U^{2,1} U_1^{2,1} \ldots U_{n-2}^{2,1} \ldots U^{n-1,n-2} U_1^{n-1,n-2} . U^{n,n-1},$$

wodurch die Determinante zur Linken als das Product von $\frac{n+1.n+2}{2}$ Factoren dargestellt ist. Setzt man $U_\mu^{(\nu)} = f_\nu(m\varepsilon+\mu\varepsilon)$, $V_\mu = \varphi(m\varepsilon+\mu\varepsilon)$, $m\varepsilon = x$ und $\varepsilon = \partial x$, so erhält man aus (1.), wenn man durch $\partial x^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ dividirt und zur Grenze übergeht:

$$(3.)\quad \Sigma\pm\varphi f\frac{\partial\varphi f_1}{\partial x}.\frac{\partial^2\varphi f_2}{\partial x^2}..\frac{\partial^n\varphi f_n}{\partial x^n} = \varphi^{n+1}\Sigma\pm f\frac{\partial f_1}{\partial x}.\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}..\frac{\partial^n f_n}{\partial x^n}.$$

Bezeichnet man ferner die Grenze von $\frac{U_{\mu,\nu}}{\partial x}$ durch $f_{\mu,\nu}$, so dafs man hat:

$$f_{\mu,0} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_\mu}{f}\right),\quad f_{\mu,1} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_{\mu,0}}{f_{1,0}}\right),\quad f_{\mu,2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_{\mu,1}}{f_{2,1}}\right),\quad \text{etc.},$$

so folgt aus (2.):

$$(4.)\quad \Sigma\pm f\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}..\frac{\partial^n f_n}{\partial x^n} = f^{n+1}f_{1,0}^n f_{2,1}^{n-1}..f_{n-1,n-2}^2 f_{n,n-1}.$$

Die Gleichungen (3.) und (4.) sind zuerst von Herrn *Hesse* im 54sten Bande dieses Journals pag. 249, 250 veröffentlicht worden *).

Zur Tansformation der Veränderlichen in diesen Determinanten hat man die Formel:

$$(5.)\quad \Sigma\pm f\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}..\frac{\partial^n f_n}{\partial x^n} = \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^{\frac{1}{2}n(n+1)}\Sigma\pm f\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2}..\frac{\partial^n f_n}{\partial t^n},$$

welche sich sehr leicht beweisen läfst, indem man für die Derivirten nach x die nach t mittelst der Formel:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n} = \frac{\partial^n f}{\partial t^n}\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^n + a_1^{(n)}\frac{\partial^{n-1} f}{\partial t^{n-1}} + a_2^{(n)}\frac{\partial^{n-2} f}{\partial t^{n-2}} + \cdots$$

einführt, und dann durch Addition von Verticalreihen reducirt.

Setzt man:

$$\Sigma\pm f\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}..\frac{\partial^n f_n}{\partial x^n} = \Delta,\quad \frac{\partial\Delta}{\partial f_\mu^{(n)}} = \Delta_\mu,\quad \frac{\partial^\nu\Delta_\mu}{\partial x^\nu} = \Delta_\mu^{(\nu)},$$

so hat man folgendes System von Gleichungen, dessen Beweis ich übergehe:

---

*) Die in diesen beiden Gleichungen enthaltenen Ergebnisse waren bereits vor länger als einem Jahr von Herrn *Christoffel* gefunden und der Redaction dieses Journals mitgetheilt worden. Nur dem Umstande, dafs der Herr Verfasser dieser Arbeit einige Aenderungen in derselben vorzunehmen wünschte, ist es zuzuschreiben, dafs die nämlichen Ergebnisse, welche Herr *Hesse* in der citirten Abhandlung erhalten hat, von diesem früher veröffentlicht worden sind. *B.*

$$(6.)\quad\begin{cases}\Sigma\pm\Delta_0\Delta_1'\Delta_2''\ldots\Delta_n^{(n)} = \Delta^n\\ \Sigma\pm\Delta_0\Delta_1'\Delta_2''\ldots\Delta_{n-1}^{(n-1)} = (-1)^n\Delta^{n-1}.f_n\\ \Sigma\pm\Delta_0\Delta_1'\Delta_2''\ldots\Delta_{n-2}^{(n-2)} = (-1)^{2n}\Delta^{n-2}\Sigma\pm f_{n-1}\frac{\partial f_n}{\partial x}\\ \Sigma\pm\Delta_0\Delta_1'\Delta_2''\ldots\Delta_{n-3}^{(n-3)} = (-1)^{3n}\Delta^{n-3}\Sigma\pm f_{n-2}\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x}\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}\\ \cdots\cdots\cdots\\ \Sigma\pm\Delta_0\Delta_1' = (-1)^{(n-1)n}\Delta\,\Sigma\pm f_2\frac{\partial f_3}{\partial x}\cdots\frac{\partial^{n-2}f_n}{\partial x^{n-2}}\\ \Delta_0 = (-1)^{nn}\Sigma\pm f_1\frac{\partial f_2}{\partial x}\cdots\frac{\partial^{n-1}f_n}{\partial x^{n-1}}.\end{cases}$$

Diese Gleichungen sind von Wichtigkeit für die Untersuchung solcher linearer homogener Differentialausdrücke, welche nach der Benennung des Herrn *Hesse* zu einander complementar sind. So enthält z. B. die vorletzte derselben die vollständige Integration einer linearen Differentialgleichung ohne zweiten Theil, für den Fall, dafs das Integral ihrer Complementargleichung bekannt ist.

Montjoie, 1857.

19.

Ueber die Transformationen, welche in der Variationsrechnung zur Nachweisung gröfster oder kleinster Werthe dienen.

(Von Herrn *Minding* zu Dorpat.)

Die von *Jacobi* im 17ten Bande dieses Journals S. 71 in die Variationsrechnung eingeführten Transformationen, die seitdem schon mehrmals, namentlich noch jüngst in dieser Zeitschrift von Herrn *E. Heine*, behandelt worden sind, lassen sich in vollständig entwickelter Gestalt aus einem algebraischen Lehrsatze herleiten, der in folgender Formel enthalten ist, nämlich:

$$(\text{A.})\qquad \sum_j (b-j)_j\{(a-b+j)_{\nu-j}+(a-b+j-1)_{\nu-j-1}\} = a_\nu.$$

In dieser Formel sind a und b beliebige, ν und j ganze Zahlen; a_ν bedeutet in üblicher Weise die Vorzahl von x^ν in der Entwicklung von $(1+x)^a$ und mufs daher immer gleich 0 gesetzt werden, wenn ν negativ ist; die Summation nach j umfafst alle Werthe, welche gültige (d. h. nicht verschwindende) Glieder geben; der Anblick der Formel lehrt, dafs diese Werthe von j weder selbst negativ sein, noch $\nu-j$ negativ machen dürfen. Die Formel (A.) ist daher richtig, wenn ν negativ ist; sie ist auch richtig für $\nu=0$, denn alsdann erhält man rechter Hand 1 und linker Hand nur ein gültiges Glied für $j=0$, dessen Werth ebenfalls 1 ist. Der Beweis ist also nur noch für ein positives ganzes ν zu führen.

Zur Abkürzung setze man die im Folgenden häufig auftretende Form $(-a)_i+(-a-1)_{i-1}=f(a,i)$, also:

$$f(a,i) = (-a)_i+(-a-1)_{i-1} = (-1)^i\{(a+i-1)_i-(a+i-1)_{i-1}\};$$

so ist für ein negatives i (welches übrigens hier immer nur eine ganze Zahl sein kann), $f(a,i)=0$; für $i=0$ wird $f(a,0)=1$; für ein positives i ist:

$$f(a,i) = (-1)^i\frac{(a-i)(a+1)(a+2)\dots(a+i-1)}{1.2.3\dots i}.$$

Auch gilt folgender Satz: Sind m und i ganze Zahlen, deren Summe positiv ist, so ist:

$$(-1)^m f(m,i)+(-1)^i f(i,m) = 0;$$

hingegen für $m+i \doteq 0$ wird vorstehende Summe $= (-1)^m 2$. Es folgt hieraus $f(m,m)=0$, wenn m positiv ist; für ein negatives m ist ebenfalls $f(m,m)=0$; für $m=0$ aber wird $f(0,0)=1$.

Um nun die Formel (A.) zu beweisen, werde

$$\sum_j (b-j)_j f(b-a-j, \nu-j) - a_\nu = \varphi(a,b,\nu)$$

gesetzt; so ist zu zeigen, dafs $\varphi(a,b,\nu)$ auch für jedes positive ganze ν, wie für negative ν und für $\nu=0$ verschwindet, welche Werthe auch a und b haben mögen. Schreibt man für ν, $\nu-i$ und für b, $b-i$, wo i eine ganze Zahl bedeutet, so erhält man:

$$\sum_j (b-i-j)_j f(b-a-i-j, \nu-i-j) = a_{\nu-i} + \varphi_i,$$

wo zur Abkürzung φ_i für $\varphi(a, b-i, \nu-i)$ gesetzt ist. Diese Gleichung werde mit $f(b,i)$ multiplicirt und die Summe der Producte für alle i genommen, welche gültige Glieder geben, oder auch, ohne solche i vorläufig zu unterscheiden, für alle i von $-\infty$ bis $+\infty$. Es entsteht so die folgende Gleichung:

$$\sum_i \sum_j f(b,i)(b-i-j)_j f(b-a-i-j, \nu-i-j) = \sum_i f(b,i)\{a_{\nu-i}+\varphi_i\}.$$

Wird hier $j=\mu-i$ gesetzt, so verwandelt sich diese Formel in nachstehende:

$$\sum_i \sum_\mu f(b,i)(b-\mu)_{\mu-i} f(b-a-\mu, \nu-\mu) = \sum_i f(b,i)\{a_{\nu-i}+\varphi_i\},$$

worin die Summation nach i sogleich ausführbar ist; man hat nämlich nach einem bekannten Satze:

$$\begin{aligned}\sum_i f(b,i)(b-\mu)_{\mu-i} &= \sum_i (-b)_i (b-\mu)_{\mu-i} + \sum_i (-b-1)_{i-1}(b-\mu)_{\mu-i} \\ &= (-\mu)_\mu + (-\mu-1)_{\mu-1} = f(\mu,\mu).\end{aligned}$$

Es ist aber $f(\mu,\mu)=1$, wenn $\mu=0$, in allen anderen Fällen ist $f(\mu,\mu)=0$; folglich ist auf der linken Seite die Summation nach μ nicht weiter vorzunehmen, sondern nur $\mu=0$ einzusetzen, wodurch die zweifache Summe linker Hand den Werth $f(b-a,\nu)$ erhält. Denselben Werth giebt aber auch die Summe:

$$\begin{aligned}\sum_i f(b,i)a_{\nu-i} &= \sum_i (-b)_i a_{\nu-i} + \sum (-b-1)_{i-1} a_{\nu-i} \\ &= (a-b)_\nu + (a-b-1)_{\nu-1} = f(b-a,\nu);\end{aligned}$$

daher ist $\sum_i f(b,i)\varphi_i = 0$.

Nun ist aber bereits bekannt, dafs $\varphi_i=0$, wenn $\nu-i$ negativ oder auch gleich Null ist; ferner ist $f(b,i)=0$, wenn i negativ; daher darf vor-

stehende Gleichung, mit Weglassung der sich unmittelbar als ungültig ankündigenden Glieder, also geschrieben werden:

$$\sum_{i=0}^{i=\nu-1} f(b,i)\varphi(a,b-i,\nu-i) = 0.$$

Wird hier nach und nach $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ eingesetzt und beachtet, dafs $f(b,0)=1$, so folgt:

für $\nu=1$ $\varphi(a,b,1)=0$,

für $\nu=2$ $\varphi(a,b,2)+f(b,1).\varphi(a,b-1,1)=0$,

für $\nu=3$ $\varphi(a,b,3)+f(b,1).\varphi(a,b-1,2)+f(b,2).\varphi(a,b-2,1)=0$,

u. s. w.

Die erste Gleichung $\varphi(a,b,1)=0$ gilt aber für jedes b, also ist auch $\varphi(a,b-1,1)=0$ und folglich $\varphi(a,b,2)=0$ wiederum für jedes b; also $\varphi(a,b-2,1)=0$ und $\varphi(a,b-1,2)=0$, daher $\varphi(a,b,3)=0$, u. s. f. allgemein $\varphi(a,b,\nu)=0$ für jedes positive ganze ν; wodurch die Gleichung (A.) erwiesen ist. Schreibt man darin $\beta+\nu$ für b, so kann sie auch leicht auf folgende Gestalt gebracht werden:

$$\sum_{j=0}^{j=\nu-1} (\beta+\nu-j)_j \frac{(a-\beta)(a-\beta-\nu+j-1)(a-\beta-\nu+j-2)\ldots(a-\beta-2\nu+2j+1)}{1.2.3.\nu-j} = a_\nu-\beta_\nu,$$

wo alle Glieder der linken Seite durch $a-\beta$ theilbar sind, so dafs die Formel den Quotienten $\frac{a_\nu-\beta_\nu}{a-\beta}$ auf eine besondere Weise darstellt; ich bleibe jedoch bei ihrer ersten Gestalt stehen, um noch einige Zusätze daran zu knüpfen.

Wird die Formel (A.) mit x^ν multiplicirt und die Summe der Producte von $\nu=0$ bis $\nu=\infty$ genommen, so folgt:

$$\sum_\nu\sum_j (b-j)_j f(b-a-j,\nu-j)x^\nu = \sum a_\nu x^\nu = (1+x)^a.$$

Vertauscht man hier ν mit $i+j$, so geht diese Gleichung über in:

$$\sum_i\sum_j (b-j)_j f(b-a-j,i)x^{i+j} = (1+x)^a.$$

Es ist aber:

$$\sum_i f(b-a-j,i)x^i = (1+x)^{a-b+j}+x(1+x)^{a-b+j-1} = (1+x)^{a-b+j-1}(1+2x);$$

dies giebt nach Aufhebung des gemeinsamen Factors $(1+x)^a$ die Formel:

$$\sum_j (b-j)_j \{x(1+x)\}^j = \frac{(1+x)^{b+1}}{1+2x},$$

oder wenn $4x(1+x)=z$, $2(1+x)=1+\sqrt{1+z}$ gesetzt und a für $b+1$ geschrieben wird, so erhält man folgende Reihe:

$$\frac{(1+\sqrt{1+z})^a}{\sqrt{1+z}} =$$
$$2^a\left\{1+(a-2)\frac{z}{4}+\frac{(a-3)(a-4)}{1.2}\left(\frac{z}{4}\right)^2+\frac{(a-4)(a-5)(a-6)}{1.2.3}\left(\frac{z}{4}\right)^3+\cdots\right\}.$$

Setzt man in der Reihe (A.) für b den Werth ν, multiplicirt wieder mit x^ν und addirt nach ν, so entsteht:

$$\sum_\nu\sum_j(\nu-j)_j f(\nu-a-j),\nu-j)x^\nu = \Sigma a_\nu x^\nu = (1+x)^a.$$

Wird hier wieder $i+j$ für ν eingeführt, so erhält man auf der linken Seite:

$$\sum_i\sum_j i_j f(i-a,i)x^{i+j},$$

oder weil $\sum_j i_j x^j = (1+x)^i$,

$$\sum_i f(i-a,i)\{x(1+x)\}^i = (1+x)^a,$$

d. h. wenn z die vorige Bedeutung behält:

$$(1+\sqrt{1+z})^a = 2^a\left\{1+a\frac{z}{4}+\frac{a(a-3)}{1.2}\left(\frac{z}{4}\right)^2+\frac{a(a-4)(a-5)}{1.2.3}\left(\frac{z}{4}\right)^3+\cdots\right\}.$$

Es sei jetzt a eine positive ganze Zahl n, und wieder b gleich ν, so giebt die Formel (A.):

$$\sum_j(\nu-j)_j f(\nu-n-j,\nu-j) = n_\nu.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit x^ν und summirt von $\nu=0$ bis $\nu=n$, so erhält man auf der rechten Seite $(1+x)^n$; setzt man auf der linken wieder $\nu=j+i$, so entsteht die Formel:

$$\sum_i\sum_j i_j f(i-n,i)x^{i+j} = (1+x)^n,$$

worin jedoch nur solche positive Werthe von i und j gültig sind, welche $i+j$ höchstens gleich n geben. Es wird aber für $i=n$, $f(i-n,i)=f(0,n)=(-1)^{n-1}$, und zu $i=n$ gehört der Werth 0 von j; also entsteht für $i=n$, $j=0$ in vorstehender Summe das Glied $(-1)^{n-1}x^n$. Ferner ist:

$$f(i-n,i) = (n-i)_i+(n-i-1)_{i-1} = 0,$$

wenn $n-2i$ negativ ist; folglich beschränken sich die gültigen Werthe von i auf die Reihe 1, 2, 3, ... n', wenn n' die gröfste in $\frac{n}{2}$ enthaltene ganze Zahl bedeutet, und da $i_j=0$ wird, wenn $j>i$ ist, so folgt:

$$\sum_{j=0}^{j=n-i} i_j x^j = \sum_{j=0}^{j=i} i_j x^j = (1+x)^i;$$

daher erhält man:

$$\sum_{i=0}^{i=n'} f(i-n,i)\{x(1+x)\}^i + (-1)^{n-1}x^n = (1+x)^n$$

oder

$$(1+x)^n + (-1)^n x^n = 1 + nx(1+x) + \frac{n(n-3)}{1.2}\{x(1+x)\}^2 + \cdots$$
$$+ \frac{n(n-n'-1)(n-n'-2)\ldots(n-2n'+1)}{1.2.3\ldots n'}\{x(1+x)\}^{n'}.$$

Alle diese übrigens längst bekannten Formeln ergeben sich, wie man sieht, mit grofser Leichtigkeit aus der Grundgleichung (A.), was zu zeigen der Mühe werth schien; für den gegenwärtigen Zweck bedarf es ihrer jedoch nicht, wohl aber einer anderen Formel, die der zuletzt entwickelten ganz analog ist und ebenso wie diese aus der Grundgleichung abgeleitet werden kann.

Sind nämlich v und w zwei Functionen von x, so ist $\frac{d^n(vw)}{dx^n}$ oder, wie ich kürzer schreibe:

$$d^n(vw) = \sum_\nu n_\nu v^{(n-\nu)} w^{(\nu)};$$

also

$$d^n(vw) = \sum_\nu \sum_j (\nu-j)_j f(\nu-n-j, \nu-j) . v^{(n-\nu)} w^{(\nu)}$$

oder, $\nu - j = i$ gesetzt:

$$d^n(vw) = \sum_i \sum_j i_j f(i-n, i) . v^{(n-j-i)} w^{(j+i)},$$

wo die Summation alle positiven Werthe von i und j umfafst, für welche $i+j \overline{\gtrless} n$ ist. Hieraus folgt aber ebenso wie vorhin:

$$d^n(vw) = \sum_{i=0}^{i=n'} \sum_j i_j f(i-n, i) . v^{(n-j-i)} w^{(j+i)} + (-1)^{n-1} v . w^{(n)},$$

unter der Bedingung $i+j \overline{\gtrless} n$. Es ist aber:

$$\sum_{j=0}^{j=n-i} i_j w^{(j+i)} v^{(n-j-i)} = d^i(v^{(n-2i)} w^{(i)});$$

daher folgt:

$$\text{(B.)} \qquad d^n(vw) = \sum_{i=0}^{i=n'} f(i-n, i) d^i(v^{(n-2i)} w^{(i)}) + (-1)^{n-1} v . w^{(n)}$$

oder:

$$d^n(vw) + (-1)^n v . w^{(n)} = v^{(n)} w + n d(v^{(n-2)} w') + \frac{n(n-3)}{1.2} d^2(v^{(n-4)} w'') + \cdots$$
$$+ \frac{n(n-n'-1)(n-n'-2)\ldots(n-2n'+1)}{1.2.3\ldots n'} d^{n'}(v^{(n-2n')} w^{n'}).$$

Mit Hülfe der Formeln (A.) und (B.) lassen sich nun die *Jacobi*schen Sätze auf folgende Art herleiten:

Der erste Satz kommt fast unmittelbar darauf zurück, dafs ein Ausdruck $\varDelta$ von der Form:

$$\varDelta = y d^m (\mathfrak{A}(yt)^{(m)}) - yt d^m (\mathfrak{A} y^{(m)})$$

sich auf nachstehende Gestalt bringen läfst:

$$\varDelta = d(\mathfrak{B}_1 t') + d^2(\mathfrak{B}_2 t'') + \cdots + d^m(\mathfrak{B}_m t^{(m)}),$$

wo die $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{A}$, y und deren Ableitungen nach x ausgedrückt werden, von t aber unabhängig sind.

Es ist $(yt)^{(m)}$ oder $d^m(yt) = \sum\limits_{\mu} m_\mu y^{(m-\mu)} t^{(\mu)}$, folglich:

$$y d^m (\mathfrak{A}(yt)^{(m)}) = \sum_{\mu} m_\mu y d^m (\mathfrak{A} y^{(m-\mu)} t^{(\mu)}) = \sum_{\mu}\sum_{\varepsilon} m_\mu m_\varepsilon y t^{(\mu+\varepsilon)} d^{m-\varepsilon} (\mathfrak{A} y^{(m-\mu)}).$$

Werden hier alle Glieder zusammengefafst, für welche $\mu+\varepsilon$ denselben Werth λ hat, so erhält man:

$$y d^m (\mathfrak{A}(yt)^{(m)}) = \sum_{\lambda} \mathfrak{L}_\lambda t^\lambda = \varDelta + \mathfrak{L}_0 t,$$

wo $\mathfrak{L}_\lambda = \sum\limits_{\varepsilon} m_\varepsilon m_{\lambda-\varepsilon} y d^{m-\varepsilon} (\mathfrak{A} y^{(m-\lambda+\varepsilon)})$ ist. Die Summation nach λ erstreckt sich auf alle Werthe von λ, welche gültige Glieder geben, eben so auch die Summation nach ε. Der Anblick der Formel für $\mathfrak{L}_\lambda$ zeigt, dafs λ die Werthe 0, 1, 2, 3, ... bis $2m$, ε die Werthe 0, 1, 2, ... bis m erhalten mufs; wenn jedoch λ kleiner ist als m, so werden alle die Werthe von ε ungültig, welche gröfser sind als λ. Wird noch für ε, $\lambda - m + \mu$ eingeführt, so folgt:

$$\mathfrak{L}_\lambda = \sum_{\mu} m_\varepsilon m_{\lambda-\varepsilon} y d^{m-\varepsilon} (\mathfrak{A} y^{(\mu)}),$$

wo der Buchstabe ε nur vorläufig zur Abkürzung für seinen Werth $\lambda - m + \mu$ beibehalten ist. Um nun den Factor y unter das Differentialzeichen zu bringen, dient die bekannte Formel:

$$y d^n v = \sum_{\nu} (-1)^\nu n_\nu d^{n-\nu} (y^{(\nu)} v),$$

durch deren Anwendung $\mathfrak{L}_\lambda$ folgende Gestalt erlangt:

$$\mathfrak{L}_\lambda = \sum_{\mu}\sum_{\nu} (-1)^\nu m_{\lambda-\varepsilon} m_\varepsilon (m-\varepsilon)_\nu d^{m-\varepsilon-\nu} (\mathfrak{A} y^{(\mu)} y^{(\nu)}).$$

Es ist aber immer $m_\varepsilon (m-\varepsilon)_\nu = m_\nu (m-\nu)_\varepsilon$; setzt man noch für ε seinen Werth $\lambda - m + \mu$, so ist $m_{\lambda-\varepsilon} = m_{m-\mu} = m_\mu$, $m - \varepsilon - \nu = 2m - \lambda - \mu - \nu$; daher:

$$\mathfrak{L}_\lambda = \sum_{\mu}\sum_{\nu} (-1)^\nu m_\mu m_\nu (m-\nu)_{\lambda-m+\mu} d^{2m-\lambda-\mu-\nu} (\mathfrak{A} y^{(\mu)} y^{(\nu)}).$$

Um diesen Werth auf das einfachste zu schreiben, setze ich noch $2m-2\lambda-\mu-\nu=q$ und bezeichne $\mathfrak{A}y^{(\mu)}y^{(\nu)}$ mit $Q(\mu,\nu)$, so folgt:

$$\mathfrak{L}_\lambda = \sum_\mu\sum_\nu(-1)^\nu m_\mu m_\nu (m-\nu)_{\lambda-m+\mu}\, d^{q+\lambda} Q(\mu,\nu).$$

Dieser ohne alle Schwierigkeit sich darbietende Werth von $\mathfrak{L}_\lambda$ gewinnt nun eine neue Gestalt, in welcher sich die $\mathfrak{B}$ leicht erkennen lassen, wenn man die Gleichung (A.) zur Verwandlung des Factors $(m-\nu)_{\lambda-m+\mu}$ verwendet. Setzt man nämlich in (A.) $m-\nu$ für a, λ für b, $\lambda-m+\mu$ für ν, so folgt:

$$(m-\nu)_{\lambda-m+\mu} = \sum_j(\lambda-j)_j f(\lambda-m+\nu-j,\ \lambda-m+\mu-j);$$

daher:

$$\mathfrak{L}_\lambda = \sum_j\sum_\mu\sum_\nu(-1)^\nu m_\mu m_\nu(\lambda-j)_j f(\lambda-m+\nu-j,\ \lambda-m+\mu-j)\, d^{q+\lambda} Q(\mu,\nu),$$

wo die Summationen nach j, μ, ν überhaupt alle gültigen Glieder umfassen. Aus diesem Ausdrucke nehme man das zu $j=0$ gehörige Glied heraus, nämlich $\sum_\mu\sum_\nu(-1)^\nu m_\mu m_\nu f(\lambda-m+\nu,\ \lambda-m+\mu)\, d^{q+\lambda} Q(\mu,\nu)$ und bezeichne es mit $d^\lambda\mathfrak{B}_\lambda$, indem man setzt:

$$\mathfrak{B}_\lambda = \sum_\mu\sum_\nu(-1)^\nu m_\mu m_\nu f(\lambda-m+\nu,\ \lambda-m+\mu)\, d^q Q(\mu,\nu),$$

so wird, da durch Verwandlung von λ in $\lambda-j$, $q=2m-2\lambda-\mu-\nu$ in $q+2j$ übergeht:

$$\mathfrak{B}_{\lambda-j} = \sum_\mu\sum_\nu(-1)^\nu m_\mu m_\nu f(\lambda-m+\nu-j,\ \lambda-m+\mu-j)\, d^{q+2j} Q(\mu,\nu),$$

daher:

$$d^{\lambda-2j}\mathfrak{B}_{\lambda-j} = \sum_\mu\sum_\nu(-1)^\nu m_\mu m_\nu f(\lambda-m+\nu-j,\ \lambda-m+\mu-j)\, d^{q+\lambda} Q(\mu,\nu).$$

Vergleicht man hiermit den vorstehenden Werth von $\mathfrak{L}_\lambda$, so folgt:

$$\mathfrak{L}_\lambda = \sum_j(\lambda-j)_j\, d^{\lambda-2j}\mathfrak{B}_{\lambda-j}.$$

Oben war $\Delta+\mathfrak{L}_0 t = \sum_\lambda \mathfrak{L}_\lambda t^{(\lambda)}$; also ist:

$$\Delta+\mathfrak{L}_0 t = \sum_\lambda\sum_j(\lambda-j)_j\, t^{(\lambda)} d^{\lambda-2j}\mathfrak{B}_{\lambda-j},$$

oder wenn für λ, $l+j$ gesetzt wird:

$$\Delta+\mathfrak{L}_0 t = \sum_l\sum_j l_j\, t^{(l+j)} d^{l-j}\mathfrak{B}_l.$$

Es ist aber $\sum_j l_j t^{(l+j)} d^{l-j}\mathfrak{B}_l = d^l(\mathfrak{B}_l t^{(l)})$; daher:

$$\Delta+\mathfrak{L}_0 t = \sum_l d^l(\mathfrak{B}_l t^{(l)}).$$

Bemerkt man nun noch, dafs zufolge der obigen Werthe $\mathfrak{L}_0=\mathfrak{B}_0=yd^m(\mathfrak{A}y^{(m)})$

ist, und zieht demgemäfs die Gleichung $\mathfrak{L}_0 t = \mathfrak{B}_0 t$ von der vorstehenden ab, so folgt:

$$\varDelta = \sum_l d^l(\mathfrak{B}_l t^{(l)}),$$

wo die Summation sich auf alle gültigen Werthe von l erstreckt, mit Ausnahme von $l = 0$. Die Betrachtung des obigen Ausdrucks für $\mathfrak{B}_\lambda$ lehrt aber sofort, dafs darin μ und ν nur positive und nicht über m hinausgehende Werthe erhalten dürfen, um gültige Glieder zu geben; da nun $f(\alpha, i) = 0$ ist, wenn i negativ, so folgt, dafs $\mathfrak{B}_\lambda = 0$ wird für ein negatives λ, da solches einen negativen Werth von $\lambda - m + \mu$ herbeiführen und mithin in $\mathfrak{B}_\lambda$ den Factor $f(\lambda - m + \nu, \lambda - m + \mu) = 0$ machen würde.

Es läfst sich ferner leicht zeigen, dafs der obige Werth von $\mathfrak{B}_\lambda$ keine Glieder enthält, für welche q negativ würde. Vertauscht man nämlich μ mit ν, so bleibt $Q(\mu, \nu) = \mathfrak{A} y^{(\mu)} y^{(\nu)}$ ungeändert, eben so auch $q = 2m - 2\lambda - \mu - \nu$; es gehört daher in $\mathfrak{B}_\lambda$ zu einerlei $Q(\mu, \nu)$ und q der Factor:

$$m_\mu m_\nu \{(-1)^\nu f(\lambda - m + \nu, \lambda - m + \mu) + (-1)^\mu f(\lambda - m + \mu, \lambda - m + \nu)\}.$$

Dieser Factor ist aber nach einer früheren Bemerkung gleich Null, wenn $(\lambda - m + \mu) + (\lambda - m + \nu) = -q$ von Null verschieden und positiv ist; also kommt in der mit $\mathfrak{B}_\lambda$ bezeichneten Summe kein Glied mit negativem q vor. Es bedarf kaum noch der Erwähnung, dafs derselbe Beweis auch gültig bleibt, wenn $\mu = \nu$ angenommen wird.

Es ist endlich noch zu zeigen, dafs der aufgestellte Werth von $\mathfrak{B}_\lambda$ auch der Bedingung entspricht, wonach für $\lambda > m$, $\mathfrak{B}_\lambda = 0$ werden mufs. Dies ist aber augenscheinlich der Fall; denn wenn $\lambda > m$ ist, so wird $2\lambda - 2m + \mu + \nu = -q$ positiv, weil μ und ν nur positive Werthe erhalten oder gleich Null sein können; da aber alle Glieder mit negativem q hinwegfallen, wie so eben gezeigt worden, so folgt $\mathfrak{B}_\lambda = 0$ für $\lambda > m$.

Demnach wird:

$$\varDelta = \sum_{l=1} d^l(\mathfrak{B}_l t^{(l)}) = d(\mathfrak{B}_1 t') + d^2(\mathfrak{B}_2 t'') + \cdots + d^m(\mathfrak{B}_m t^{(m)}),$$

wo:

$$\mathfrak{B}_\lambda = \sum_\mu \sum_\nu (-1)^\nu m_\mu m_\nu \{(m - \lambda - \nu)_{\lambda - m + \mu} + (m - \lambda - \nu - 1)_{\lambda - m + \mu - 1}\} d^q(\mathfrak{A} y^{(\mu)} y^{(\nu)}),$$

und:

$$q = 2m - 2\lambda - \mu - \nu \geqq 0.$$

Es sei $\lambda - m + \mu = k$, daher $m - \nu - \lambda = q + k$, so läfst der Werth von $\mathfrak{B}_\lambda$ sich auch also schreiben:

$$\mathfrak{B}_\lambda = \sum_q \sum_k (-1)^{m-\lambda-q-k} m_{\lambda+q+k} m_{\lambda-k} \{(q+k)_k + (q+k-1)_{k-1}\} d^q(\mathfrak{A} y^{(m+k-\lambda)} y^{(m-\lambda-q-k)}).$$

Die Summationen nach q und k erstrecken sich auf alle Werthe, welche gültige Glieder geben, also für q von Null bis $m-\lambda$, für k von Null bis zu der kleineren der beiden Zahlen λ und $m-\lambda-q$.

Ich setze einige nach diesen Formeln berechnete Beispiele her. Es ist:

$$\varDelta = yd^m(\mathfrak{A}(yt)^{(m)}) - ytd^m(\mathfrak{A}y^{(m)}) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} d^\lambda(\mathfrak{B}_\lambda t^{(\lambda)})$$

für $m=1$ wird $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}yy$.

$m=2$. $\mathfrak{B}_1 = 2d.\mathfrak{A}yy' + 2\mathfrak{A}(yy''-2y'y')$. $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{A}yy$.

$m=3$. $\mathfrak{B}_1 = 3d^2.\mathfrak{A}yy'' - 3d.\overline{\mathfrak{A}(3y'y''-yy''')} + 3\mathfrak{A}(3y''y''-2y'y''')$.

$\mathfrak{B}_2 = 3d.\mathfrak{A}yy' + 3\mathfrak{A}(2yy''-3y'y')$. $\mathfrak{B}_3 = \mathfrak{A}yy$.

$m=4$. $\mathfrak{B}_1 = 4d^3.\mathfrak{A}yy''' + 4d^2.\overline{\mathfrak{A}(yy^{IV}-4y'y''')} + 12d.\overline{\mathfrak{A}(2y''y'''-y'y^{IV})}$
$+ 4\mathfrak{A}(3y''y^{IV}-4y'''y''')$.

$\mathfrak{B}_2 = 6d^2.\mathfrak{A}yy'' + 12d.\overline{\mathfrak{A}(yy'''-2y'y'')}$
$+ 2\mathfrak{A}(yy^{IV}-16y'y'''+18y''y'')$.

$\mathfrak{B}_3 = 4d.\mathfrak{A}yy' + 4\mathfrak{A}(3yy''-4y'y')$. $\mathfrak{B}_4 = \mathfrak{A}yy$.

Nach dem zweiten Satze *Jacobis* läfst sich die Variation von:

$$V = \frac{dF}{dy} - d\frac{dF}{dy'} + d^2\frac{dF}{dy''} - \dots + (-1)^n d^n \frac{dF}{dy^{(n)}} = V_n,$$

wo $F = f(x, y, y', y'', \dots y^{(n)})$, auf folgende Gestalt bringen:

$$\delta V_n = \mathfrak{A}\delta y + d(\mathfrak{A}_1\delta y') + d^2(\mathfrak{A}_2\delta y'') + \dots + d^n(\mathfrak{A}_n\delta y^{(n)}).$$

Werden in der entwickelten Variation δV_n sämmtliche Glieder, welche $\frac{dF}{dy^{(n)}}$ enthalten, von den übrigen abgesondert, so kann die Summe der letzteren passend durch (δV_{n-1}) angedeutet werden, und setzt man noch zur Abkürzung $\frac{dF}{dy^{(n)}} = \varphi$, so ergiebt sich:

$$\delta V_n = (\delta V_{n-1}) + \frac{d\varphi}{dy}\delta y^{(n)} - d\left(\frac{d\varphi}{dy'}\delta y^{(n)}\right)$$
$$+ d^2\left(\frac{d\varphi}{dy''}\delta y^{(n)}\right) - \dots + (-1)^{n-1}d^{n-1}\left(\frac{d\varphi}{dy^{(n-1)}}\delta y^{(n)}\right)$$
$$+ (-1)^n d^n\left\{\frac{d\varphi}{dy}\delta y + \frac{d\varphi}{dy'}\delta y' + \dots + \frac{d\varphi}{dy^{(n)}}\delta y^{(n)}\right\},$$

oder:

$$dV_n - (\delta V_{n-1}) = (-1)^n \sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} d^\mu U_{n-\mu} + (-1)^n d^n\left(\frac{d\varphi}{dy^{(n)}}\delta y^{(n)}\right),$$

wo gesetzt ist:

$$U_{n-\mu} = d^{n-\mu}\left(\frac{d\varphi}{dy^{(\mu)}}\delta y^{(\mu)}\right) + (-1)^{n-\mu}\frac{d\varphi}{dy^{(\mu)}}\delta y^{(n)}.$$

Wird hier $\frac{d\varphi}{dy^{(\mu)}} = \frac{d^2F}{dy^{(\mu)}dy^{(n)}}$ mit v und $\delta y^{(\mu)}$ mit w bezeichnet, so erhält man:

$$U_{n-\mu} = d^{n-\mu}(vw) + (-1)^{n-\mu}vw^{(n-\mu)},$$

also nach Formel (B.), wenn durch $(n-\mu)'$ die gröfste in $\frac{n-\mu}{2}$ enthaltene ganze Zahl angedeutet wird:

$$U_{n-\mu} = \sum_{i=0}^{i=(n-\mu)'} f(i+\mu-n, i)\, d^i(v^{(n-\mu-2i)}w^{(i)}).$$

Der Werth von $f(i+\mu-n, i)$ ist:

$$\frac{(n-\mu)(n-\mu-i-1)(n-\mu-i-2)\dots(n-\mu-2i+1)}{1.2.3\dots i}.$$

Stellt man endlich für v und w ihre so eben gesetzten Werthe wieder her, so folgt:

$$d^\mu U_{n-\mu} = \sum_{i=0}^{i=(n-\mu)'} f(i+\mu-n, i)\, d^{\mu+i}\left(d^{n-\mu-2i}\left(\frac{d^2F}{dy^{(\mu)}dy^{(n)}}\right)\delta y^{(\mu+i)}\right),$$

wodurch $\delta V_n - (\delta V_{n-1})$ und damit δV_n selbst auf die verlangte Gestalt gebracht ist.

Dorpat, im December 1857.

20.

Sur une certaine classe de courbes de troisième degré, rapportées à lignes droites, qui dépendent de paramètres donnés.

(Par M. *C. A. Bjerknes* à Christiania.)

Parmi les courbes de troisième degré il en existe une certaine classe qui mérite, comme il me paraît, une attention particulière; c'est celle qui est définie par l'équation

$$(1.)\qquad x^2+y^2 = \frac{ay+bx}{y+cx+d},$$

le système de coordonnées supposé rectangulaire. Je me propose ici de développer quelques propriétés, appartenant à cette espèce de courbes.

I.

§. 1. Pour plus grande commodité nous mettrons d'abord l'équation précédente sous la forme

$$(2.)\qquad x^2+y^2 = \frac{(r^2+2prr'-r'^2)y+(pr^2-2rr'-pr'^2)x}{y-px-2q}.$$

Cela posé, je montrerai, qu'on peut remplacer cette formule par cinq utres, en introduisant les quatre nouveaux variables x, x', y, y'. En effet on trouve successivement

$$(x^2+y^2)(px-y+2q)+(r^2-r'^2)(px+y)+2rr'(py-x)=0,$$
$$(x^2-y^2+2y^2)(px+y-2(y-q))+(r^2-r'^2)(px+y)+2rr'(py-x = 0,$$
$$(px+y)(x^2-y^2+r^2-r'^2)+2y^2(px+y)-2(x^2+y^2)(y-q)+2rr'(py-x = 0,$$
$$(px+y)(x^2-y^2+r^2-r'^2)+2q(x^2+y^2)+2(py-x)(xy+rr') = 0,$$

ou enfin, en remarquant que

$$2q(x^2+y^2) = 2(px+y)qy-2(py-x)qx,$$
$$(px+y)(x^2-y^2+r^2-r'^2+2qy)+2(py-x)(xy+rr'-qx) = 0,$$

Maintenant nous introduisons la quantité nouvelle x et posons

$$(3.)\qquad \begin{cases} 2\mathrm{x}(x-py) = x^2-y^2+r^2-r'^2+2qy, \\ \mathrm{x}(y+px) = xy+rr'-qx, \end{cases}$$

nous posons de plus

$$(4.)\quad \begin{cases} x = \mathrm{x} - \mathrm{y}', & y = \mathrm{x}' + \mathrm{y}, \\ \mathrm{x}' = p\mathrm{x} + q, \end{cases}$$

c'est à dire

$$x = \mathrm{x} - \mathrm{y}', \qquad y = \mathrm{y} + p\mathrm{x} + q.$$

Par ces substitutions les équations (3.) se transforment en les suivantes

$$(1-p^2)\mathrm{x}^2 - 2pq\mathrm{x} + \mathrm{y}^2 - \mathrm{y}'^2 = r^2 - r'^2 + q^2,$$
$$p\mathrm{x}^2 + q\mathrm{x} + \mathrm{y}\mathrm{y}' = rr',$$

ou, comme on peut écrire d'une autre manière

$$\mathrm{x}^2 - \mathrm{x}'^2 + \mathrm{y}^2 - \mathrm{y}'^2 = r^2 - r'^2,$$
$$\mathrm{x}\mathrm{x}' + \mathrm{y}\mathrm{y}' = rr'.$$

De cette manière l'équation (2.) sera remplacée par les cinq suivantes:

$$(5.)\quad \begin{cases} \mathrm{x}^2 - \mathrm{x}'^2 + \mathrm{y}^2 - \mathrm{y}'^2 = r^2 - r'^2, \\ \mathrm{x}\mathrm{x}' + \mathrm{y}\mathrm{y}' = rr', \\ x = \mathrm{x} - \mathrm{y}', \quad y = \mathrm{x}' + \mathrm{y}, \\ \mathrm{x}' = p\mathrm{x} + q. \end{cases}$$

§. 2. Observons ici, que les quatre premières de ces équations (5.) peuvent être réunies en deux équations complexes. En effet, en posant

$$(6.)\quad \xi = \mathrm{x} + \mathrm{x}'i, \qquad \eta = \mathrm{y} + \mathrm{y}'i, \qquad \varrho = r + r'i,$$

i étant $= \sqrt{-1}$, on trouvera les formules suivantes très élégantes

$$(7.)\quad \begin{cases} \xi^2 + \eta^2 = \varrho^2, & \mathrm{x}' = p\mathrm{x} + q, \\ \xi + \eta i = x + yi, \end{cases}$$

qui par conséquent représentent la même courbe que l'équation (2.), d'où nous sommes parties.

§. 3. Essayons maintenant de donner une explication géométrique du résultat, que nous venons d'obtenir.

La quantité complexe ξ représente un point dans le plan; comme la relation $\mathrm{x}' = p\mathrm{x} + q$ existe entre les quantités réelles et variables x' et x, il s'ensuit, que le point ξ se meut sur la même droite, qu'on représente ordinairement dans le système rectangulaire par l'équation $\mathrm{y} = p\mathrm{x} + q$.

La courbe, décrite par l'argument ξ, étant connue, on trouvera, que le point η décrit une certaine autre courbe, une troisième courbe sera enfin parcourue par le point $\xi + \eta i$.

De même le point $x+yi$ se meut aussi sur une certaine courbe, si entre les quantités réelles x et y il existe une relation. Cette relation est exprimée par la formule (2.), et l'on voit facilement, que le point $x+yi$ décrit la même courbe, qu'on représente ordinairement dans le système rectangulaire par la dite équation.

Enfin la formule $\xi+\eta i = x+yi$ exprime, que la courbe, parcourue par le point $\xi+\eta i$, défini par les équations $\xi^2+\eta^2=\varrho^2$, $\mathrm{x}'=p\mathrm{x}+q$, et la courbe, parcourue par le point $x+yi$, défini par la formule (2.), sont identiques.

§. 4. Faisons ici une petite digression pour donner une généralisation de la représentation géométrique des équations.

Supposons, qu'on ait entre les quantités complexes et variables ξ et η les relations $\eta = F\xi$, $\mathrm{x}'=f\mathrm{x}$; on voit alors, que les courbes, décrites par l'argument ξ et la fonction η, seront complétement déterminées ainsi que celle, que parcourt le point $\xi+\eta i$. Cette dernière courbe peut être considérée comme représentant l'équation complexe $\eta = F\xi$, quand on la rapporte à une courbe de l'argument $\mathrm{x}'=f\mathrm{x}$. Ainsi nous distinguons entre les représentations d'une fonction et celles d'une équation.

Voyons maintenant ce qui arrive, lorsque les quantités ξ et η deviennent réelles. Pour que l'argument ξ soit réel, il faut, que $\mathrm{x}'=0$; la courbe de l'argument sera donc une droite, qui se confondra avec l'axe X; il faut de plus faire varier les valeurs de $\xi=\mathrm{x}$ entre des limites assez restreintes, afin que η puisse toujours être réel et égal à y. Les équations précédentes se transforment donc en une seule réelle, et l'expression $\xi+\eta i$ devient $\mathrm{x}+\mathrm{y}i$. On voit, que, si entre les quantités réelles x et y il existe une relation $\mathrm{y}=F\mathrm{x}$, la courbe, décrite par le point $\mathrm{x}+\mathrm{y}i$, est la même que celle, qu'on représente ordinairement dans un système rectangulaire par l'équation $\mathrm{y}=F\mathrm{x}$.

La courbe $\eta=F\xi$, $\mathrm{x}'=f\mathrm{x}$, étant ainsi définie, on observe facilement, qu'il faut mettre $\xi+\eta i=x+yi$ et éliminer entre ces trois équations, qui du reste sont équivalentes à cinq équations réelles, les quatre quantités x, x', y, y', pour trouver une équation réelle entre x et y, qui dans le système rectangulaire représente la même courbe. Bornons-nous ici à ces remarques, que nous nous proposons de développer une autre fois avec plus de détail, et revenons à notre sujet.

§. 5. Après avoir transformé l'équation donnée et l'avoir remplacée par les trois formules nouvelles (7.), il est naturel de considérer la courbe dans ses relations avec la droite, décrite par le point ξ, c'est à dire, la droite $x' = px + q$ et avec une ligne ϱ, dont la projection sur l'axe X est égal à r, sur l'axe Y égale à r'. Appelons la droite $x' = px + q$ la droite de l'argument et la ligne ϱ, dont la longueur et la direction sont déterminées par les deux projections, le rayon complexe. Ainsi, au lieu de considérer directement les paramètres a, b, c, d, ou autrement p, q, r, r', nous préférons considérer deux lignes; l'une de ces droites a une position, déterminée par les paramètres p et q, l'autre a une direction et une longueur déterminées par les paramètres r et r'. A un changement dans le système p, q, r, r' correspond un changement dans la position de la droite de l'argument ou dans la direction ou dans la longueur du rayon complexe, et vice versa.

§. 6. Avant d'entrer dans une discussion de la courbe donnée, effectuons encore une fois une transformation, en introduisant des coordonnées polaires. Posons donc

$$(8.)\quad \begin{cases} x + yi = \mathrm{r}(\cos \mathrm{P} + i \sin \mathrm{P}), \\ r + r'i = \mathfrak{r}(\cos \boldsymbol{R} + i \sin \boldsymbol{R}), \\ \qquad p = \operatorname{tg} \boldsymbol{P}. \end{cases}$$

Cela posé, on déduit de l'équation (2.) la suivante

$$(9.)\qquad \mathrm{r}^2 = \mathfrak{r}^2 \frac{\mathrm{r} \sin(\mathrm{P} + \boldsymbol{P} - 2\boldsymbol{R})}{\mathrm{r} \sin(\mathrm{P} - \boldsymbol{P}) - 2q \cos \boldsymbol{P}}.$$

Cette équation sera vérifiée, en posant

$$\mathrm{r} = 0, \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{r} = \mathfrak{r}^2 \frac{\sin(\mathrm{P} + \boldsymbol{P} - 2\boldsymbol{R})}{\mathrm{r} \sin(\mathrm{P} - \boldsymbol{P}) - 2q \cos \boldsymbol{P}}.$$

La première de ces formules indique que l'origine des coordonnées est un point sur la courbe. Du reste, comme la seconde est du second degré par rapport à r, il est plus commode de supposer que r est une quantité algébrique positive ou négative, au lieu de la considérer toujours comme positive, et ainsi nous pouvons dire que, pour chaque valeur de l'angle polaire P, ou il y a deux rayons vecteurs, ou il n'y en a pas. Il faut en effet remarquer qu'il y a ici une condition nécessaire, c'est que r et P soient toujours réels.

On observe encore que le rayon complexe $\varrho = r + r'i = \mathfrak{r}(\cos \boldsymbol{R} + i \sin \boldsymbol{R})$ est une ligne droite, d'une longeur $\mathfrak{r}$ et d'une direction déterminée par l'angle $\boldsymbol{R}$.

Quant à la droite représentée par l'argument ξ, sa direction est fixée par l'angle P, qu'elle fait avec l'axe X.

§. 7. Examinons maintenant quelques variétés particulières, qu'on trouvera en changeant convenablement la position de la droite ξ et la direction du rayon ϱ.

Supposons que la droite de l'argument ξ passe par l'origine des coordonnées; on aura donc $q = 0$, et l'équation de cette droite sera $x' = px$; l'équation polaire de la courbe donnée prendra la forme

$$r^2 = \mathfrak{r}^2 \frac{r \sin(P + P - 2R)}{r \sin(P - P)}, \quad \text{ou} \quad r^2 = \mathfrak{r}^2 \frac{\sin(P + P - 2R)}{\sin(P - P)}.$$

Cela posé, faisons tourner le rayon complexe ϱ de telle manière qu'il obtienne la même direction que la droite ξ. On aura donc $R = P$, et l'on trouvera par suite

$$r^2 = \mathfrak{r}^2 \frac{\sin(P - P)}{\sin(P - P)}.$$

Ici on peut verifier, en posant $r^2 = \mathfrak{r}^2$, si P est différent de P; si au contraire $P = P$, on peut donner à r une valeur réelle quelconque. Ainsi la courbe correspondante cherchée se compose d'un cercle, dont le rayon est égal à la longueur $\mathfrak{r}$ du rayon complexe ϱ, et dont le centre est l'origine des coordonnées, et d'un autre côté, d'une droite qui se confond avec la droite de l'argument ξ.

Posons plus spécialement $P = 0$; la droite ξ se confondra alors avec l'axe X, son équation se réduisant à $x' = 0$; la quantité complexe $\xi = x + x'i$ se réduira à la quantité réelle x. D'après l'hypothèse faite, on aura aussi $R = 0$; le rayon $\varrho = r + r'i = \mathfrak{r}(\cos R + i \sin R)$ sera donc de même réel et égal à r ou $\mathfrak{r}$. Les deux courbes cherchées seront le cercle et une droite qui se confondra avec l'axe X. Quant à l'équation complexe (7.), elle se transformera en celles ci

$$(10.) \quad \begin{cases} x^2 + \eta^2 = \mathfrak{r}^2, \\ x + \eta i = x + yi. \end{cases}$$

Concevons maintenant encore plus particulièrement qu'on donne à l'argument x des valeurs réelles tellement restreintes, ou, en d'autres termes, supposons qu'on fasse parcourir à l'argument ξ l'axe X entre telles limites que la fonction η ou $y + y'i$ soit réelle et égale à y, et voyons alors ce qui arrivera. Dans ce cas les deux équations précédentes se transforment en

celles ci

$$(11.)\quad \mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2 = \mathrm{r}^2, \qquad \mathrm{x}+\mathrm{y}i = x+yi.$$

On obtient donc, parceque x, y, x, y sont réels, $\mathrm{x}=x$, $\mathrm{y}=y$, et par suite on trouve l'équation d'un cercle

$$x^2+y^2 = \mathrm{r}^2.$$

Ainsi pour toutes les valeurs de x entre les limites $\mathrm{x}=-\mathrm{r}$ et $\mathrm{x}=+\mathrm{r}$ les équations (10.) représentent le cerle du rayon r; en donnant à x toutes les valeurs réelles en dehors de ces limites, on obtiendra par conséquent l'autre partie, la droite, qui se confond avec l'axe polaire. On peut aussi vérifier facilement ce dernier résultat; en effet, x étant $<-\mathrm{r}$ ou $>+\mathrm{r}$, $\eta=\mathrm{y}+\mathrm{y}'i$ se réduit à la quantité imaginaire $\mathrm{y}'i$; on obtiendra donc

$$\mathrm{x}^2-\mathrm{y}'^2 = \mathrm{r}^2, \qquad \mathrm{x}-\mathrm{y}' = x+yi,$$

par suite on aura

$$y = 0.$$

On voit aussi que cette droite se confond surtout avec l'axe $\boldsymbol{X}$; car on déduit que $\mathrm{x}^2-\mathrm{r}^2=(\mathrm{x}-x)^2$, d'où l'on conclut facilement qu'en donnant à x toutes les valeurs réelles en dehors des deux limites $-\mathrm{r}$ et $+\mathrm{r}$, x obtiendra à son tour chaque valeur réelle entre $-\infty$ et $+\infty$.

Supposons maintenant, en deuxième lieu, qu'on fasse tourner le rayon complexe ϱ jusqu'à ce qu'il devienne perpendiculaire à la droite de l'argument ξ; on aura donc $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{P}\pm\frac{\pi}{2}$ et l'on trouvera par suite

$$r^2 = -\mathrm{r}^2\frac{\sin(\mathrm{P}-\boldsymbol{P})}{\sin(\mathrm{P}-\boldsymbol{P})}.$$

Cette équation ne peut être satisfaite qu'en posant $\mathrm{P}=\boldsymbol{P}$. Dans ce cas la courbe cherchée consiste seulement en une droite, qui se confond avec celle décrite par l'argument ξ.

Il existe cependant une position intermédiaire du rayon complexe ϱ, à laquelle correspond une forme remarquable de la courbe. Mettons donc en dernier lieu $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{P}\pm\frac{\pi}{4}$; on trouvera dans l'un ou l'autre cas

$$r^2 = -\mathrm{r}^2\operatorname{cotg}(\mathrm{P}-\boldsymbol{P}) \quad \text{ou} \quad r^2 = +\mathrm{r}^2\operatorname{cotg}(\mathrm{P}-\boldsymbol{P}).$$

Si l'on donne ici à $\boldsymbol{P}$ la valeur 0, c'est à dire, si la droite ξ se confond avec l'axe $\boldsymbol{X}$, on aura

$$r^2 = -\mathrm{r}^2\operatorname{cotg}\mathrm{P} \quad \text{ou} \quad r^2 = +\mathrm{r}^2\operatorname{cotg}\mathrm{P};$$

si au contraire on pose $\boldsymbol{P}=\frac{\pi}{2}$, en d'autres termes, si la droite ξ se con-

fond avec l'axe *Y*, on trouvera

$$r^2 = +r^2 \operatorname{tg} \mathrm{P} \quad \text{ou} \quad r^2 = -r^2 \operatorname{tg} \mathrm{P}.$$

On obtiendra des résultats analogues, en posant $R = P \pm \frac{3\pi}{4}$.

§. 8. L'équation polaire de la courbe générale peut être écrite de cette manière

$$(12.) \quad r^2 - \frac{2q\cos P}{\sin(\mathrm{P}-P)}\, r - r^2 \frac{\sin(\mathrm{P}+P-2R)}{\sin(\mathrm{P}-P)} = 0.$$

Il faut ici que toutes les quantités soient réelles; quant à r, on pouvait le prendre toujours positif, nous préférons, comme nous l'avons déjà dit, le considérer comme une quantité algébrique positive ou négative.

Cela posé, on voit qu'à chaque valeur de P entre ces limites, entre lesquelles il y a des racines réelles, correspondent deux rayons vecteurs r. Cherchons donc la condition de réalité. Cette condition sera évidemment exprimée par la formule

$$q^2\cos^2 P + r^2 \sin(\mathrm{P}-P)\sin(\mathrm{P}+P-2R) \gtreqless 0$$

ou, en décomposant le produit des sinus en somme de cosinus,

$$(13.) \quad q^2\cos^2 P + \tfrac{1}{2} r^2 \cos 2(P-R) - \tfrac{1}{2} r^2 \cos 2(\mathrm{P}-R) \gtreqless 0.$$

De cette dernière formule on tire facilement toutes les valeurs de l'angle polaire P, pour lesquelles il existe des rayons vecteurs.

Supposons plus spécialement que la droite de l'argument ξ passe par l'origine des coordonnées. Alors on aura $q=0$, et la condition de réalité sera ainsi

$$(14.) \quad \cos 2(\mathrm{P}-R) \lesseqgtr \cos 2(P-R).$$

Les valeurs des limites pour l'angle polaire P seront par conséquent

$$(15.) \quad 2(\mathrm{P}-R) = \mp 2(P-R)$$

ou, si l'on veut, $2(\mathrm{P}-R) = \pm 2(P-R) +$ multiple (2π). Si l'on peut choisir le multiple de telle manière que $-2(P-R)+$ multiple $2(\pi)$ soit compris entre 0 et π, on verra qu'il faut augmenter l'angle polaire P pour satisfaire à l'inégalité; si au contraire cet angle constant est compris entre π et 2π, il faudra diminuer les valeurs de P.

§. 9. Si dans l'équation (12.) on substitue les valeurs de P, déterminées par les formules (15.), on obtient les résultats suivants

$$(16.) \quad \begin{cases} \mathrm{P}-R = -(P-R), & r = 0 \quad \text{ou} \quad = \dfrac{2q\cos P}{\sin 2(R-P)}, \\ \mathrm{P}-R = +(P-R), & r = \pm\infty \quad \text{ou} \quad = r^2 \dfrac{\sin 2(R-P)}{2q\cos P}. \end{cases}$$

Par la première formule on voit que si l'on change la longueur $\mathfrak{r}$ du rayon complexe ϱ, on obtient un système de courbes qui se coupent dans l'origine des coordonnées et dans le point

$$\mathrm{P} = 2R - P, \qquad \mathrm{r} = \frac{2q \cos P}{\sin 2(R-P)}.$$

De plus, en multipliant les longueurs des deux rayons vecteurs finis et différents de zéro, on trouve le produit $\mathfrak{r}^2$. La courbe a donc cette propriété, que pour les deux angles polaires, auxquels il ne correspond plus qu'un rayon vecteur, le produit des longueurs absolues de ces rayons vecteurs est égal à $\mathfrak{r}^2$, ou en d'autres termes la longueur du rayon complexe ϱ est la moyenne géométrique de ces deux rayons vecteurs.

§. 10. La propriéte énoncée est cependant plus générale encore. Considérons les rayons vecteurs, correspondant aux angles polaires $\mathrm{P} = R + Q + n\pi$ et $\mathrm{P} = R - Q + n\pi$, et appelons les valeurs correspondantes des rayons vecteurs r_{R+Q} et r_{R-Q}. Alors si l'on substitue dans la formule (12.), on trouve

$$\mathrm{r}^2 \mp \frac{2q \cos P}{\sin(Q+R-P)} \mathrm{r} - \mathfrak{r}^2 \frac{\sin(Q-R+P)}{\sin(Q+R-P)} = 0,$$

$$\mathrm{r}^2 \mp \frac{2q \cos P}{\sin(Q-R+P)} \mathrm{r} - \mathfrak{r}^2 \frac{\sin(Q+R-P)}{\sin(Q-R+P)} = 0.$$

On observe ici, que l'une de ces équations se change en l'autre, en changeant r en $\frac{\mathfrak{r}^2}{\mathrm{r}}$; on peut donc conclure, que

$$(17.). \quad \mathfrak{r}^2 = \mathrm{r}_{R+Q} \cdot \mathrm{r}_{R-Q}.$$

Il s'ensuit que la longueur absolue du rayon complexe ϱ est égale à la moyenne géométrique de deux rayons vecteurs, qui sont symétriquement placés par rapport à la direction R de ce rayon complexe.

On peut encore démontrer cette propriété d'une autre manière, en partant immédiatement de l'équation complexe $\xi^2 + \eta^2 = \varrho^2$.

§. 11. Si l'on cherche les asymptotes de la courbe donnée, on obtient facilement de l'équation (12.)

$$\mathrm{r} \sin(\mathrm{P} - P) = 2q \cos P$$

ou, comme on peut écrire en ayant égard aux formules (8.),

$$(18.) \quad y = px + 2q.$$

La courbe aura donc une seule asymptote, qui sera parallèle à la droite, décrite par l'argument ξ et située à une distance double de l'origine des coordonnées.

§. 12. Par l'équation (12.) on trouve de plus, en désignant la moyenne arithmétique des deux racines par r_1, que

$$\mathrm{r}_1 = \frac{q\cos P}{\sin(\mathrm{P}-P)}$$

ou, en développant et posant ensuite $\mathrm{r}_1(\cos\mathrm{P}+i\sin\mathrm{P}) = x_1+y_1 i$,

$$(19.)\qquad y_1 = px_1+q.$$

On voit donc que si l'on divise en deux parties égales toutes les cordes qui, prolongées, passent par ce point de la courbe qu'on a pris pour l'origine des coordonnées, et qui se terminent en deux autres points de la courbe, le lieu géométrique de tous ces points de division sera la droite de l'argument ξ ou certaines parties de cette dernière. Lorsqu'on a $q = 0$, le lieu géométrique se réduit à un seul point, l'origine des coordonnées, qui de cette manière est le centre de la courbe donnée.

§. 13. Cherchons aussi le lieu géométrique de tous les points milieux sur les cordes parallèles à la droite ξ.

L'équation de cette droite étant $\mathrm{x}' = p\mathrm{x}+q$, il faut d'abord substituer dans l'équation de la courbe (2.) la valeur de y, tirée de la formule $y = px+k$; ainsi on obtient

$$(1+p^2)x^2+2pkx+k^2 = \frac{2(p(r^2-r'^2)+(p^2-1)rr')x+(r^2-r'^2+2prr')k}{k-2q}.$$

On trouve donc comme abscisse d'un point milieu sur une des cordes parallèles à la droite ξ

$$x = \frac{p(r^2-r'^2)+(p^2-1)rr'}{(1+p^2)(k-2q)} - \frac{pk}{1+p^2},$$

enfin on obtient le lieu géométrique demandé, en éliminant k entre cette dernière équation et l'équation $y = px+k$; ainsi on aura, après avoir effectué les réductions,

$$(20.)\qquad (x+py)(y-px-2q)+(r+pr')(r'-pr) = 0.$$

On peut donc énoncer que le lieu géometrique de tous les points milieux sur les cordes parallèles à la droite ξ est une hyperbole équilatère.

§. 14. On voit encore que les deux asymptotes de cette hyperbole seront

$$(21.)\qquad y = px+2q \quad \text{et} \quad y = -\frac{1}{p}x.$$

L'une de ces asymptotes est donc parallèle à la droite ξ, et se confond avec

l'asymptote de la courbe donnée, l'autre est perpendiculaire à la droite de l'argument ξ et passe par l'origine des coordonnées. Si l'on fait varier la longueur et la direction du rayon complexe, l'hyperbole équilatère et la courbe donnée varieront aussi, tandisque leurs asymptotes resteront invariables.

Après avoir trouvé les asymptotes, on obtient facilement les coordonnées du centre $x = -\frac{2pq}{1+p^2}$ et $y = \frac{2q}{1+p^2}$; le centre sera donc le point $-\frac{2pq}{1+p^2} + i\frac{2q}{1+p^2}$ ou

$$(22.)\quad 2q\cos \boldsymbol{P}\left(\cos\left(\boldsymbol{P}+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\boldsymbol{P}+\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

On voit donc que, dans l'équation polaire de la courbe donnée, l'expression $2q\cos\boldsymbol{P}$ représente la distance de l'origine au centre de l'hyperbole équilatère.

En rapportant cette dernière courbe à son centre l'équation (20.) prendra la forme

$$(23.)\quad (x+py)(y-px)+(r'+pr')(r'-pr) = 0.$$

Si l'on introduit les coordonnées polaires, les deux formules (20.) et (23.) se changent en

$$(24.)\quad \begin{cases} \sin 2(\mathrm{P}-\boldsymbol{P})\mathrm{r}^2 - 4q\cos\boldsymbol{P}\cos(\mathrm{P}-\boldsymbol{P})\mathrm{r} + \mathfrak{r}^2\sin 2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P}) = 0 \\ \mathrm{r}^2\sin 2(\mathrm{P}-\boldsymbol{P}) + \mathfrak{r}^2\sin 2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P}) = 0. \end{cases}$$

En posant dans la dernière formule $\mathrm{P} = \boldsymbol{R} \pm \frac{\pi}{2}$, on trouve $\mathrm{r} = \pm\mathfrak{r}$; ainsi les rayons vecteurs du centre de l'hyperbole, perpendiculaires à la direction du rayon complexe, ont la même longueur que ce dernier.

Pour trouver le carré du demi-axe de l'hyperbole équilatère, il faut poser $\mathrm{P} = \boldsymbol{P} + \frac{\pi}{4}$ ou $\mathrm{P} = \boldsymbol{P} - \frac{\pi}{4}$; on obtiendra donc

$$(25.)\quad a^2 = \pm\mathfrak{r}^2\sin 2(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{R})$$

a^2 étant le carré cherché. Cette expression joue un rôle dans plusieurs formules; nous allons ici en donner quelques applications.

On a vu que, si l'on change la longueur $\mathfrak{r}$ du rayon complexe ρ, on obtient un système de courbes, qui se coupent dans le point $\mathrm{P} = 2\boldsymbol{R} - \boldsymbol{P}$, $r = \frac{2q\cos P}{\sin 2(\boldsymbol{R}-P)}$ et se touchent dans l'origine des coordonnées. Tirons maintenant une droite qui joigne ces deux points, et appelons d_0 la longueur absolue de cette droite, qui du reste touchera les courbes dans l'origine; on aura donc d'après les formules (16.)

$$(26.)\quad d_0 = \pm\frac{2q\cos P}{\sin 2(\boldsymbol{R}-P)}.$$

Appelons de plus d la distance absolue entre l'origine des coordonnées et le centre de l'hyperbole équilatère, nous aurons de cette manière

$$(27.)\quad d = \pm 2q\cos \boldsymbol{P}.$$

Cela posé, en prenant une courbe quelconque dans le système, et en employant la formule (25.), on trouvera cette formule remarquable

$$(28.)\quad \frac{d_0}{d} = \frac{\mathrm{r}^2}{a^2}.$$

On aura une autre formule remarquable, en partant de la seconde des équations (16.) $\mathrm{P} = \boldsymbol{P}$, $\mathrm{r} = \pm\infty$ et $\mathrm{r} = \mathrm{r}^2 \frac{\sin 2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P})}{2q\cos \boldsymbol{P}}$. Appelons ici d_1 la longueur absolue de ce rayon vecteur fini, qui correspond à un angle $\mathrm{P} = \boldsymbol{P}$, c'est à dire, au même angle que la droite de l'argument ξ fait avec l'axe $\boldsymbol{X}$; on aura évidemment

$$(29.)\quad d_1 = \pm \mathrm{r}^2 \frac{\sin 2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P})}{2q\cos \boldsymbol{P}},$$

et l'on trouvera par suite

$$(30.)\quad dd_1 = a^2.$$

§. 15. Cherchons les intersections entre la courbe donnée et l'hyperbole équilatère. Leurs équations, exprimées par des coordonnées polaires, seront

$$(31.)\quad \mathrm{r}(\mathrm{r}\sin(\mathrm{P}-\boldsymbol{P}) - 2q\cos \boldsymbol{P}) = \mathrm{r}^2 \sin(\mathrm{P}+\boldsymbol{P}-2\boldsymbol{R}),$$

$$(32.)\quad 2\mathrm{r}\cos(\mathrm{P}-\boldsymbol{P})(\mathrm{r}\sin(\mathrm{P}-\boldsymbol{P}) - 2q\cos \boldsymbol{P}) = \mathrm{r}^2 \sin 2(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{R}),$$

d'où l'on conclut, en divisant,

$$\frac{1}{2\cos(\mathrm{P}-\boldsymbol{P})} = \frac{\sin(\mathrm{P}+\boldsymbol{P}-2\boldsymbol{R})}{\sin 2(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{R})}.$$

On ne peut pas en effet avoir $\mathrm{r}\sin(\mathrm{P}-\boldsymbol{P}) - 2q\cos \boldsymbol{P} = 0$, parceque cette équation représente l'asymptote commune des deux courbes. De la formule que nous venons d'obtenir il résulte de plus

$$1 = \frac{2\sin(\mathrm{P}+\boldsymbol{P}-2\boldsymbol{R})\cos(\mathrm{P}-\boldsymbol{P})}{\sin 2(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{R})},$$

$$1 = \frac{\sin 2(\mathrm{P}-\boldsymbol{R}) + \sin 2(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{R})}{\sin 2(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{R})}$$

ou enfin, excepté le cas où $2(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{R})$ est égal à un multiple de π,

$$(33.)\quad \sin 2(\mathrm{P}-\boldsymbol{R}) = 0.$$

On voit donc que les intersections sont situées dans l'une ou l'autre des deux droites passant par l'origine des coordonnées et ayant la même

direction que le rayon complexe ou une direction perpendiculaire; car on voit, que ces droites font avec l'axe X les angles $\mathrm{P} = \boldsymbol{R}$ ou $\mathrm{P} = \boldsymbol{R} + \frac{\pi}{2}$. De cette manière il peut arriver, qu'on ait 4 intersections ou que l'on n'en ait que 2. En effet, la condition de réalité du rayon vecteur étant (13.)

$$q^2\cos^2\boldsymbol{P} + \mathfrak{r}^2\sin(\mathrm{P}-\boldsymbol{P})\sin(\mathrm{P}+\boldsymbol{P}-2\boldsymbol{R}) \gtreqless 0,$$

on trouve, en substituant $\mathrm{P} = \boldsymbol{R}$ ou $\mathrm{P} = \boldsymbol{R} + \frac{\pi}{2}$,

$$(34.)\qquad q^2\cos^2\boldsymbol{P} - \mathfrak{r}^2\sin^2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P}) \gtreqless 0$$

ou

$$q^2\cos^2\boldsymbol{P} + \mathfrak{r}^2\cos^2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P}) \gtreqless 0.$$

La dernière condition sera toujours remplie, par suite il existera toujours deux intersections, appartenant à la droite $\mathrm{P} = \boldsymbol{R} + \frac{\pi}{2}$; la première condition au contraire ne pourra pas être satisfaite dans tous les cas. On n'aura par exemple que deux intersections, si $q = 0$.

§. 16. Après avoir traité l'intersection de la courbe donnée et de l'hyperbole équilatère, considérons encore celle de la première courbe de et l'asymptote commune. Nous aurons alors en même temps

$$\mathrm{r}(\mathrm{r}\sin(\mathrm{P}-\boldsymbol{P}) - 2q\cos\boldsymbol{P}) = \mathfrak{r}^2\sin(\mathrm{P}+\boldsymbol{P}-2\boldsymbol{R}),$$
$$\mathrm{r}\sin(\mathrm{P}-\boldsymbol{P}) - 2q\cos\boldsymbol{P} = 0,$$

d'où il résulte, que

$$(35.)\qquad \mathrm{P} = 2\boldsymbol{R} - \boldsymbol{P},\qquad \mathrm{r} = \frac{2q\cos\boldsymbol{P}}{\sin 2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P})}.$$

Le point cherché sera donc identique avec celui où se coupent mutuellement toutes les courbes, appartenant à différentes valeurs de la longueur $\mathfrak{r}$ du rayon complexe.

§. 17. Nous avons donné la forme suivante à l'équation polaire de la courbe proposée

$$\mathrm{r}(\mathrm{r}\sin(\mathrm{P}-\boldsymbol{P}) - 2q\cos\boldsymbol{P}) = \mathfrak{r}^2\sin(\mathrm{P}+\boldsymbol{P}-2\boldsymbol{R}).$$

En introduisant un nouveau paramètre u, on peut écrire d'une autre manière

$$\mathrm{r}\sin(\mathrm{P}-\boldsymbol{P}) - 2(q+u)\cos\boldsymbol{P} = 0,$$
$$\mathrm{r}^2 = \mathfrak{r}^2\,\frac{\mathrm{r}\sin(\mathrm{P}+\boldsymbol{P}-2\boldsymbol{R})}{2u\cos\boldsymbol{P}},$$

ou enfin, lorsqu'on transforme en coordonnées rectangulaires,

$$y = px + 2(q+u),$$
$$x^2 + y^2 = \tfrac{1}{4}\mathfrak{r}^2 \frac{\cos(P-2R)}{u\cos P} y + \tfrac{1}{4}\mathfrak{r}^2 \frac{\sin(P-2R)}{u\cos P} x,$$

ou

$$(36.)\quad \begin{cases} y = px + 2(q+u), \\ \left(x - \frac{\mathfrak{r}^2\sin(P-2R)}{4u\cos P}\right)^2 + \left(y - \frac{\mathfrak{r}^2\cos(P-2R)}{4u\cos P}\right)^2 = \left(\frac{\mathfrak{r}^2}{4u\cos P}\right)^2. \end{cases}$$

Ainsi la courbe donnée est le lieu géométrique de tous les points d'intersection, correspondant aux mêmes valeurs du paramètre variable u dans une suite de droites, parallèles à la droite de l'argument ξ, et une suite de cercles. Les rayons de ces cercles sont égaux à $\frac{\mathfrak{r}^2}{4u\cos P}$, leurs centres sont les points $\frac{\mathfrak{r}^2}{4u\cos P}(\sin(P-2R)+i\cos(P-2R))$ ou

$$\frac{\mathfrak{r}^2}{4u\cos P}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-(P-2R)\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-(P-2R)\right)\right);$$

ils sont distribués sur la droite $\mathrm{P} = \frac{\pi}{2} - (P-2R)$, qui passe par l'origine des coordonnées, et qui dans ce point est normale à la courbe. Les distances des centres de cette origine sont égales aux rayons $\frac{\mathfrak{r}^2}{4u\cos P}$.

On peut donc facilement construire la courbe en construisant les parallèles et les cercles correspondants.

Cependant si l'on a déjà construit l'hyperbole équilatère (23.), qui est le lieu géométrique de tous les points milieux sur les cordes parallèles à la droite de l'argument, on peut plus facilement opérer de la manière suivante. Du point d'intersection de cette hyperbole et de quelqu'une des droites $y = px + 2(q+u)$, parallèles à la droite de l'argument ξ, on élève une perpendiculaire. S'il existe sur la parallèle deux points, appartenant à la courbe cherchée, ils appartiennent aussi à un cercle (36.) dont le centre est situé sur la dite perpendiculaire; mais ce centre est aussi placé sur la droite $\mathrm{P} = \frac{\pi}{2} - (P-2R)$, il est par conséquent complètement déterminé. De plus, le cercle passe, comme nous le savons, par ce point de la courbe qui est l'origine des coordonnées, par suite le rayon sera aussi connu. On peut donc construire le cercle correspondant à la parallèle, et trouver les points d'intersection situés sur la courbe.

II.

§. 18. Nous ne traitons plus le cas général; nous supposons maintenant que $q = 0$, en d'autres termes, que la droite de l'argument ξ passe par l'origine des coordonnées. La courbe que nous avons à considérer est donc la suivante

$$(37.)\quad \begin{cases} x^2+y^2 = \dfrac{(r^2+2prr'-r'^2)y+(pr^2-2rr'-pr'^2)x}{y-px}, \\ \text{ou} \\ \qquad \mathrm{r}^2 = \mathrm{r}^2 \dfrac{\sin(\mathrm{P}+P-2R)}{\sin(\mathrm{P}-P)}, \\ \text{ou enfin} \\ \xi^2+\eta^2=\varrho^2, \quad \mathrm{x}'=p\mathrm{x}, \quad \xi+\eta i = x+yi, \end{cases}$$

ξ, η, ϱ étant des quantités complexes, qui sont respectivement égales à $\mathrm{x}+\mathrm{x}'i$, $\mathrm{y}+\mathrm{y}'i$, $r+r'i$.

Tâchons d'abord de donner quelques autres formes aux deux premières formules pour montrer avec quelle simplicité elles s'expriment, lorsqu'on introduit les quantités complexes.

Désignons la partie réelle d'une quantité complexe quelconque $\mu = m+m'i$ par $\mathrm{Rl}(\mu)$ et le coefficient de i dans la partie imaginaire par $\mathrm{Im}(\mu)$ de manière qu'on ait

$$(38.)\quad \mu = \mathrm{Rl}(\mu)+i\mathrm{Im}(\mu),$$

désignons de plus

$$(39.)\quad \begin{cases} x+yi=\varsigma, & x-yi=\bar{\varsigma}, \\ r+r'i=\varrho, & r-r'i=\bar{\varrho}, \\ 1+pi=\varpi, & 1-pi=\bar{\varpi}; \end{cases}$$

nous trouverons alors, en remarquant que

$$(40.)\quad \mathrm{Im}(\mu\nu) = \mathrm{Rl}(\mu)\mathrm{Im}(\nu)+\mathrm{Rl}(\nu)\mathrm{Im}(\mu),$$

que la première des équations (37.) se peut mettre sous la forme

$$(41.)\quad \begin{cases} \mathrm{Im}(\varsigma^2\bar{\varpi}\bar{\varsigma}-\bar{\varrho}^2\varpi\varsigma) = 0, \\ \text{ou} \\ \mathrm{Im}(\varsigma^2\bar{\varpi}\bar{\varsigma}+\varrho^2\bar{\varpi}\bar{\varsigma}) = 0. \end{cases}$$

§. 19. La deuxième des formules (37.) peut être mise sous la forme

$$\mathrm{r}^2 = \mathrm{r}^2\frac{\sin(\mathrm{P}-P-2(R-P))}{\sin(\mathrm{P}-P)},$$

d'où l'on tire facilement

$$(42.)\qquad \mathrm{tg}(\mathrm{P}-\boldsymbol{P}) = \frac{\mathfrak{r}^2\sin 2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P})}{\mathfrak{r}^2\cos 2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P})-\mathrm{r}^2};$$

$\mathrm{P}-\boldsymbol{P}$ est donc l'angle que la droite, représentée par la quantité complexe $\mathfrak{r}^2\cos 2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P})-\mathrm{r}^2+i\mathfrak{r}^2\sin 2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P})$, fait avec l'axe $\boldsymbol{X}$. Sans changer cet angle, on peut diviser la quantité complexe par une quantité réelle et positive $\mathfrak{p}^2 = 1+p^2 =$ le carré du module de la quantité complexe

$$\varpi = 1+pi = \mathfrak{p}(\cos\boldsymbol{P}+i\sin\boldsymbol{P});$$

on aura donc, en désignant l'angle que la droite, représentée par une quantité complexe quelconque μ, fait avec l'axe $\boldsymbol{X}$, par $\mathrm{ang}(\mu)$

$$\mathrm{P}-\boldsymbol{P} = \mathrm{ang}\left\{\frac{\mathfrak{r}^2}{\mathfrak{p}^2}(\cos 2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P})+i\sin 2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P}))-\frac{\mathrm{r}^2}{\mathfrak{p}^2}\right\}$$

ou enfin en remarquant que

$$\varpi = 1+pi = \mathfrak{p}(\cos\boldsymbol{P}+i\sin\boldsymbol{P}),\quad \text{si}\quad p = \mathrm{tg}\boldsymbol{P},$$

$$(43.)\qquad \mathrm{P}-\boldsymbol{P} = \mathrm{ang}\left(\frac{\varrho^2}{\varpi^2}-\frac{\mathrm{r}^2}{\mathfrak{p}^2}\right).$$

On peut aussi écrire

$$(44.)\qquad \mathrm{P}-\boldsymbol{P} = \mathrm{ang}\left(\frac{\varrho^2}{\varpi^2}-\frac{\varsigma\bar{\varsigma}}{\varpi\bar{\varpi}}\right),$$

ou encore d'une autre manière

$$(45.)\qquad \mathrm{P}-\boldsymbol{P} = \mathrm{Im}\log\left(\frac{\varrho^2}{\varpi^2}-\frac{\mathrm{r}^2}{\mathfrak{p}^2}\right).$$

Supposons ici qu'on ait $\boldsymbol{P}=0$, $\boldsymbol{R}=0$, en d'autres termes, que le rayon soit réel et que la droite de l'argument ξ se confonde avec l'axe $\boldsymbol{X}$; alors on aura $\mathfrak{p}=1$, $\varpi=1$, $\varrho=\mathfrak{r}$, et par conséquent on trouvera

$$\mathrm{P} = \mathrm{ang}(\mathfrak{r}^2-\mathrm{r}^2).$$

Il s'ensuit que l'angle polaire P est égal à 0 ou à π, si les valeurs de r^2 sont différentes des valeurs de $\mathfrak{r}^2$, mais qu'il est arbitraire, si $\mathrm{r}^2=\mathfrak{r}^2$. C'est aussi ce à quoi il fallait s'attendre; car cette courbe, comme nous l'avons vu dans §. 7, est composée de deux courbes, une droite, qui se confond avec l'axe $\boldsymbol{X}$ et correspond aux valeurs de r^2 différentes de celles de $\mathfrak{r}^2$, et un cercle qui correspond à $\mathrm{r}^2=\mathfrak{r}^2$.

§. 20. Voici encore une autre forme qu'on peut donner à l'équation de la courbe. Comme on peut écrire

$$(46.)\qquad \mathrm{r}^2 = \mathfrak{r}^2\frac{\sin((\mathrm{P}-\boldsymbol{R})+(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{R}))}{\sin((\mathrm{P}-\boldsymbol{R})-(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{R}))},$$

il s'ensuit que

$$(47.)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{r^2}{\mathfrak{r}^2} = \frac{1+\dfrac{\operatorname{cotg}(\mathrm{P}-\boldsymbol{R})}{\operatorname{cotg}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{R})}}{1-\dfrac{\operatorname{cotg}(\mathrm{P}-\boldsymbol{R})}{\operatorname{cotg}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{R})}} \\ &-\frac{\operatorname{cotg}(\mathrm{P}-\boldsymbol{R})}{\operatorname{cotg}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{R})} = \frac{1+\left(-\dfrac{r^2}{\mathfrak{r}^2}\right)}{1-\left(-\dfrac{r^2}{\mathfrak{r}^2}\right)}, \qquad \frac{\operatorname{cotg}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{R})}{\operatorname{cotg}(\mathrm{P}-\boldsymbol{R})} = \frac{1+\dfrac{\mathfrak{r}^2}{r^2}}{1-\dfrac{\mathfrak{r}^2}{r^2}}. \end{aligned}\right.$$

Par ces équations on voit que le rapport $\frac{r^2}{\mathfrak{r}^2}$ est la même fonction du rapport $\frac{\operatorname{cotg}(\mathrm{P}-\boldsymbol{R})}{\operatorname{cotg}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{R})}$ comme ce dernier, pris en sens opposé ou inverse $-\frac{\operatorname{cotg}(\mathrm{P}-\boldsymbol{R})}{\operatorname{cotg}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{R})}$ ou $\frac{\operatorname{cotg}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{R})}{\operatorname{cotg}(\mathrm{P}-\boldsymbol{R})}$, l'est du premier, pris en sens opposé ou inverse $-\frac{r^2}{\mathfrak{r}^2}$ ou $\frac{\mathfrak{r}^2}{r^2}$.

§. 21. En regardant l'équation polaire (46.) on observe, qu'on peut poser

$$\mathrm{P}-\boldsymbol{R} = \mathrm{P}_1-\boldsymbol{R}_1, \quad \boldsymbol{P}-\boldsymbol{R} = \boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{R}_1.$$

On voit donc que si la droite de l'argument ξ et le rayon complexe ϱ se tournent de manière que l'angle compris entre ces deux lignes reste constant, la courbe donnée ne fait que changer de position. Elle tourne de la même manière autour de l'origine des coordonnées comme la droite de l'argument à laquelle elle est rapportée.

On peut par exemple satisfaire aux équations précédentes, en posant

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}, \ \boldsymbol{R} = 0 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{P}_1 = 0, \ \boldsymbol{R}_1 = -\boldsymbol{P}$$

et en même temps

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}_1 + \boldsymbol{P};$$

il s'ensuit que les courbes

$$(48.)\quad \left\{\begin{aligned} &\xi^2+\eta^2 = \mathfrak{r}^2, && x' = \operatorname{tg}\boldsymbol{P}.x, && \xi+\eta i = x+yi, \\ &\xi^2+\eta^2 = \mathfrak{r}^2(\cos 2\boldsymbol{P} - i\sin 2\boldsymbol{P}), && x' = 0, && \xi+\eta i = x+yi, \end{aligned}\right.$$

c'est à dire, que la courbe avec le rayon réel $\mathfrak{r}$, rapportée à une droite de l'argument ξ, qui passe par l'origine des coordonnées et qui fait un angle $\boldsymbol{P}$ avec l'axe X, et que la courbe avec le rayon complexe ϱ de la même longueur $\mathfrak{r}$ et d'une direction déterminée par l'angle $-\boldsymbol{P}$, rapportée à une autre droite ξ, qui se confond avec l'axe X, ne diffèrent que par rapport à la position, et qu'il faut tourner la dernière courbe d'un angle égal à $\boldsymbol{P}$ pour la ramener à la même position que celle de la première.

§. 22. En considérant la troisième des formules (37.) et en marquant que $\xi = x + x'i$, $\eta = y + y'i$, $\varrho = r + r'i$, on trouve facilement

$$(1-p^2)x^2 + y^2 - y'^2 = r^2 - r'^2,$$
$$px^2 + yy' = rr',$$

d'où l'on tire, en éliminant x, la relation suivante entre les variables réelles y

$$(49.)\quad \begin{cases} p(y^2 - y'^2) + (p^2 - 1)yy' = p(r^2 - r'^2) + (p^2 - 1)rr' \\ \text{ou} \\ (y + py')(y' - py) = (r + pr')(r' - pr). \end{cases}$$

Le point η ou $y + y'i$ décrit donc une hyperbole équilatère, et l'on voit fa ment, en observant la formule (20.) et en y posant $q = 0$, que cette hy bole, parcourue par la fonction η, est la conjuguée de l'hyperbole équila qui est le lieu géométrique de tous les points milieux sur les cordes, paral à la droite de l'argument ξ.

§. 23. Nous avons considéré l'inclinaison $P - \boldsymbol{P}$ du rayon ve par rapport à la droite de l'argument; considérons maintenant l'inclinaiso la tangente par rapport au rayon vecteur.

Si l'on désigne par (r, t) l'angle compris entre un élément d courbe et le rayon vecteur correspondant, on aura $\operatorname{tg}(P, t) = r\frac{\partial P}{\partial r}$. A l de la formule (42.), on trouvera donc facilement

$$\operatorname{tg}(r, t) = \frac{2r^2 r^2 \sin 2(R - P)}{r^4 - 2r^2 r^2 \cos 2(R - P) + r^4}.$$

Cette formule peut encore être écrite de cette manière

$$\operatorname{tg}(P, t) = \frac{\partial}{\partial R} \log(r^4 - 2r^2 r^2 \cos 2(R - P) + r^4)^{\frac{1}{2}}$$

ou en divisant l'expression comprise entre les parenthèses par la constante $\mathfrak{p}^4$ et ayant égard à la définition $\mu = \mathrm{Rl}(\mu) + i\,\mathrm{Im}(\mu)$

$$(50.)\quad \operatorname{tg}(r, t) = \frac{\partial}{\partial R} \mathrm{Rl}\log\left(\frac{\varrho^2}{\varpi^2} - \frac{r^2}{\mathfrak{p}^2}\right).$$

Par cette dernière équation on voit que la tangente de l' fait l'élément de la courbe avec le rayon vecteur est égale à la la partie réelle du même logarithme, dont la partie imaginaire, di donne l'angle compris entre le rayon vecteur et la droite de l'ar

§. 24. Exprimons maintenant $\operatorname{tg}(r, t)$ comme fonction de l'a On a d'abord $\operatorname{tg}(r, t) = \frac{r^2}{r\frac{\partial r}{\partial P}}$; or de l'équation (46.) on tire

$$r\frac{\partial r}{\partial P} = \frac{r^2}{2}\frac{\sin 2(R-P)}{\sin^2(P-P)},$$

on trouvera donc que

$$(51.)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}(r,t) = 2\dfrac{\sin(P+P-2R)\sin(P-P)}{\sin 2(R-P)}, \text{ ou} \\ \operatorname{tg}(r,t) = \dfrac{\cos 2(P-R)-\cos 2(P-R)}{\sin 2(P-R)}. \end{cases}$$

On voit par ces formules que l'angle compris entre le rayon vecteur et l'élément correspondant de la courbe est indépendant de la longueur du rayon complexe. Ainsi si l'on compare deux courbes, qui correspondent à la même droite de l'argument, passant par l origine, et à deux rayons complexes de la même direction mais de différentes longueurs, les éléments, correspondant au même angle polaire, seront parallèles.

Du reste, comme les équations des deux courbes sont

$$r^2 = r^2\frac{\sin(P+P-2R)}{\sin(P-P)} \quad \text{et} \quad r_1^2 = r_1^2\frac{\sin(P+P-2R)}{\sin(P-P)};$$

il s'ensuit que le rapport entre deux rayons vecteurs correspondants est une constante; les deux courbes seront donc semblables.

§. 25. Comme l'angle (r, t) est celui que fait le rayon vecteur prolongé avec l'élément de la courbe, correspondant à un accroissement positif de l'angle polaire, il sera facile de trouver l'inclinaison de cet élément par rapport à l'axe X ou à la droite de l'argument ξ.

On a en effet, en appelant T l'angle que fait l'élément de la courbe ou la tangente avec l'axe X, $T = (r, t) + P$; pour l'inclinaison par rapport à la droite de l'argument on aura $T - P$.

Cela posé, on obtiendra aisément en faisant usage des formules (46.) et (51.) ces valeurs particulières correspondantes:

$r^2 = 0,\quad P - R = +(R-P)$ alors $(r,t) = 0,\qquad T-P = 2(R-P),$

$r = r^2,\quad P - R = \frac{\pi}{2}\qquad$ - $\quad (r,t) = \frac{\pi}{2}-(R-P),\ T-P = \pi,$

$r^2 = \infty,\quad P - R = -(R-P)\quad$ - $\quad (r,t) = 0,\qquad T-P = 0.$

Cependant pour que ces formules soient exactes, il faut encore ajouter des multiples de π dans les expressions pour (r, t) et $T-P$, et les prendre de manière qu'entre les angles que fait le rayon vecteur avec l'élément correspondant, (r, t) représente celui que nous venons de déterminer au commencement du paragraphe.

Il résulte de ces formules que la courbe est parallèle à la droite de l'argument ξ dans les points où $r^2 = \mathfrak{r}^2$ ou $r^2 = \infty$, que l'inclinaison par rapport à la droite ξ de l'élément, correspondant à un rayon vecteur égal à zéro, est le double de l'inclinaison de ce rayon vecteur s'évanouissant par rapport au rayon complexe, que de plus le rayon vecteur et le rayon complexe sont perpendiculaires entre eux, si r^2 est égal à $\mathfrak{r}^2$ etc.

Du reste, puisque l'origine des coordonnées est le centre de la courbe, puisqu'elle a une seule asymptote, qui se confond avec la droite de l'argument etc., on trouvera facilement la forme de la courbe donnée.

§. 26. Cherchons maintenant l'aire d'un secteur de la courbe particulière dont nous nous occupons. En appelant $\boldsymbol{S}(\mathrm{P}, \boldsymbol{Q})$ ou plus simplement $\boldsymbol{S}$, si l'angle $\boldsymbol{Q}$ n'est pas déterminé, l'aire d'un secteur compris entre deux rayons vecteurs et correspondant aux angles polaires P et $\boldsymbol{Q}$, on aura d'après la formule $\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\int r^2 \partial \mathrm{P} + \text{const.}$ et en faisant usage de l'équation (46.)

$$\boldsymbol{S} = \frac{\mathfrak{r}^2}{2}\cos 2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P})\mathrm{P}$$
$$-\frac{\mathfrak{r}^2}{2}\sin 2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P})\log\sin(\mathrm{P}-\boldsymbol{P}) + \text{const.}$$

ou, comme on peut écrire d'une autre manière, parce que $\mathfrak{r}$, $\boldsymbol{R}$ et $\boldsymbol{P}$ sont constants,

$$\text{(52.)}\qquad \boldsymbol{S} = \frac{\mathfrak{r}^2}{2}\cos 2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P})(\mathrm{P}-\boldsymbol{P})$$
$$-\frac{\mathfrak{r}^2}{2}\sin 2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P})\log\sin(\mathrm{P}-\boldsymbol{P}) + \text{const.}$$

ou, si l'on veut,

$$\boldsymbol{S} = \frac{\mathfrak{r}^2}{2}\cos 2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P})\,\text{arc}\sin\sin(\mathrm{P}-\boldsymbol{P})$$
$$-\frac{\mathfrak{r}^2}{2}\sin 2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P})\log\text{nat}\sin(\mathrm{P}-\boldsymbol{P}) + \text{const.}$$

Si l'on suppose que le secteur commence quand $\lim r^2 = 0$, c'est à dire, quand $\mathrm{P}-\boldsymbol{P} = 2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P})$, on obtient, en appelant le secteur correspondant $\boldsymbol{S}(\mathrm{P})$,

$$\text{(53.)}\qquad \boldsymbol{S}(\mathrm{P}) = \frac{\mathfrak{r}^2}{2}\cos 2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P})((\mathrm{P}-\boldsymbol{P})-2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P}))$$
$$-\frac{\mathfrak{r}^2}{2}\sin 2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P})\log\frac{\sin(\mathrm{P}-\boldsymbol{P})}{\sin 2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P})};$$

on aura également

$$(53'.)\quad \boldsymbol{S}(\mathrm{P}, \boldsymbol{Q}) = \frac{\mathrm{r}^2}{2}\cos 2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P})((\mathrm{P}-\boldsymbol{P})-(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{P}))$$
$$-\frac{\mathrm{r}^2}{2}\sin 2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P})\log\frac{\sin(\mathrm{P}-\boldsymbol{P})}{\sin(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{P})}$$

ou, si l'on veut l'écrire d'une autre manière,

$$\boldsymbol{S}(\mathrm{P}, \boldsymbol{Q}) = \frac{\mathrm{r}^2}{2}\cos 2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P})(\arcsin\sin(\mathrm{P}-\boldsymbol{P})-\arcsin\sin(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{P}))$$
$$-\frac{\mathrm{r}^2}{2}\sin 2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P})(\log\mathrm{nat}\sin(\mathrm{P}-\boldsymbol{P})-\log\mathrm{nat}\sin(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{P})).$$

§. 27. On obtient une autre forme très remarquable de l'aire $\boldsymbol{S}$, lorsqu'on l'exprime par le rayon vecteur r, au lieu de l'exprimer par l'angle polaire.

Par les équations (§. 19.) on trouve facilement

$$\sin(\mathrm{P}-\boldsymbol{P}) = \pm\frac{\mathrm{r}^2\sin 2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P})}{\sqrt{\mathrm{r}^4-2\mathrm{r}^2\mathrm{r}^2\cos 2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P})+\mathrm{r}^4}},$$
$$\mathrm{P}-\boldsymbol{P} = \mathrm{arc\,tg}\frac{\mathrm{r}^2\sin 2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P})}{\mathrm{r}^2\cos 2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P})-\mathrm{r}^2},$$

abstraction faite dans la dernière formule d'un multiple de π. En substituant dans l'équation (52.) et en remarquant que r, $\boldsymbol{R}$ et $\boldsymbol{P}$ sont constants, on peut écrire

$$(54.)\quad \boldsymbol{S} = \frac{\mathrm{r}^2}{2}\cos 2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P})\,\mathrm{arc\,tg}\frac{\mathrm{r}^2\sin 2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P})}{\mathrm{r}^2\cos 2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P})-\mathrm{r}^2}$$
$$+\frac{\mathrm{r}^2}{2}\sin 2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P})\log\mathrm{nat}\sqrt{\mathrm{r}^4-2\mathrm{r}^2\mathrm{r}^2\cos 2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P})+\mathrm{r}^4}+\mathrm{const.}$$

La formule obtenue peut encore être transformée, en opérant de la manière suivante. Prenons d'abord le logarithme de la même quantité $\frac{\varrho^2}{\varpi^2}-\frac{\mathrm{r}^2}{\mathfrak{p}^2}$, que nous avons déjà considérée plusieurs fois. Nous aurons

$$\log\Big(\frac{\varrho^2}{\varpi^2}-\frac{\mathrm{r}^2}{\mathfrak{p}^2}\Big) = \log\sqrt{\frac{\mathrm{r}^4}{\mathfrak{p}^4}-2\frac{\mathrm{r}^2}{\mathfrak{p}^2}\frac{\mathrm{r}^2}{\mathfrak{p}^2}\cos 2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P})+\frac{\mathrm{r}^4}{\mathfrak{p}^4}}$$
$$+i\,\mathrm{arc\,tg}\frac{\mathrm{r}^2\sin 2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P})}{\mathrm{r}^2\cos 2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P})-\mathrm{r}^2},$$

nous aurons de plus

$$\frac{\mathfrak{p}^2}{2}\frac{\varrho^2}{\varpi^2} = \frac{\mathrm{r}^2}{2}(\cos 2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P})+i\sin 2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P})).$$

Maintenant si l'on observe la formule (40.), qui donne le développement de l'expression $\mathrm{Im}(\mu,\nu)$, et si l'on remarque encore que dans l'équation (53.)

on peut diviser sous le signe radical par $\mathfrak{p}^4$, en changeant la constante arbitraire, on obtient cette nouvelle formule pour l'aire cherchée du secteur

$$(55.)\qquad \boldsymbol{S} = \operatorname{Im}\left(\frac{\mathfrak{p}^2}{2}\frac{\varrho^2}{\varpi^2}\log\left(\frac{\varrho^2}{\varpi^2}-\frac{\mathfrak{r}^2}{\mathfrak{p}^2}\right)\right)+\text{const.}$$

§. 28. Des équations précédentes on peut tirer plusieurs conséquences.

Supposons, par exemple, que dans l'équation (53.) on pose successivement $2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P})=0$ et $2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P})=\frac{\pi}{2}$; appelons de plus les secteurs correspondants $\boldsymbol{S}_0(\mathrm{P})$ et $\boldsymbol{S}_1(\mathrm{P})$; alors nous aurons

$$\boldsymbol{S}_0(\mathrm{P})=\frac{\mathfrak{r}^2}{2}(\mathrm{P}-\boldsymbol{P})\quad\text{et}\quad \boldsymbol{S}_1(\mathrm{P})=-\frac{\mathfrak{r}^2}{2}\log\sin(\mathrm{P}-\boldsymbol{P}).$$

Posons maintenant plus spécialement $\mathfrak{r}^2=1$ et ensuite dans le premier cas $\boldsymbol{P}=2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P})=0$, dans le second $\boldsymbol{P}=2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P})=\frac{\pi}{2}$; nous trouverons alors

$$\boldsymbol{S}_0(\mathrm{P})=\tfrac{1}{2}\mathrm{P}\quad\text{et}\quad \boldsymbol{S}_1(\mathrm{P})=-\tfrac{1}{2}\log\cos\mathrm{P}.$$

Quant au secteur $\boldsymbol{S}_0(\mathrm{P})$, il commence à cette valeur de P, pour laquelle on a $\mathrm{P}=0$; on trouvera de même que l'autre secteur commence à la valeur $\mathrm{P}=\pi$; car, dans l'un et l'autre de ces deux cas, cette valeur initiale de P satisfait à l'équation $\mathrm{P}-\boldsymbol{P}=2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P})$.

Mais au lieu de faire P croître dans l'expression $-\cos\mathrm{P}$ depuis $\mathrm{P}=\pi$, on peut augmenter P depuis $\mathrm{P}=0$ dans l'expression $\cos\mathrm{P}$. Il s'ensuit que, si l'on suppose que les secteurs $\boldsymbol{S}_0(\mathrm{P})$ et $\boldsymbol{S}_1(\mathrm{P})$ commencent tous deux à la valeur $\mathrm{P}=0$, on aura

$$\boldsymbol{S}_0(\mathrm{P})=\tfrac{1}{2}\mathrm{P}\quad\text{et}\quad \boldsymbol{S}_1(\mathrm{P})=-\tfrac{1}{2}\log\cos\mathrm{P}$$

ou, si l'on veut,

$$(56.)\qquad 2\boldsymbol{S}_0(\mathrm{P})=\operatorname{arc}\sec\sec\mathrm{P}\quad\text{et}\quad 2\boldsymbol{S}_1(\mathrm{P})=\log\operatorname{nat}\sec\mathrm{P}.$$

Remarquons maintenant que la première formule correspond à une courbe

$$(57.)\qquad \mathrm{r}^2=\mathfrak{r}^2\frac{\sin(\mathrm{P}+\boldsymbol{P}-2\boldsymbol{R})}{\sin(\mathrm{P}-\boldsymbol{P})},\quad\text{où}\quad \mathfrak{r}=1,\quad \boldsymbol{P}=0,\quad 2\boldsymbol{R}=0$$

l'autre, au contraire, à une courbe

$$(58.)\qquad \mathrm{r}^2=\mathfrak{r}^2\frac{\sin(\mathrm{P}+\boldsymbol{P}-2\boldsymbol{R})}{\sin(\mathrm{P}-\boldsymbol{P})},\quad\text{où}\quad \mathfrak{r}=1,\quad \boldsymbol{P}=\frac{\pi}{2},\quad 2\boldsymbol{R}=\frac{3\pi}{2},$$

en d'autres termes, on peut exprimer le logarithme naturel d'une sécante, $\sec\mathrm{P}$, par le double d'un secteur, $\boldsymbol{S}_1(\mathrm{P})$, correspondant à une courbe

$$(59.)\qquad \xi^2+\eta^2=-i,\quad \mathrm{x}=0,\quad \xi+\eta i=x+yi,$$

tandisque l'arc de cette même sécante s'exprime par le double d'un secteur $\mathcal{S}_0(\dot{\mathrm{P}})$, correspondant à la courbe

$$(60.)\qquad \xi^2+\eta^2=1,\quad \mathrm{x}'=0,\quad \xi+\eta i=x+yi.$$

L'une de ces deux courbes est la courbe donnée, correspondant à une droite de l'argument ξ, qui se confond avec l'axe Y, et à un rayon complexe, qui a la longueur 1, et qui fait avec le demi-axe positif un angle égal à $\frac{3\pi}{4}$; l'autre est la courbe donnée, correspondant à une droite de l'argument, qui se confond avec l'axe X et à un rayon réel, égal à 1. La dernière consiste, comme nous le savons, en un cerle et une droite ou en un cercle seul, si l'on fait varier la quantité réelle $\xi=\mathrm{x}$ seulement entre les limites $\xi=\mathrm{x}=-1$ et $\xi=\mathrm{x}=+1$.

On peut encore remarquer que l'hyperbole équilatère

$$\mathrm{r}^2=\frac{1}{\sin 2\mathrm{P}},$$

qui est formée par tous les points milieux sur les cordes, parallèles à l'axe Y et appartenant à la courbe $\mathrm{r}^2=\operatorname{tg}\mathrm{P}$ ou autrement écrit $\xi^2+\eta^2=-i$, $\mathrm{x}=0$, $\xi+\eta i=x+yi$, donne le secteur $\mathcal{S}_3(\mathrm{P})=\frac{1}{4}\log\operatorname{tg}\mathrm{P}+\text{const.}$, ou, si l'on suppose ici que le secteur commence lorsque $\mathrm{P}=\frac{\pi}{4}$,

$$(61.)\qquad 4\mathcal{S}_3(\mathrm{P})=\log\text{nat}\operatorname{tg}\mathrm{P}.$$

Du reste cette hyperbole, dont les secteurs, deux fois doublés, donnent le logarithme naturel de la tangente, représente aussi, comme nous le savons, l'hyperbole conjuguée de celle que décrit la fonction η.

§. 29. De l'équation (53'.) on conclut de plus

$$\begin{aligned}&\mathcal{S}(\mathrm{P}',Q')+\mathcal{S}(\mathrm{P}'',Q'')+\mathcal{S}(\mathrm{P}''',Q''')+\cdots\\&=\frac{\mathrm{r}^2}{2}\cos 2(R-P)((\mathrm{P}'+\mathrm{P}''+\mathrm{P}'''+\cdots)-(Q'+Q''+Q'''+\cdots))\\&\quad-\frac{\mathrm{r}^2}{2}\sin 2(R-P)\log\frac{\sin(\mathrm{P}'-P)\sin(\mathrm{P}''-P)\sin(\mathrm{P}'''-P)\cdots}{\sin(Q'-P)\sin(Q''-P)\sin(Q'''-P)\cdots},\end{aligned}$$

d'un autre côté on aura aussi

$$\begin{aligned}&\mathcal{S}(\mathrm{P}'+\mathrm{P}''+\mathrm{P}'''+\cdots,Q'+Q''+Q'''+\cdots)\\&=\frac{\mathrm{r}^2}{2}\cos 2(R-P)((\mathrm{P}'+\mathrm{P}''+\mathrm{P}'''+\cdots)-(Q'+Q''+Q'''+\cdots))\\&\quad-\frac{\mathrm{r}^2}{2}\sin 2(R-P)\log\frac{\sin(\mathrm{P}'+\mathrm{P}''+\mathrm{P}'''+\cdots-P)}{\sin(Q'+Q''+Q'''+\cdots-P)}.\end{aligned}$$

Pour que cette formule soit juste, il est nécessaire que les sommes $\Sigma\mathrm{P}$ et ΣQ

ne surpassent pas les valeurs pour lesquelles la courbe ou les secteurs existent réellement. Il est ainsi nécessaire qu'elles satisfassent aux conditions

$$\cos 2(\Sigma P - R) \gtreqless \cos 2(P - R),$$
$$\cos 2(\Sigma Q - R) \gtreqless \cos 2(P - R);$$

également dans la première formule il faut que

$$\cos 2(P' - R) \gtreqless \cos 2(P - R),$$
$$\cos 2(Q' - R) \gtreqless \cos 2(P - R)$$

etc. Voyez §. 8.

Ces restrictions faites, on aura l'équation remarquable pour l'addition de plusieurs secteurs

$$(62.)\quad S(P', Q') + S(P'', Q'') + S(P''', Q''') + \cdots - S(P' + P'' + P''' + \cdots, Q' + Q'' + Q''' + \cdots)$$
$$= \frac{r^2}{2} \sin 2(R - P) \log \frac{\sin(P' + P'' + P''' + \cdots - P) \times \sin(Q' - P)\sin(Q'' - P)\sin(Q''' - P)\cdots}{\sin(Q' + Q'' + Q''' + \cdots - P) \times \sin(P' - P)\sin(P'' - P)\sin(P''' - P)\cdots}$$

ou, comme on peut écrire plus simplement,

$$\Sigma S(P, Q) - S(\Sigma P, \Sigma Q) = \frac{r^2}{2} \sin 2(R - P) \log \frac{\sin(\Sigma P - P)\, \Pi \sin(Q - P)}{\sin(\Sigma Q - P)\, \Pi \sin(P - P)}$$

ou même, en observant que $r^2 \sin 2(R - P) = \pm a^2$, a étant le demi-axe de l'hyperbole équilatère,

$$\Sigma S(P, Q) - S(\Sigma P, \Sigma Q) = \pm \frac{a^2}{2} \log \frac{\sin(\Sigma P - P)\, \Pi \sin(Q - P)}{\sin(\Sigma Q - P)\, \Pi \sin(P - P)}.$$

La somme de plusieurs secteurs est donc égale à un nouveau secteur correspondant à un angle égal à la somme de tous les angles des secteurs donnés plus une expression logarithmique.

§. 30. De l'équation trouvée (62.) on déduit la formule suivante pour la multiplication

$$(63.)\quad mS(P, Q) - S(mP, mQ) = \frac{r^2}{2} \sin 2(R - P) \log \frac{\sin(mP - P)\sin^m(Q - P)}{\sin(mQ - P)\sin^m(P - P)},$$

m étant un nombre positif et entier. En écrivant $\frac{P}{m}$ et $\frac{Q}{m}$, au lieu de P et Q, et en divisant par m, on déduit encore cette nouvelle formule pour la division

$$S\left(\frac{P}{m}, \frac{Q}{m}\right) - \frac{1}{m} S(P, Q) = \frac{r^2}{2} \sin 2(R - P) \log \frac{\sin^{\frac{1}{m}}(P - P)\sin\left(\frac{Q}{m} - P\right)}{\sin^{\frac{1}{m}}(Q - P)\sin\left(\frac{P}{m} - P\right)},$$

ou, comme on peut écrire d'une autre manière, pour rendre la dernière équation analogue à la première

$$(64.)\quad \frac{1}{m}S(\mathrm{P},Q)-S\Big(\frac{\mathrm{P}}{m},\frac{Q}{m}\Big)=\frac{\mathrm{r}^2}{2}\sin 2(R-P)\log\frac{\sin\Big(\frac{\mathrm{P}}{m}-P\Big)\sin^{\frac{1}{m}}(Q-P)}{\sin\Big(\frac{Q}{m}-P\Big)\sin^{\frac{1}{m}}(\mathrm{P}-P)}.$$

À l'aide des équations (63.) et (64.) on obtient enfin une troisième formule plus générale, qui correspond à la multiplication par un nombre positif et rationel

$$(65.)\quad \frac{n}{m}S(\mathrm{P},Q)-S\Big(\frac{n}{m}\mathrm{P},\frac{n}{m}Q\Big)=\frac{\mathrm{r}^2}{2}\sin 2(R-P)\log\frac{\sin\Big(\frac{n}{m}\mathrm{P}-P\Big)\sin^{\frac{n}{m}}(Q-P)}{\sin\Big(\frac{n}{m}Q-P\Big)\sin^{\frac{n}{m}}(Q-P)}.$$

Il faut cependant remarquer que toutes ces formules ne sont justes que sous certaines restrictions.

§. 31. Pour distinguer entre deux secteurs qui correspondent à des courbes avec des rayons complexes ϱ et σ, désignons l'un par $S(\mathrm{P},Q,\varrho)$ l'autre par $S(\mathrm{P},Q,\sigma)$. Supposons encore que $\sigma=\gamma(\cos\Gamma+i\sin\Gamma)$. Alors nous aurons, en partant de l'équation (62.), et en prenant deux courbes rapportées à la même droite de l'argument ξ,

$$(66.)\quad \frac{S(\mathrm{P}',Q',\varrho)+S(\mathrm{P}'',Q'',\varrho)+S(\mathrm{P}''',Q''',\varrho)+\cdots-S(\mathrm{P}'+\mathrm{P}''+\mathrm{P}'''+\cdots,Q'+Q''+Q'''+\cdots,\varrho)}{S(\mathrm{P}',Q',\sigma)+S(\mathrm{P}'',Q'',\sigma)+S(\mathrm{P}''',Q''',\sigma)+\cdots-S(\mathrm{P}'+\mathrm{P}''+\mathrm{P}'''+\cdots,Q'+Q''+Q'''+\cdots,\sigma)}$$
$$=\frac{\mathrm{r}^2\sin 2(R-P)}{\gamma^2\sin 2(\Gamma-P)}$$

ou plus simplement

$$\frac{\Sigma S(\mathrm{P},Q,\varrho)-S(\Sigma\mathrm{P},\Sigma Q,\varrho)}{\Sigma S(\mathrm{P},Q,\sigma)-S(\Sigma\mathrm{P},\Sigma Q,\sigma)}=\frac{\mathrm{r}^2\sin 2(R-P)}{\gamma^2\sin 2(\Gamma-P)}.$$

En déterminant le rayon complexe σ de manière qu'on ait

$$\gamma^2=\mathrm{r}^2,\qquad 2(\Gamma-P)=\frac{\pi}{2}-(R-P)$$

ou

$$\gamma^2=\mathrm{r}^2,\qquad 2(\Gamma-P)=R-P,$$

on trouvera l'une ou l'autre de ces deux formules

$$\frac{\Sigma S(\mathrm{P},Q,\varrho)-S(\Sigma\mathrm{P},\Sigma Q,\varrho)}{\Sigma S(\mathrm{P},Q,\sigma)-S(\Sigma\mathrm{P},\Sigma Q,\sigma)}=2\sin(R-P),$$
$$\frac{\Sigma S(\mathrm{P},Q,\varrho)-S(\Sigma\mathrm{P},\Sigma Q,\varrho)}{\Sigma S(\mathrm{P},Q,\sigma)-S(\Sigma\mathrm{P},\Sigma Q,\sigma)}=2\cos(R-P).$$

Si l'on détermine autrement la relation entre ϱ et σ, on obtiendra de nouveaux rapports, par lesquels on pourra exprimer les fonctions trigonométriques.

§. 32. Dans le §. 29 nous avons montré, que la somme de plusieurs secteurs est égale à un nouveau secteur plus une expression logarithmique. Il y a un cas à remarquer particulièrement, c'est celui où la partie logarithmique s'évanouit.

En posant

$$2(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{P}) = 0 \quad \text{ou} \quad = \pi,$$

on trouvera

$$(67.)\qquad \Sigma \boldsymbol{S}(\mathrm{P}, \boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{S}(\Sigma \mathrm{P}, \Sigma \boldsymbol{Q}).$$

Dans ce cas l'équation polaire de la courbe donnée se réduit à la suivante

$$\mathrm{r}^2 = \pm \mathrm{r}^2 \frac{\sin(\mathrm{P}-\boldsymbol{P})}{\sin(\mathrm{P}-\boldsymbol{P})}.$$

Si le signe supérieur se présente, la courbe se compose d'un cercle avec le rayon r et d'une droite qui se confond avec la droite $\mathrm{P} = \boldsymbol{P}$ ou la droite de l'argument ξ; si au contraire on a le signe inférieur, la courbe consiste seulement dans cette dernière droite.

Cependant comme la droite passe par l'origine des coordonnées, la seconde courbe n'a pas de secteurs, quant à la première, il suffit de considérer l'une de ses parties, le cercle.

Ainsi la propriété concernant la somme de plusieurs secteurs et donnée par la formule (67.), est donc une propriété du cercle, ce qui du reste est bien connu.

Christiania, 1857.

21.

Ueber diejenigen Probleme der Variationsrechnung, welche nur eine unabhängige Variable enthalten.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Carlsruhe.)

Jacobi, in der Abhandlung über die Kriterien des Maximums und Minimums, welche sich im 17[ten] Bande dieses Journals befindet, macht die Bemerkung, dafs diejenigen isoperimetrischen Probleme, welche nur die ersten Differentialquotienten der abhängigen Functionen unter dem Integralzeichen enthalten, eine Behandlung in derselben Weise gestatten, wie sie von *Hamilton* und von *Jacobi* selbst auf die Probleme der Dynamik angewendet ist.

Man kann diesen Ausspruch verallgemeinern. In der That, auch die Aufgabe, ein einfaches Integral mit mehreren unbekannten Functionen zu einem Minimum zu machen, *während zwischen diesen Functionen noch gewisse Differentialgleichungen gelten sollen,* ist einer ähnlichen Behandlung fähig. Und da man zeigen kann, dafs sich jede auf einfache Integration bezügliche Aufgabe der Variationsrechnung auf diese Form zurückführen läfst, so ergiebt sich, dafs überhaupt auch jede solche Aufgabe jene Behandlung zuläfst. Es läfst sich dies so aussprechen:

Ein isoperimetrisches Problem, in welchem die Differentialquotienten der abhängigen Functionen unter dem Integralzeichen oder in etwaigen Bedingungsgleichungen respective bis zu den Graden $a_1, a_2, \dots a_n$ ansteigen, welches also $2(a_1 + a_2 \dots a_n)$ willkürliche Constanten mit sich führt, ist immer auf die vollständige Lösung einer partiellen Differentialgleichung mit $a_1 + a_2 \dots a_n + 1$ unabhängigen Variabeln zurückführbar, welche aufserdem die abhängige Function selbst nicht enthält; die vollständige Lösung also erfordert nur $a_1 + a_2 \cdots a_n$ willkürliche Constanten.

Die eigenthümliche Form, welche durch diese Betrachtungen die Integrale der isoperimetrischen Probleme annehmen, gestattet merkwürdige Anwendungen auf die zweite Variation. In einem frühern Aufsatze habe ich gezeigt (Band 55. dieses Journals, pag. 254), dafs die reducirte Form der zweiten Variation, wie sie zur Untersuchung der Kriterien des

Maximums und Minimums brauchbar ist, eine gewisse Anzahl von willkürlichen Constanten mit sich führt, zwischen denen noch Bedingungen bestehen, welche im Allgemeinen weder vollständig dargestellt werden können, noch viel weniger aber die Lösung der Aufgabe gestatten, die betreffenden Constanten durch eine passende Anzahl vollkommen unabhängiger Constanten zu ersetzen.

Dagegen zeigt es sich, dafs die Anwendung derjenigen Form der Integrale, auf welche die oben angedeutete Methode führt, nicht nur die vollständige Aufstellung der Bedingungsgleichungen möglich macht, sondern aufserdem fast von selbst auf solche Ausdrücke der eingehenden Constanten durch eine geringere Anzahl vollkommen unabhängiger führt, welche diese Bedingungsgleichungen identisch erfüllen. Wobei sich zugleich andere bedeutende Vereinfachungen der vorkommenden Ausdrücke ergeben.

Die Reduction der isoperimetrischen Gleichungen auf *eine* partielle Differentialgleichung wird den Anfang der folgenden Betrachtungen ausfüllen. Der letzte Theil wird der Untersuchung derjenigen Vortheile gewidmet sein, welche dieselbe für die zweite Variation gewährt.

§. 1.

Beschränkung der Aufgabe.

Bezeichnen wir durch $y_1, y_2, \dots y_n$ unbekannte Functionen von x, durch F, φ_1, φ_2, ... aber Functionen von x, y_1, y_2, ... y_n und $\frac{dy_1}{dx}$, $\frac{dy_2}{dx}$, ... $\frac{dy_n}{dx}$; so läfst sich jede Aufgabe der Variationsrechnung, welche nur *eine* unabhängige Variable enthält, auf die folgende zurückführen:

Es soll das Integral

$$(1.)\qquad J = \int_{x^0}^{x'} F\,dx$$

ein Minimum oder Maximum werden, während zugleich eine gewisse Reihe von Differentialgleichungen

$$(2.)\qquad \varphi_1 = 0,\quad \varphi_2 = 0,\quad \dots\quad \varphi_\varkappa = 0$$

besteht; wo $\varkappa$ kleiner als n ist.

Dafs zunächst das Vorkommen höherer Differentialquotienten ohne Weiteres ein Zurückführen in diese Form gestattet, ist an sich deutlich; man hat nur nöthig, die niedrigeren Differentialquotienten als neue Variable einzuführen,

und ihre Beziehungen als Bedingungsgleichungen φ zu betrachten. Aber auch die scheinbar allgemeinere Aufgabe, nämlich

eine Function V zu einem Maximum oder Minimum zu machen, wenn zwischen ihr und andern unbestimmten Functionen $y_1, y_2, \dots y_n$ eine beliebige Zahl von Differentialgleichungen mit der unabhängigen Variabeln x gegeben sind,

kommt auf den vorigen Fall zurück. Denn man setze nur $J = \int_{x^0}^{x'} \frac{dV}{dx} dx$, man führe die Differentialgleichungen als Bedingungsgleichungen φ ein, und man gelangt dann durch die gewöhnlichen Methoden zu genau denselben Gleichungen, welche sonst auf einem ganz anderen Wege abgeleitet zu werden pflegen.

Ich werde mich daher im Folgenden nur mit derjenigen Form des Problems beschäftigen, welche in den Gleichungen (1.), (2.) dargestellt ist.

§. 2.

Zurückführung der Integrale der isoperimetrischen Probleme auf die Function V.

Bezeichnen wir mit $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_x$ unbekannte Functionen von x, und mit Ω die Function

$$(3.)\qquad \Omega = F + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \cdots \lambda_x\varphi_x,$$

so sind die Differentialgleichungen, auf welche das in den Gleichungen (1.), (2.) ausgesprochene Problem durch das Verschwinden der ersten Variation führt:

$$(4.)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial\Omega}{\partial\frac{dy_1}{dx}} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial y_1}, \\[2ex] \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial\Omega}{\partial\frac{dy_2}{dx}} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial y_2}, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial\Omega}{\partial\frac{dy_n}{dx}} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial y_n}, \end{cases}$$

zu welchen die Gleichungen (2.) selbst hinzutreten. Diese $n+x$ Gleichungen bestimmen die Functionen λ, y; die Integration derselben führt $2n$ willkürliche Constanten mit sich.

Bezeichnen wir nun durch $[\Omega]$ und $[F]$ die Functionen Ω und F und analog andere ebenso betrachtete Functionen, wenn in denselben die y,

λ, $\frac{dy}{dx}$ durch diese $2n$ Constanten und x selbst ausgedrückt sind; durch (Ω), (F) etc. aber dieselben Functionen, ausgedrückt durch x, die y, und durch die Constanten $y_1^0, y_2^0, \dots y_n^0$, welchen die y für $x=x^0$ gleich werden mögen, und welche bei der Bestimmung der erstgenannten Constanten mitwirken.

Da die Ausdrücke $[\varphi]$ identisch verschwinden müssen, so ist auch $\left[\frac{\partial\varphi}{\partial a}\right]$ identisch Null, wenn a eine jener Integrationsconstanten bedeutet; mithin hat man

$$\left[\frac{\partial F}{\partial a}\right]=\left[\frac{\partial\Omega}{\partial a}\right]=\Sigma_i\frac{\partial\Omega}{\partial y_i}\left[\frac{\partial y_i}{\partial a}\right]+\Sigma_i\frac{\partial\Omega}{\partial\frac{dy_i}{dx}}\left[\frac{d}{dx}\frac{\partial y_i}{\partial a}\right],$$

da auch die durch Differentiation nach λ entstehenden Terme fortfallen. Oder, indem man die Gleichungen (4.) zu Hülfe nimmt:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial a}\right]=\frac{d}{dx}\left\{\Sigma_i\frac{\partial\Omega}{\partial\frac{dy_i}{dx}}\left[\frac{\partial y_i}{\partial a}\right]\right\}.$$

Führt man nun eine neue Function V ein durch die Definition

$$(5.)\qquad [V]=\int_{x^0}^{x}[F]\,dx$$

(wodurch auch die Bedeutung von (V) vollkommen bestimmt ist), so geht die vorige Gleichung auch in diese über:

$$(6.)\qquad \left[\frac{\partial V}{\partial a}\right]=\Sigma_i\frac{\partial\Omega}{\partial\frac{dy_i}{dx}}\left[\frac{\partial y_i}{\partial a}\right]-\left\{\Sigma_i\frac{\partial\Omega}{\partial\frac{dy_i}{dx}}\left[\frac{\partial y_i}{\partial a}\right]\right\}_{x=x^0}.$$

Man erhält aber für $\left[\frac{\partial V}{\partial a}\right]$ auch sogleich den Ausdruck:

$$(7.)\qquad \left[\frac{\partial V}{\partial a}\right]=\Sigma_i\left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)\left[\frac{\partial y_i}{\partial a}\right]+\Sigma_i\left(\frac{\partial V}{\partial y_i^0}\right)\left[\frac{\partial y_i^0}{\partial a}\right].$$

Da nun offenbar $\left[\frac{\partial y_i^0}{\partial a}\right]$ und der Werth, welchen $\left[\frac{\partial y_i}{\partial a}\right]$ für $x=x^0$ annimmt, identische Ausdrücke sind, so zeigen die Gleichungen (6.), (7.) denselben Ausdruck $\left[\frac{\partial V}{\partial a}\right]$ als lineare Function der $2n$ Gröfsen $\left[\frac{\partial y_i}{\partial a}\right]$ und $\left[\frac{\partial y_i^0}{\partial a}\right]$ auf doppelte Weise dargestellt. Und solcher doppelt dargestellten Ausdrücke giebt es $2n$, da es $2n$ Constanten a giebt, und alle haben dieselben Coefficienten. Dies ist nicht anders möglich, als wenn die beiden Darstellungen an sich identisch sind, d. h. wenn

$$(8.)\quad \frac{\partial\Omega}{\partial\frac{dy_i}{dx}} = \left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right),\qquad \left\{\frac{\partial\Omega}{\partial\frac{dy_i}{dx}}\right\}_{x=x^0} = -\left(\frac{\partial V}{\partial y_i^0}\right)$$

Die zweite Möglichkeit, dafs nämlich die Determinante der $(2n)^2$ Functionen $\left[\frac{\partial y_i}{\partial a}\right]$, $\left[\frac{\partial y_i^0}{\partial a}\right]$ verschwinde, wird dadurch aufgehoben, dafs sich die a nothwendig durch die y, y^0 müssen ausdrücken lassen, um ein vollständiges System von Integralen darzustellen.

Da nun die Gleichungen (8.) keine identischen sind, so sind sie die Integrale der Gleichungen (2.), (4.).

Denkt man sich in (V) statt der y^0 irgend welche Verbindungen derselben eingehend, welche durch $a_1, a_2, \dots a_n$ bezeichnet seien, so ist

$$\left(\frac{\partial V}{\partial a_k}\right) = -\Sigma_i\left\{\frac{\partial\Omega}{\partial\frac{dy_i}{dx}}\left[\frac{\partial y_i}{\partial a_k}\right]\right\}_{x=x^0}$$

oder gleich einer neuen Constanten α_k. Hiernach ist es erlaubt, den Integralen (8.) die folgenden allgemeineren zu substituiren:

$$(9.)\quad \frac{\partial\Omega}{\partial\frac{dy_i}{dx}} = \left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right),\qquad \alpha_i = \left(\frac{\partial V}{da_i}\right),$$

wo nunmehr (V) als Function von $x, y_1, y_2, \dots y_n, a_1, a_2, \dots a_n$ zu betrachten ist. Diese Gleichungen, zusammen mit den Gleichungen (2.), genügen, um die $2n+\varkappa$ Functionen y, $\frac{dy}{dx}$, λ durch x und die willkürlichen Constanten a, α auszudrücken.

§. 3.

Partielle Differentialgleichung für V.

Wenn sonach die Integrale der isoperimetrischen Probleme auf die Function (V) zurückgeführt sind, so bleibt nunmehr übrig, diese selbst zu finden. Dies geschieht, indem man die Gleichung (5.) nach derjenigen Variablen differentiirt, welche bisher noch nicht benutzt ist, nämlich nach x selbst. Dann aber erhält man einerseits direct F, dann aber auch

$$\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right] = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \Sigma_i\left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)\frac{dy_i}{dx};$$

und man hat somit die neue Gleichung:

$$(10.)\quad F = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \Sigma_i\left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)\frac{dy_i}{dx}.$$

Wenn man hiezu die folgenden hinzufügt:

$$(11.)\quad \frac{\partial\Omega}{\partial\frac{dy_i}{dx}} = \left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right), \qquad \varphi_1 = 0,\quad \varphi_2 = 0,\quad \ldots\quad \varphi_x = 0,$$

so hat man die hinreichende Anzahl von Gleichungen, um daraus die λ und die $\frac{dy_i}{dx}$ zu eliminiren. Das Resultat der Elimination ist aber eine Gleichung zwischen x, y_1, y_2, ... y_n und $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)$, ... $\left(\frac{\partial V}{\partial y_n}\right)$; d. h. eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit $n+1$ unabhängigen Variabeln, in welcher die abhängige Variable selbst nicht mehr vorkommt.

Auf diese Gleichung ist also das isoperimetrische Problem zurückgeführt. Die vollständige Lösung derselben enthält $n+1$ Constanten; wir brauchen hier deren nur n, nämlich die a; aber in der That ist von jenen Constanten eine additiv, da (V) selbst in die Differentialgleichung nicht eingeht; und sonach stellt die Function (V), von der auch in den Integralen nur die Ableitungen gebraucht werden, wirklich eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung dar, und die a sind die willkürlichen Constanten derselben, mit Ausschlufs der additiven, welche, als *eines* der a benutzt, eine identische Gleichung ergeben würde.

Man sieht, mit wie geringen Modificationen die sonst auf die Dynamik angewandte Methode hier ihre allgemeine Anwendung findet. Zugleich aber enthält das Obige die vollkommene Bestätigung des im Eingange angeführten Satzes; die Anwendung der vorliegenden Theorie auf Probleme, welche höhere Differentialquotienten der abhängigen Functionen enthalten, ergiebt sich ohne alles Weitere. Als Anwendung der vorliegenden Theorie sei es mir gestattet, die partielle Differentialgleichung für V in dem Falle anzugeben, wo das Integral eine einzige abhängige Variable und deren Differentialquotienten bis zum n^{ten} enthält. Ist dann y diese Variable, und $y^{(i)} = \frac{d^iy}{dx^i}$, so geht die gedachte Gleichung aus den Gleichungen

$$F\left(x, y, y', \ldots y^{(n-1)}, \frac{dy^{(n-1)}}{dx}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + y'\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) + y''\left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right) + \cdots y^{(n-1)}\left(\frac{\partial V}{\partial y^{(n-2)}}\right) + \frac{dy^{(n-1)}}{dx}\left(\frac{\partial V}{\partial y^{(n-1)}}\right)$$

und

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y^{(n-1)}}\right) = \frac{\partial F}{\partial\frac{dy^{(n-1)}}{dx}}$$

hervor durch Elimination von $\frac{dy^{(n-1)}}{dx}$.

§. 4.

Anwendung auf die zweite Variation. Einleitung.

Ich wende mich nunmehr zu der Untersuchung derjenigen Vortheile, welche die in den Gleichungen (9.) enthaltene Form der Integrale der isoperimetrischen Probleme für die Reduction der zweiten Variation darbietet.

Bezeichnen wir durch Ω_1, Ω_2 folgende Functionen:

$$(12.)\quad \begin{cases} \Omega_1 = \Sigma_i u_i \cdot \dfrac{\partial \Omega}{\partial y_i} + \Sigma_i \dfrac{du_i}{dx} \cdot \dfrac{\partial \Omega}{\partial \frac{dy_i}{dx}} + \Sigma_i \mu_i \dfrac{\partial \Omega}{\partial \lambda_i}, \\ 2\Omega_2 = \Sigma u_i \cdot \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial y_i} + \Sigma_i \dfrac{du_i}{dx} \cdot \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial \frac{dy_i}{dx}} + \Sigma_i \mu_i \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial \lambda_i}, \end{cases}$$

so stellt, sobald wir u_i in δy_i, μ_i in $\delta \lambda_i$ übergehen lassen, Ω_1 die erste und Ω_2 die zweite Variation der Function Ω dar; und zugleich sind dann

$$\int_{x^0}^{x'} \Omega_1 dx, \quad \int_{x^0}^{x'} \Omega_2 dx$$

die erste und zweite Variation des vorgelegten Integrales. In einem frühern Aufsatz (Bd. 55 dieses Journals, p. 254) habe ich nun gezeigt, dafs sich die zweite Variation immer auf die Form zurückführen lasse:

$$(13.)\quad \delta^2 J = \tfrac{1}{2} \int_{x^0}^{x'} \Sigma_i \Sigma_k \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \frac{dy_i}{dx} \partial \frac{dy_k}{dx}} \cdot \frac{R_i R_k}{R^2} dx + B' - B^0.$$

Hier bedeuten die R_i lineare Functionen der δy_i, $\delta \frac{dy_i}{dx}$; und B', B^0 die Werthe welche eine homogene Function B zweiter Ordnung der δy_i für $x = x'$ und $x = x^0$ annimmt. Die R_i sind noch an einander gebunden durch $\varkappa$ lineare Gleichungen:

$$(14.)\quad \Sigma_i R_i \frac{\partial \varphi_1}{\partial \frac{dy_i}{dx}} = 0, \quad \Sigma_i R_i \frac{\partial \varphi_2}{\partial \frac{dy_i}{dx}} = 0, \ \ldots \ \Sigma_i R_i \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial \frac{dy_i}{dx}} = 0.$$

Aufserdem aber hängen die R, R_i, B von gewissen Integralen derjenigen Differentialgleichungen ab, welche das Integral $\int_{x^0}^{x'} \Omega_2 dx$ (12.) zu einem Minimum machen. Die Lösungen dieser Gleichungen kann man unmittelbar hinschreiben; sie sind, wenn $a_1, a_2, \ldots a_{2n}$ die willkürlichen Constanten der y bezeichnen:

$$(15.)\quad \begin{cases} u_1 = \Sigma_k A_k \left[\frac{\partial y_1}{\partial a_k}\right], \\ u_2 = \Sigma_k A_k \left[\frac{\partial y_2}{\partial a_k}\right], \\ \cdots\cdots \\ u_n = \Sigma_k A_k \left[\frac{\partial y_n}{\partial a_k}\right], \end{cases} \quad \begin{matrix} \mu_1 = \Sigma_k A_k \left[\frac{\partial \lambda_1}{\partial a_k}\right], \\ \mu_2 = \Sigma_k A_k \left[\frac{\partial \lambda_2}{\partial a_k}\right] \\ \cdots\cdots \end{matrix}$$

wo die A neue willkürliche Constanten bedeuten. Solcher Systeme von Lösungen bedarf man n, welche durch obere Indices bei den u und A unterschieden werden mögen; und dieselben werden dadurch particularisirt, dafs die $\frac{n.n-1}{2}$ Gleichungen bestehen sollen:

$$(16.)\quad \Sigma_i \left\{ u_i^r \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial \frac{du_i}{dx}} \right)^s - u_i^s \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial \frac{du_i}{dx}} \right)^r \right\} = 0,$$

wo r und s alle Werthe von 1 bis n annehmen können.

Endlich, wenn diese particularen Lösungen bestimmt sind, wird R die Determinante derselben

$$(17.)\quad R = \Sigma \pm u_1^1,\ u_2^2,\ \ldots\ u_n^n;$$

die R_i, ebenfalls Determinanten, haben die Gestalt

$$(18.)\quad R_i = R\delta \frac{dy_i}{dt} - \Sigma_h \Sigma_k \delta y_h \cdot \frac{du_i^k}{dx} \cdot \frac{\partial R}{\partial u_h^k}.$$

Die Function B aber, welche, wie oben gesagt, die Gestalt hat:

$$(19.)\quad 2B = \Sigma_i \Sigma_k \beta_{ik} \delta y_i \delta y_k$$

ist durch die Gleichung definirt:

$$(20.)\quad \beta_{1i} u_1^r + \beta_{2i} u_2^r + \cdots \beta_{ni} u_n^r = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \frac{du_i}{dx}} \right)^r,$$

welche für jeden Werth von i und r besteht.

Dies vorausgeschickt, können wir zur Transformation der vorliegenden Ausdrücke übergehen, indem wir die Constanten $a_1, a_2, \ldots a_{2n}$ durch unsere Constanten $a_1, a_2, \ldots a_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ ersetzen, und überhaupt alles auf die Function V zurückzuführen suchen.

§. 5.

Bestimmung der particularen Integrale.

Gehen wir zunächst auf die Gleichungen (16.) näher ein, welche den Zusammenhang der particularen Lösungen u darstellen. Ehe dies aber geschehen kann, mufs die Form der Ausdrücke $\frac{\partial \Omega_2}{\partial \frac{du_i}{dx}}$ entwickelt werden.

Der Definition (12.) zufolge ist unmittelbar

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial \frac{du_i}{dx}} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial \frac{dy_i}{dx}},$$

und wenn man aus (12.) für Ω_1, seinen Werth setzt und die Differentiation ausführt, so kommt:

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial \frac{du_i}{dx}} = \Sigma_h u_h \frac{\partial}{\partial y_h} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \frac{dy_i}{dx}} + \Sigma_h \frac{du_h}{dx} \cdot \frac{\partial}{\partial \frac{dy_h}{dx}} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \frac{dy_i}{dx}} + \Sigma_h \mu_h \frac{\partial}{\partial \lambda_h} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \frac{dy_i}{dx}}.$$

Aber wenn man hier für die u, μ aus (15.) ihre Werthe einführt, so zeigt sich, dafs dies nichts anderes ist, als

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial \frac{du_i}{dx}} = \Sigma_k A_k \left[\frac{\partial}{\partial a_k} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \frac{dy_i}{dx}} \right]$$

oder, wenn man die Gleichungen (9.) nunmehr zu Hülfe ruft:

$$(21.) \quad \frac{\partial \Omega_2}{\partial \frac{du_i}{dx}} = \Sigma_k A_k \left[\frac{\partial}{\partial a_k} \left(\frac{\partial V}{\partial y_i} \right) \right];$$

eine mit der Form der u vollkommen analoge Gestalt. Diese können wir jetzt in die Gleichung (16.) einführen.

Indem man jedes Glied der Summe (16.) als eine Determinante betrachtet, und die Sätze über die Zerfällung einer Determinante in Summen von Producten berücksichtigt, erhält man dann für die Gleichung (16.) die folgende:

$$(22.) \; 0 = \Sigma_k \Sigma_m \left\{ (A_k^r A_m^s - A_m^r A_k^s) \Sigma_i \left(\left[\frac{\partial y_i}{\partial a_k} \right] \left[\frac{\partial}{\partial a_m} \left(\frac{\partial V}{\partial y_i} \right) \right] - \left[\frac{\partial y_i}{\partial a_m} \right] \left[\frac{\partial}{\partial a_k} \left(\frac{\partial V}{\partial y_i} \right) \right] \right) \right\}.$$

Die nach i genommene Summe mufs nothwendig einen constanten Werth annehmen, damit die vorliegende Gleichung nicht mehr als *eine* Gleichung zwischen den A gebe. Wir können aber sogar diesen constanten Werth wirklich be-

stimmen. Die nach i genommene Summe kann man nämlich auch so darstellen:

$$\left[\frac{\partial}{\partial a_m}\cdot\Sigma_i\frac{\partial y_i}{\partial a_k}\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)\right]-\left[\frac{\partial}{\partial a_k}\cdot\Sigma_i\frac{\partial y_i}{\partial a_m}\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)\right],$$

da sich die übrigen durch die Differentiation entstehenden Terme aufheben. Und ferner ist

$$\Sigma_i\left[\frac{\partial y_i}{\partial a_k}\right]\left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)=\left[\frac{\partial V}{\partial a_k}\right]-\left(\frac{\partial V}{\partial a_k}\right);$$

und da sich die von dem ersten Theile dieses Ausdruckes herrührenden Terme wiederum zerstören, so bleibt:

$$\left[\frac{\partial}{\partial a_k}\left(\frac{\partial V}{\partial a_m}\right)\right]-\left[\frac{\partial}{\partial a_m}\left(\frac{\partial V}{\partial a_k}\right)\right].$$

Bedenkt man nun, dafs die $a_1, a_2, \dots a_{2n}$ die Integrationsconstanten $a_1, a_2, \dots a_n$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ repräsentiren, von denen (V) nur die erstern enthält; so sieht man, dafs, wenn $\left[\frac{\partial}{\partial a_k}\left(\frac{\partial V}{\partial a_m}\right)\right]$ einen von Null verschiedenen Werth haben soll, zunächst a_m eines der a sein mufs; dann aber geht der Ausdruck in $\left[\frac{\partial \alpha_m}{\partial a_k}\right]$ über, und man sieht, dafs a_k eben dies entsprechende α sein mufs, wodurch denn der Ausdruck den Werth 1 annimmt.

Bezeichnen wir nun die den α entsprechenden A durch den Buchstaben A, so dafs wir die einander entsprechenden Constantenreihen haben:

$$\begin{array}{llll} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ \mathrm{A}_1 & \mathrm{A}_2 & \dots & \mathrm{A}_n, \end{array}$$

so nimmt nunmehr die Gleichung (22.) die einfachere Gestalt an:

$$(23.)\qquad 0=\Sigma_k(A_k^r\,\mathrm{A}_k^s-A_k^s\,\mathrm{A}_k^r),$$

die Summe jetzt nur von 1 bis n ausgedehnt.

Dies sind also diejenigen Gleichungen, welchen die Constanten zu genügen haben. Ich werde jetzt zeigen wie man sie identisch erfüllen kann.

Man kann im Allgemeinen immer n^2 Gröfsen c so bestimmen, dafs sie den Gleichungen genügen:

$$(24.)\qquad \begin{cases} \mathrm{A}_m^1=c_{1m}A_1^1+c_{2m}A_2^1+\cdots c_{nm}A_n^1 \\ \mathrm{A}_m^2=c_{1m}A_1^2+c_{2m}A_2^2+\cdots c_{nm}A_n^2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mathrm{A}_m^n=c_{1m}A_1^n+c_{2m}A_2^n+\cdots c_{nm}A_n^n, \end{cases}$$

welche für alle Werthe von m bestehen sollen. Führt man nun diese Werthe in die Gleichung (23.) ein, so wird

$$0 = \Sigma_k \Sigma_h (A_k^r A_h^s - A_h^r A_k^s)\, c_{hk}.$$

Diese Gleichung kann sich aber nicht ändern, wenn man die Indices k, h vertauscht, und das Resultat der vorliegenden Gleichung hinzufügt. Dann erhält man:

$$0 = \Sigma_k \Sigma_h (A_k^r A_h^s - A_h^r A_k^s)(c_{hk} - c_{kh});$$

und aus dieser Form geht hervor, dafs man die $\frac{n.n-1}{2}$ Gleichungen (23.) ersetzen kann durch die $\frac{n.n-1}{2}$ Gleichungen

$$(25.) \qquad c_{hk} = c_{kh},$$

oder mit andern Worten:

Die willkürlichen Constanten A, A *sind an einander gebunden durch ein beliebiges System linearer Gleichungen von symmetrischer Determinante.*

Auf diese Weise sind also die $2n^2$ Constanten A, A zurückgeführt auf die $n^2 + \frac{n.n+1}{2}$ Constanten A, c, welche von einander vollständig unabhängig sind.

§. 6.

Erste Umformung der zweiten Variation.

Es wird sich zeigen, dafs die Constanten A überhaupt ganz aus der Rechnung herausgehen, und die c allein zurückbleiben. Dies hat in der That eine tiefere Bedeutung, denn der directe Weg zur Reduction der zweiten Variation führt auf ein System von $\frac{n.n+1}{2}$ simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung; die c sind die Integrationsconstanten dieses Systems. Auf dasselbe soll später noch einmal zurückgegangen werden. Untersuchen wir zunächst, in welcher Weise die vorliegende Bestimmung der Constanten die unter das Integralzeichen eingehenden Functionen R, R_i beeinflufst.

Wenn man in den Ausdrücken für die u, welche die Gleichungen (15.) geben, die Werthe der Constanten A aus (24.) einführt, so wird

$$u_i^r = \sum_{k=1}^{k=n} A_k^r \left\{ \left[\frac{\partial y_i}{\partial \alpha_k}\right] + c_{1k}\left[\frac{\partial y_i}{\partial \alpha_1}\right] + c_{2k}\left[\frac{\partial y_i}{\partial \alpha_2}\right] + \cdots c_{nk}\left[\frac{\partial y_i}{\partial \alpha_n}\right] \right\},$$

oder die u nehmen die Gestalt an:

$$(26.) \qquad u_i^r = A_1^r v_i^1 + A_2^r v_i^2 + \cdots A_n^r v_i^n,$$

wenn nämlich gesetzt wird:

$$(27.)\quad v_i^k = \left[\frac{\partial y_i}{\partial a_k}\right] + c_{1k}\left[\frac{\partial y_i}{\partial \alpha_1}\right] + c_{2k}\left[\frac{\partial y_i}{\partial \alpha_2}\right] + \cdots c_{nk}\left[\frac{\partial y_i}{\partial \alpha_n}\right].$$

Bildet man jetzt die Determinante der u, so bemerkt man, dafs deren Elemente gerade die Form haben, welche die Zerfällung einer Determinante in zwei Factoren erlaubt; man erhält sogleich:

$$(28.)\quad R = A.S,$$

wenn A die Determinante der A_k und S die Determinante der v bedeutet.

Gehen wir nun zu den R_i über, welche durch die Gleichung (18.) gegeben sind. Hier ist der Coefficient von $\delta\frac{dy_i}{dt}$ eben R; aber auch der Coefficient von δy_h, nämlich

$$\frac{du_i^1}{dx}\cdot\frac{\partial R}{\partial u_h^1} + \frac{du_i^2}{dx}\cdot\frac{\partial R}{\partial u_h^2} + \cdots \frac{du_i^n}{dx}\cdot\frac{\partial R}{\partial u_h^n},$$

ist eine Determinante von derselben Natur wie R selbst, nur dafs an die Stelle der v_h die Functionen $\frac{dv_i}{dx}$ getreten sind. Auch dieser Ausdruck geht also in die Form über:

$$A\left\{\frac{dv_i^1}{dx}\cdot\frac{\partial S}{\partial v_h^1} + \frac{dv_i^2}{dx}\cdot\frac{\partial S}{\partial v_h^2} + \cdots \frac{dv_i^n}{dx}\cdot\frac{\partial S}{\partial v_h^n}\right\};$$

und somit nimmt R_i die Gestalt an:

$$(29.)\quad R_i = A.S_i,$$

wenn

$$(30.)\quad \begin{cases} S_i = S\delta\frac{dy_i}{dt} - \Sigma_h\Sigma_k\delta y_h\cdot\frac{dv_i^k}{dt}\cdot\frac{\partial S}{\partial v_h^k}, \\ S = \Sigma\pm v_1^1 v_2^2 \ldots v_n^n \end{cases}$$

gesetzt wird.

Hiernach kommen die A nur noch in der Verbindung ihrer Determinante vor. Aber die zweite Variation (13.) enthält auch nur die Verhältnisse $\frac{R_i}{R}$; es gehen also aus dem ersten Theile der zweiten Variation die A wirklich vollkommen heraus, und man erhält:

$$(31.)\quad \delta^2 J = \tfrac{1}{2}\int_{x^0}^{x'} \Sigma_i\Sigma_k \frac{\partial^2\Omega}{\partial\frac{dy_i}{dx}\,\partial\frac{dy_k}{dx}}\cdot\frac{S_i S_k}{S^2}\cdot dx + B' - B^0.$$

Diese Gleichung giebt uns für die v eine sehr einfache Bedeutung. Denn

die S, S_i haben ganz dieselbe Form für die v, wie sie R, R_i für die u haben. Man kann daher sagen:

Statt sich der particularen Integrale u zu bedienen, genügt es, die particularen Integrale v zu benutzen, welche eine geringere Anzahl willkürlicher Constanten $\left(nur\ \frac{n.n+1}{2}\right)$ enthalten, ohne dafs dies die Allgemeinheit der Betrachtung vermindert.

Ehe wir aber diesen Satz vollständig zugeben können, ist es nöthig nachzuweisen, dafs die A sowohl auf die Bedingungsgleichungen (14.), welchen die R_i unterworfen sind, als auf die Function B gleichfalls ohne Einflufs sind.

Dies geschieht ohne Mühe. Die Gleichungen (14.) gehen durch Anwendung der Gleichung (29.) von selbst in die Form über:

$$(32.)\qquad \Sigma_i S_i \frac{\partial \varphi_1}{\partial \frac{dy_i}{dx}} = 0,\qquad \Sigma_i S_i \frac{\partial \varphi_2}{\partial \frac{dy_i}{dx}} = 0,\qquad \dots\qquad \Sigma_i S_i \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial \frac{dy_i}{dx}} = 0,$$

welche die A nicht mehr enthält.

Die Coefficienten der Function B endlich, welche von den Gleichungen (20.) abhängen, bedürfen noch der Aufstellung der Function $\frac{\partial \Omega_2}{\partial \frac{du_k^r}{dx}}$. Diese Function hatte in (21.) eine Form angenommen, welche der Form der u ganz ähnlich war. Dies mufs daher auch noch der Fall bleiben, wenn man mit Hülfe der Gleichungen (24.) die c einführt; d. h. es mufs, analog mit (26.), (27.) die Gleichung stattfinden:

$$(33.)\qquad \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial \frac{du_i}{dx}}\right)^r = A_1^r \Omega_i^1 + A_2^r \Omega_i^2 + \cdots A_n^r \Omega_i^n,$$

wo

$$(34.)\ \Omega_i^k = \left[\frac{\partial}{\partial a_k}\left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)\right] + c_{1k}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)\right] + c_{2k}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)\right] + \cdots c_{nk}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_n}\left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)\right].$$

Hiedurch geht aber die für die β bestehende Gleichung (20.) in die folgende über:

$$0 = \Sigma_k A_k^r \{\beta_{1i} v_1^k + \beta_{2i} v_2^k + \cdots \beta_{ni} v_n^k - \Omega_i^k\},$$

welche für alle Werthe von r gelten soll, und welche daher das System fordert:

$$(35.)\qquad \beta_{1i} v_1^k + \beta_{2i} v_2^k + \cdots \beta_{ni} v_n^k = \Omega_i^k,$$

welches wiederum von den A ganz frei geworden ist. Aber auch die Be-

deutung von Ω_i^k ist genau dieselbe, wie die des rechten Theils in (20.), nur die u durch die v ersetzt gedacht. Denn setzen wir die v an die Stelle der u, so heifst das mit andern Worten, es werde $A_k^r = 0$, und $A_r^r = 1$ gesetzt. Zugleich geht dann u_i^r in v_i^r über, und $\left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial \frac{du_i}{dx}}\right)^r$ in $\left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial \frac{dv_i}{dx}}\right)^r$; so dafs also aus (33.) die Bedeutung von Ω_i^r fliefst:

$$(36.)\quad \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial \frac{dv_i}{dx}}\right)^r = \Omega_i^r,$$

welche der Bedeutung des rechten Theils in (20.) vollkommen analog ist. Hieraus folgt endlich die Zulässigkeit des eben ausgesprochenen Satzes.

Durch die Gleichungen (27.), (30.), (31.), (32.), (35.), (36.) ist die neue Gestalt der zweiten Variation vollständig gegeben. Sie hat den Vorzug, nur die ihr zukommende Zahl willkürlicher Constanten zu zeigen, welche vollständig von einander unabhängig sind.

§. 7.

Zweite Umformung des Theils unter dem Integralzeichen.

Aber dafs auch die vorliegende Gestalt die wahre Form noch nicht sei, dafür spricht vor allem die Gestalt, in welcher die Function B gegeben ist. Denn es ist offenbar $\beta_{ik} = \beta_{ki}$; und dies ist aus den Gleichungen (35.) noch keinesweges ersichtlich. Man wird daher gedrängt, einen Schritt weiter zu gehen, und die Function (V) wirklich in die Betrachtung eingehen zu lassen.

Hiezu wird es vor Allem nothwendig die Werthe der $\left[\frac{\partial y_i}{\partial a_k}\right]$, $\left[\frac{\partial y_i}{\partial \alpha_k}\right]$ zu bestimmen. Dies mufs mit Hülfe derjenigen Gleichungen geschehen, welche die y durch die Constanten ausdrücken, nämlich:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial a_1}\right) = \alpha_1,\quad \left(\frac{\partial V}{\partial a_2}\right) = \alpha_2,\ \cdots \left(\frac{\partial V}{\partial a_n}\right) = \alpha_n.$$

Die Differentiation dieser Gleichungen nach den a ergiebt nun folgendes System:

$$(37.)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial y_1}\right)\left[\frac{\partial y_1}{\partial a_k}\right] + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial y_2}\right)\left[\frac{\partial y_2}{\partial a_k}\right] + \cdots \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial y_n}\right)\left[\frac{\partial y_n}{\partial a_k}\right] = -\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial a_k}\right), \\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial y_1}\right)\left[\frac{\partial y_1}{\partial a_k}\right] + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial y_2}\right)\left[\frac{\partial y_2}{\partial a_k}\right] + \cdots \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial y_n}\right)\left[\frac{\partial y_n}{\partial a_k}\right] = -\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial a_k}\right), \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_n \partial y_1}\right)\left[\frac{\partial y_1}{\partial a_k}\right] + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_n \partial y_2}\right)\left[\frac{\partial y_2}{\partial a_k}\right] + \cdots \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_n \partial y_n}\right)\left[\frac{\partial y_n}{\partial a_k}\right] = -\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_n \partial a_k}\right). \end{cases}$$

Hätten wir, statt nach a_k, nach α_k differentiirt, so würde auf der rechten Seite überall Null gekommen sein, und nur bei der k^{ten} Gleichung 1.

Bezeichnet man nun die Determinante der $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_k \partial \gamma_i}\right)$ mit p und mit p_i^k den Differentialquotienten derselben nach jenem Elemente, so wird nach dem Obigen:

$$(38.)\qquad -p\left[\frac{\partial y_i}{\partial a_k}\right] = p_i^1\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial a_k}\right)+p_i^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial a_k}\right)+\cdots p_i^n\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_n \partial a_k}\right)$$

und

$$(39.)\qquad p\left[\frac{\partial y_i}{\partial a_k}\right] = p_i^k.$$

Dies giebt den Functionen v eine neue Gestalt, und zwar eine analoge mit derjenigen, welche die u durch die v selbst ausgedrückt zeigt; denn die Gleichung (27.) geht nunmehr über in:

$$(40.)\qquad p v_i^k = p_i^1 w_{1k}+p_i^2 w_{2k}+\cdots p_i^n w_{nk},$$

wo die Functionen w_{hk} die einfache Gestalt annehmen:

$$(41.)\qquad w_{hk} = c_{hk}-\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_h \partial a_k}\right),$$

so dafs die Determinante der w eine symmetrische ist.

Untersuchen wir, welche Gestalt in Folge dessen die Functionen S, S_i annehmen. Die erste derselben zerfällt offenbar wiederum in zwei Factoren; der eine derselben ist die Determinante der Functionen $\frac{p_i^k}{p}$, d. h. $\frac{1}{p}$; der andere aber ist die Determinante der w, welche durch W bezeichnet sei; so dafs man die Gleichungen hat:

$$(42.)\qquad S=\frac{1}{p}\cdot W,\qquad W=\Sigma\pm w_{11}w_{22}\ldots w_{nn}.$$

Um nun den Ausdruck S_i zu bilden, betrachten wir zunächst den Ausdruck

$$\delta y_1\frac{\partial S}{\partial v_1^k}+\delta y_2\frac{\partial S}{\partial v_2^k}+\cdots\delta y_n\frac{\partial S}{\partial v_n^k}.$$

Auch dieser ist eine Determinante, nur dafs an die Stelle der v^k die δy getreten sind. Könnten wir nun auch den δy die Form geben:

$$(43.)\qquad p\,\delta y_h = w_1 p_h^1+w_2 p_h^2+\cdots w_n p_h^n,$$

so würde diese Determinante gleichfalls in zwei Factoren zerfallen, genau wie S, nämlich in:

$$\frac{1}{p}\left(w_1\frac{\partial W}{\partial w_{1k}}+w_2\frac{\partial W}{\partial w_{2k}}+\cdots w_n\frac{\partial W}{\partial w_{nk}}\right).$$

Eine solche Bestimmung der w_k ist natürlich immer möglich. Sie führt aber in dem vorliegenden Falle zu einem sehr einfachen Resultat. Denn aus der Bedeutung der p ergiebt sich sofort, indem man die w durch die δy ausdrückt:

$$w_k = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_k \partial y_1}\right)\delta y_1 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_k \partial y_2}\right)\delta y_2 + \cdots \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_k \partial y_n}\right)\delta y_n,$$
$$= \delta\left(\frac{\partial V}{\partial a_k}\right);$$

oder wenn man sich die Veränderungen der y dadurch entstanden denkt, dafs man den α kleine veränderliche Incremente $\delta\alpha$ ertheilt hat:

$$(44.) \qquad w_k = \delta\alpha_k.$$

Und so geht der betrachtete Ausdruck über in:

$$\frac{1}{p}\left(\frac{\partial W}{\partial w_{1k}}\delta\alpha_1 + \frac{\partial W}{\partial w_{2k}}\delta\alpha_2 + \cdots \frac{\partial W}{\partial w_{nk}}\delta\alpha_n\right).$$

Führen wir dies nun in den Ausdruck von S_i ein (30.), und setzen auch für $\frac{d.\delta y_i}{dt}$ aus (43.), (44.), und für $\frac{dv_i^k}{dt}$ aus (40.) die Werthe ein, so erhalten wir:

$$S = \frac{1}{p}\Big\{W\frac{d}{dx}\frac{p_i^1\delta\alpha_1 + p_i^2\delta\alpha_2 \ldots p_i^n\delta\alpha_n}{p}$$
$$- \Sigma_k\left(\frac{\partial W}{\partial w_{1k}}\delta\alpha_1 + \frac{\partial W}{\partial w_{2k}}\delta\alpha_2 \cdots \frac{\partial W}{\partial w_{nk}}\delta\alpha_n\right)\frac{d}{dx}\,\frac{w_{1k}p_i^1 + w_{2k}p_i^2 \cdots}{p}\Big\}.$$

Hier übersieht man leicht, dafs die von der Differentiation der p herrührenden Terme sich gegenseitig zerstören; denn $\frac{d}{dx}\frac{p_i^r}{p}$ ist multiplicirt mit

$$W\delta\alpha_r - \Sigma_k\left(\frac{\partial W}{\partial w_{1k}}\delta\alpha_1 + \frac{\partial W}{\partial w_{2k}}\delta\alpha_2 \cdots \frac{\partial W}{\partial w_{nk}}\delta\alpha_n\right)w_{rk},$$

was identisch verschwindet. So nimmt denn S_i die folgende Gestalt an:

$$(45.) \qquad S_i = \frac{1}{p^2}(p_i^1 T_1 + p_i^2 T_2 + \cdots p_i^n T_n),$$

wo

$$(46.) \qquad T_h = W\frac{d\delta\alpha_h}{dx} - \Sigma_k\Sigma_m\,\delta\alpha_m \cdot \frac{dw_{hk}}{dx} \cdot \frac{\partial W}{\partial w_{mk}}.$$

Auch T_h ist eine Determinante, und zwar von ganz derselben Form wie R_i, S_i; an die Stelle der δy sind die $\delta\alpha$ getreten, an die Stelle der u, v aber die w, wodurch ein Theil jener Determinante eine symmetrische Form angenommen hat; die Determinantenform der Function T_h ist die folgende:

$$(47.)\qquad T_h = \begin{vmatrix} \frac{d\delta\alpha_h}{dx} & \delta\alpha_1 & \delta\alpha_2 & \dots & \delta\alpha_n \\ \frac{dw_{1h}}{dx} & w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1n} \\ \frac{dw_{2h}}{dx} & w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{dw_{nh}}{dx} & w_{n1} & w_{n2} & \dots & w_{nn} \end{vmatrix}.$$

Wenn wir nun dies in die Form (31.) der zweiten Variation einführen, so erhalten wir unter dem Integralzeichen eine homogene Function zweiter Ordnung der $\frac{T_h}{W}$; und die Coefficienten derselben sind die Ausdrücke:

$$(48.)\qquad \Sigma_i \Sigma_k \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \frac{dy_i}{dx}\, \partial \frac{dy_k}{dx}} \cdot \frac{p_i^h p_i^r}{p^2}.$$

Auch diese Coefficienten haben eine einfache Bedeutung. Denken wir uns, wie oben, die Variationen der y durch kleine Variationen der α hervorgerufen, so wird man zunächst sich die y, $\frac{dy}{dx}$, λ in Ω ausgedrückt denken können durch die Functionen α, $\frac{d\alpha}{dx}$ (welches letztere nach vorgenommener Variation Null zu setzen), und zwar mit Hülfe der Gleichungen:

$$(49.)\qquad \left(\frac{\partial V}{\partial \alpha_k}\right) = \alpha_k, \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial V}{\partial \alpha_k}\right) = \frac{d\alpha_k}{dx}.$$

In diesem Sinne mag die Function Ω mit $\overline{\Omega}$ bezeichnet werden. Dann wollen wir, dem Coefficienten $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \frac{dy_i}{dx}\, \partial \frac{dy_k}{dx}}$ entsprechend, den Ausdruck $\frac{\partial^2 \overline{\Omega}}{\partial \frac{d\alpha_h}{dx}\, \partial \frac{d\alpha_r}{dx}}$ bilden; es wird sich zeigen, dafs der Coefficient (48.) sich immer durch diesen Ausdruck ersetzen läfst.

Da sich die y mittelst der ersten Gleichung (49.) ausdrücken, welche die $\frac{dy}{dx}$ nicht enthalten, so folgt, dafs die Differentialquotienten

$$\left[\frac{\partial y_i}{\partial \alpha_k}\right], \qquad \frac{\partial \overline{y_i}}{\partial \alpha_k}$$

identisch sind. Aber da sich die $\frac{dy_i}{dx}$ aus der zweiten Gleichung (49.) be-

stimmen, welche nur der Differentialquotient der ersten nach x ist, so folgt dafs auch

$$\frac{\partial \overline{\frac{dy_i}{dx}}}{\partial \frac{d\alpha_k}{dx}} = \left[\frac{\partial y_i}{\partial \alpha_k}\right],$$

oder, nach den Gleichungen (39.), gleich $\frac{p_i^k}{p}$.

Bemerkt man ferner, dafs sowohl diese Ausdrücke als die y selbst nur von den α, nicht aber von den $\frac{d\alpha_k}{dx}$ abhängen; und dafs ferner Ω eine lineare Function der λ ist, so hat man:

$$\frac{\partial^2 \overline{\Omega}}{\partial \frac{d\alpha_h}{dx}\,\partial \frac{d\alpha_r}{dx}} = \Sigma_i \Sigma_k \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \frac{dy_i}{dx}\,\partial \frac{dy_k}{dx}} \cdot \frac{p_i^r p_k^h}{p^2}$$
$$+ 2\Sigma_i \Sigma_k \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \frac{dy_k}{dx}\,\partial \lambda_i} \cdot \frac{p_k^r}{p} \cdot \frac{\partial \overline{\lambda_i}}{\partial \frac{d\alpha_h}{dx}} + \Sigma_i \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda_i} \cdot \frac{\partial^2 \overline{\lambda_i}}{\partial \frac{d\alpha_h}{dx}\,\partial \frac{d\alpha_r}{dx}}.$$

Auch der letzte Term dieses Ausdrucks verschwindet noch, weil $\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda_i}$ nichts Anderes ist als φ_i, mithin Null; und der zweite Term rechts nimmt sofort die Gestalt an:

$$2\Sigma_i \frac{\partial \overline{\lambda_i}}{\partial \frac{d\alpha_h}{dx}} \cdot \frac{\partial \overline{\varphi_i}}{\partial \frac{d\alpha_r}{dx}}.$$

Und wenn wir jetzt den vorliegenden Ausdruck mit $\frac{T_h T_r}{W^2}$ multipliciren und die Summe nach h, r nehmen, so erhalten wir für den unter dem Integralzeichen der zweiten Variation stehenden Ausdruck:

$$(50.)\quad \Sigma_i \Sigma_k \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \frac{dy_i}{dx}\,\partial \frac{dy_k}{dx}} \cdot \frac{S_i S_k}{S^2} = \Sigma_r \Sigma_h \frac{\partial^2 \overline{\Omega}}{\partial \frac{d\alpha_r}{dx}\,\partial \frac{d\alpha_h}{dx}} \cdot \frac{T_h T_r}{W^2}$$
$$- \frac{2}{W^2} \Sigma_i \left(\frac{\partial \overline{\lambda_i}}{\partial \frac{d\alpha_1}{dx}} T_1 + \frac{\partial \overline{\lambda_i}}{\partial \frac{d\alpha_2}{dx}} T_2 + \cdots\right)\left(\frac{\partial \overline{\varphi_i}}{\partial \frac{d\alpha_1}{dx}} T_1 + \frac{\partial \overline{\varphi_i}}{\partial \frac{d\alpha_2}{dx}} T_2 + \cdots\right).$$

Aber erinnern wir uns jetzt derjenigen linearen Gleichungen, welche zwischen den S bestanden (32.), nämlich der Gleichungen:

$$\Sigma_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial \frac{dy_k}{dx}} \cdot S_k = 0;$$

dieselbe nimmt durch die Einführung der T die Gestalt an:

$$\Sigma_k^* \frac{\partial \varphi_i}{\partial \frac{dy_k}{dx}} \cdot \frac{p_k^1 T_1 + p_k^2 T_2 + \cdots p_k^n T_n}{p},$$

oder endlich, nach der eben eingeführten Differentiationsweise:

$$(51.)\qquad \frac{\partial \overline{\varphi_i}}{\partial \frac{d\alpha_1}{dx}} \cdot T_1 + \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \frac{d\alpha_2}{dx}} \cdot T_2 + \cdots \frac{\partial \overline{\varphi_i}}{\partial \frac{d\alpha_n}{dx}} \cdot T_n = 0.$$

Dies zeigt, dafs der zweite Term auf der rechten Seite von (50.) verschwindet.

So kann man jetzt der zweiten Variation die Form geben:

$$(52.)\qquad \delta^2 J = \tfrac{1}{2} \int_{x^0}^{x'} \frac{\partial^2 \overline{\Omega}}{\partial \frac{d\alpha_r}{dx} \partial \frac{d\alpha_h}{dx}} \cdot \frac{T_r T_h}{W^2} \cdot dx + B' - B^0.$$

Der Term unter dem Integralzeichen hat hier die einfachste Form angenommen, deren er durch die gegenwärtigen Betrachtungen fähig ist, indem Alles darin durch die Function V ausgedrückt ist. Die Bedeutung der darin eingehenden Gröfsen ist durch die Gleichungen (41.), (42.), (47.) bestimmt.

Es bleibt übrig, dafs wir nun endlich die entsprechenden Betrachtungen auf die Function B anwenden, um dieser ihre definitive Gestalt zu geben.

§. 8.

Darstellung der Function aufserhalb des Integralzeichens.

Die Gleichungen (35.) sind es, aus welchen die Functionen β sich bestimmen. Betrachten wir zunächst die rechten Theile dieser Gleichungen. Wenn wir in (34.) die Differentiation ausführen, und uns zugleich an die Bedeutung der v aus (27.) erinnern, so wird sogleich:

$$\Omega_i^k = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_k \partial y_i}\right) + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial y_1}\right) v_1^k + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial y_2}\right) v_2^k + \cdots \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial y_n}\right) v_n^k.$$

Werfen wir also die letzten Terme dieses Ausdrucks auf die linke Seite der Gleichung (35.) hinüber, so haben wir:

$$\left(\beta_{1i} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial y_1}\right)\right) v_1^k + \left(\beta_{2i} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial y_2}\right)\right) v_2^k + \cdots \left(\beta_{ni} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial y_n}\right)\right) v_n^k = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_k \partial y_i}\right).$$

Multipliciren wir jetzt diese Gleichung mit δy_i und bilden die Summe nach i, so wird, indem offenbar

$$\left(\beta_{h1} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_h \partial y_1}\right)\right) \delta y_1 + \left(\beta_{h2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_h \partial y_2}\right)\right) \delta y_2 + \cdots = \frac{\partial (B - \delta^2 V)}{\partial \delta y_h},$$

die folgende erhalten:

$$\frac{\partial(B-(\delta^2 V))}{\partial\delta y_1}v_1^k+\frac{\partial(B-(\delta^2 V))}{\partial\delta y_2}v_2^k+\cdots\frac{\partial(B-(\delta^2 V))}{\partial\delta y_n}v_n^k = \delta\alpha_k.$$

Und wenn man nun diese Gleichungen auflöst, so kommt

$$S\frac{\partial(B-(\delta^2 V))}{\partial\delta y_h} = \delta\alpha_1\frac{\partial S}{\partial v_h^1}+\delta\alpha_2\frac{\partial S}{\partial v_h^2}+\cdots\delta\alpha_n\frac{\partial S}{\partial v_h^n}.$$

Endlich multipliciren wir diese Gleichung mit δy_h und summiren nach h. Auf der linken Seite erscheint dann

$$2S(B-(\delta^2 V));$$

auf der rechten aber die Summe

$$\Sigma_k\delta\alpha_k\left(\frac{\partial S}{\partial v_1^k}\delta y_1+\frac{\partial S}{\partial v_2^k}\delta y_2+\cdots\frac{\partial S}{\partial v_n^k}\delta y_n\right).$$

Der in der Klammer stehende Ausdruck ist bereits früher behandelt worden, bei Gelegenheit der Gleichungen (42.) bis (45.); wo er sich gleich

$$\frac{1}{p}\left(\frac{\partial W}{\partial w_{1k}}\delta\alpha_1+\frac{\partial W}{\partial w_{2k}}\delta\alpha_2+\cdots\frac{\partial W}{\partial w_{nk}}\delta\alpha_n\right)$$

fand. Bemerken wir noch dafs $S=\frac{W}{p}$ (42.), so nimmt hienach die Function B folgende Gestalt an:

$$(53.)\qquad B = (\delta^2 V)+\frac{1}{2W}\Sigma_i\Sigma_k\frac{\partial W}{\partial w_{ik}}\delta\alpha_i\delta\alpha_k,$$

wodurch endlich die Form der Function B vollständig angegeben wird. Der letzte Theil derselben ist wiederum eine Determinante, und zwar eine symmetrische; indem man derselben ihre Form giebt, und zugleich für $(\delta^2 V)$ seinen Werth einsetzt, erhält man den folgenden Ausdruck:

$$(54.)\quad 2B=\Sigma_i\Sigma_k\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_i\partial y_k}\right)\delta y_i\delta y_k-\frac{1}{\Sigma\pm w_{11}w_{22}\dots w_{nn}}\cdot\begin{vmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1n} & \delta\alpha_1\\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2n} & \delta\alpha_2\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ w_{n1} & w_{n2} & \dots & w_{nn} & \delta\alpha_n\\ \delta\alpha_1 & \delta\alpha_2 & \dots & \delta\alpha_n & 0\end{vmatrix}.$$

Die Aufstellung der Function B ist auch insofern von Interesse, als gerade der unmittelbarste Weg, zu einer Reduction der zweiten Variation zu gelangen, dieselbe von einem Systeme von $\frac{n.n+1}{2}$ Differentialgleichungen erster Ordnung abhängig macht, welche sehr verwickelter Natur sind, und als deren abhängige Variabeln sich die Coefficienten der Function B darstellen. Die Gleichung (54.) enthält die vollständige Lösung jener Differentialgleichungen. Die Gleichungen selbst sind in den Formeln (20.), (23.), (24.) des

bereits angeführten Aufsatzes enthalten. Indem man dort alle Hülfsgröfsen entfernt, und sodann die Gleichung (54.) hinzuzieht, gelangt man zu folgendem Theorem, in welchem, wie in der citirten Abhandlung, die Bezeichnungen

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_i \partial y_k} = a_{ik}, \qquad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_i \partial \frac{dy_k}{dx}} = b_i^{(k)}, \qquad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \frac{dy_i}{dx} \partial \frac{dy_k}{dx}} = c^{ik},$$

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial y_i} = p_i^{(m)}, \qquad \frac{\partial \varphi_m}{\partial \frac{dy_i}{dx}} = q_i^{(m)}$$

angewandt sind:

Die Integralgleichungen des Systems simultaner Differentialgleichungen:

$$0 = \begin{vmatrix} a_{ik} - \frac{d\beta_{ik}}{dx} & b_i^{(1)} - \beta_{i1} & b_i^{(2)} - \beta_{i2} & \dots & b_i^{(n)} - \beta_{in} & p_i^{(1)} & p_i^{(2)} & \dots & p_i^{(\varkappa)} \\ b_k^{(1)} - \beta_{k1} & c^{11} & c^{12} & \dots & c^{1n} & q_1^{(1)} & q_1^{(2)} & \dots & q_1^{(\varkappa)} \\ b_k^{(2)} - \beta_{k2} & c^{12} & c^{22} & \dots & c^{2n} & q_2^{(1)} & q_2^{(2)} & \dots & q_2^{(\varkappa)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_k^{(n)} - \beta_{kn} & c^{1n} & c^{2n} & \dots & c^{nn} & q_n^{(1)} & q_n^{(2)} & \dots & q_n^{(\varkappa)} \\ p_k^{(1)} & q_1^{(1)} & q_2^{(1)} & \dots & q_n^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p_k^{(2)} & q_1^{(2)} & q_2^{(2)} & \dots & q_n^{(2)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_k^{(\varkappa)} & q_1^{(\varkappa)} & q_2^{(\varkappa)} & \dots & q_n^{(\varkappa)} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

sind die folgenden:

$$0 = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial y_k}\right) - \beta_{ik} & \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial y_i}\right) & \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial y_i}\right) & \dots & \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_n \partial y_i}\right) \\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial y_k}\right) & \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial a_1}\right) - c_{11} & \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial a_1}\right) - c_{21} & \dots & \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_n \partial a_1}\right) - c_{n1} \\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial y_k}\right) & \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial a_2}\right) - c_{12} & \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial a_2}\right) - c_{22} & \dots & \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_n \partial a_2}\right) - c_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_n \partial y_k}\right) & \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial a_n}\right) - c_{1n} & \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_2 \partial a_n}\right) - c_{2n} & \dots & \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_n \partial a_n}\right) - c_{nn} \end{vmatrix}$$

wo die c willkürliche Constanten bedeuten und $c_{ik} = c_{ki}$ *ist.*

Berlin, den 21. Februar 1858.

22.

Vermischte Sätze und Aufgaben.

(Von Herrn *J. Steiner.*)

I.

1. Zieht man durch irgend einen Punkt, p, in der Ebene einer allgemeinen Curve n^{ten} Grads, C^n, beliebige Gerade $A, B, C, \ldots$ und bezeichnet ihre Schnittpunkte mit der Curve durch $a, a_1, \ldots a_{n-1}$; $b, b_1, \ldots b_{n-1}$; $c, c_1, \ldots c_{n-1}$; etc., und bildet die Producte aus den Abschnitten jeder Geraden von diesen Schnitten bis zu dem Punkte p genommen, also die Producte $pa, pa_1, \ldots pa_{n-1}$; $pb, pb_1, \ldots pb_{n-1}$; etc., so bleibt bekanntlich das Verhältnifs dieser Producte constant, wenn die Geraden sammt ihrem gemeinsamen Punkte p unter Beibehaltung ihrer Richtungen, also jede sich selbst parallel bleibend, in der Ebene der festen Curve beliebig verschoben werden. *Denkt man sich alle möglichen Geraden durch den Punkt p, den Strahlbüschel, so giebt es unter denselben, im Allgemeinen, je 2n Gerade, deren Abschnitte gleich grofse Producte geben. Und insbesondere giebt es unter denselben n solche Gerade, deren Producte relative Minima sind. An die Stelle eines solchen Minimums tritt so oft ein Maximum, als die Curve ein Paar imaginäre Asymptoten hat. — Bei paralleler Verschiebung des Strahlbüschels behalten die nämlichen Geraden die angegebene Eigenschaft.*

2. Nimmt man in jeder durch denselben Punkt p gehenden Geraden A denjenigen Punkt q, dessen Abstand vom Punkte p der mittlere Factor zwischen den vorgenannten n Abschnitten der Geraden ist, so dafs

$$pq^n = pa.pa_1.pa_2 \ldots pa_{n-1},$$

so ist der Ort dieses Punktes q eine Curve $2n^{\text{ten}}$ *Grads,* Q^{2n}, *welche n durch den Punkt p gehende Doppelasymptoten hat, und welche die gegebene Curve, im Endlichen, in* $2n(n-1)$ *Punkten r schneidet, wo in jedem der Punkt q mit einem der n Schnittpunkte* $a, a_1, \ldots a_{n-1}$, *etwa mit a, vereinigt ist, so dafs also durch den beliebigen Punkt p, im Allgemeinen,* $2n(n-1)$ *solche Gerade A gehen, in denen einer der n Abschnitte der mittlere Factor zwischen den* $n-1$ *übrigen Abschnitten*

ist, also

$$pr^{n-1} = pa^{n-1} = pa_1 . pa_2 \dots pa_{n-1}.$$

Durch die $2n(n-1)$ ***Punkte r können Curven*** $(2n-2)^{ten}$ ***Grads gehen.***

In den vorgenannten besondern n Geraden, für welche das Product der n Abschnitte ein Minimum ist (1.), ***ist auch der Abstand des Punktes q vom Punkte p ein Minimum, so dafs die Gerade im Punkte q auf dessen Ortscurve*** Q^{2n} ***normal steht.*** Und zwar ist solche Gerade eine ***Doppelnormale*** der Curve, weil der Punkt q in jeder Geraden A immer doppelt vorhanden ist, zu beiden Seiten vom Punkte p in gleichem Abstande, so dafs also die Curve Q^{2n} den Punkt p zum Mittelpunkt und zugleich zum vielfachen singulären Punkt hat.

3. Die in (1.) und (2.) angegebenen Eigenschaften finden gleicherweise statt, wenn die gegebene Curve C^n durch beliebige n Gerade vertreten wird. Seien z. B. drei Gerade gegeben, so haben die durch einen beliebigen Punkt p gehenden Geraden oder Transversalen zu je 6 und 6 gleiche Producte, und insbesondere giebt es drei Transversalen, deren Producte relative Minima sind. Welche weitere Beziehung haben diese drei Transversalen unter sich und zu den drei gegebenen Geraden? und welche Relation haben jede der erstgenannten sechs Transversalen unter sich?

4. Ist die gegebene Curve nur ein Kegelschnitt: ***so verhalten sich die Producte (hier Rechtecke) der Abschnitte der durch irgend einen und denselben Punkt p gehenden Transversalen wie die Quadrate der den Transversalen parallelen Durchmesser des Kegelschnitts. Demzufolge verhalten sich die aus dem Punkte p an den Kegelschnitt gelegten Tangenten wie die ihnen parallelen Durchmesser. Die Transversalen haben, im Allgemeinen, zu je vier gleiche Producte; diejenigen zwei Transversalen insbesondere, welche den Axen des Kegelschnitts parallel sind, enthalten die Minima des Products.*** Diese Eigenschaften gestalten sich jedoch nach der Art des Kegelschnitts verschieden, und zwar wie folgt.

a. Ist der Kegelschnitt ***Ellipse,*** so haben die Transversalen nur zu je zwei gleiche Producte. Die der kleinen Axe parallele Transversale enthält das ***Minimum,*** während die der grofsen Axe parallele das ***Maximum*** des Products enthält. Jedes Paar Transversalen, welche gleiche Producte enthalten, bilden mit jeder Axe gleiche Winkel, oder die den Axen parallelen Transversalen hälften die Winkel zwischen jedem solchen Paar, so dafs also alle diese Paare leicht zu finden sind. Jedes Paar bildet in der Ellipse zwei

Sehnen (reell oder ideell); *die durch die Mitten dieser Sehnen gehende Gerade hat constante Richtung, d. h. alle solche Geraden sind parallel.* Die vier Schnittpunkte jedes Paars mit der Ellipse liegen in einem Kreise; *welchen Ort haben die Mittelpunkte aller dieser Kreise? und welche Enveloppe haben die letztern?*

b. Ist hingegen der Kegelschnitt *Hyperbel*, so haben von den Transversalen je vier gleiche Producte. In der That sind auch die Durchmesser der Hyperbel zu je vier gleich grofs, wofern man die imaginären Durchmesser auch als reell annimmt, oder die conjugirte Hyperbel mit in Betracht zieht. Ein mit den conjugirten Hyperbeln concentrischer Kreis schneidet dieselben in den Endpunkten von je vier gleichen Durchmessern. Demgemäfs ordnen sich nun auch jede vier Transversalen, welche gleiche Producte enthalten, in zwei Paare, wovon das eine den zwei reellen und das andere den zwei imaginären Durchmessern parallel ist; zudem sind die beiden Paare darin verschieden, dafs bei dem einen die Schnittpunkte mit der Hyperbel auf gleicher, dagegen beim andern auf entgegengesetzten Seiten des Punktes p liegen; die Paare wechseln jedoch diese Eigenschaft, je nachdem der Punkt p innerhalb oder aufserhalb der gegebenen Hyperbel liegt. Jedes Paar bildet mit jeder Axe der Hyperbel gleiche Winkel, oder die den Axen parallelen Transversalen hälften die Winkel zwischen jedem Paar und enthalten die beiden *Minima* des Products. *Die Geraden, welche beziehlich durch die Mitten der in den einzelnen Paaren liegenden zwei Sehnen gehen, sind sämmtlich parallel.* Die vier Schnittpunkte jedes Paars mit der Hyperbel liegen in einem Kreis. *Welches ist der Ort der Mittelpunkte dieser Kreise? und welche Enveloppe haben die letztern?* — Ist die Hyperbel *gleichseitig*, so ist von den je zwei zusammengehörigen Paaren, welche gleiche Producte enthalten, jede Transversale des einen Paars zu einer des andern Paars rechtwinklig; oder jede zwei zu einander rechtwinklige Durchmesser der gleichseitigen Hyperbel sind gleich grofs. Daher der folgende bekannte Satz: „*Zieht man aus einem beliebigen Punkt p zwei zu einander rechtwinklige Transversalen durch eine gleichseitige Hyperbel, so enthalten dieselben allemal gleiche Producte.*" Die Schnittpunkte solcher zwei Transversalen haben verschiedene Lage gegen den Punkt p und liegen nicht in einem Kreise; dagegen ist jeder der Höhenschnitt des durch die drei übrigen bestimmten Dreiecks, u. s. w.

Durch Umkehrung ergiebt sich unter anderm folgendes:

Wird ein beliebiger Kegelschnitt von einem Kreise in vier Punkten *a, b, c, d* geschnitten, die ein vollständiges Viereck bestimmen, *so sind von den drei Paar Strahlen, welche die Winkel zwischen den drei Paar Gegenseiten* (*ab* und *cd, ac* und *bd, ad* und *bc*) *des Vierecks hälften, drei und drei parallel, und zwar den Axen des Kegelschnitts parallel.* Bleibt der Kegelschnitt und eine Seite des Vierecks, etwa *ab,* fest, während der Kreis sich ändert, so bewegt sich die Gegenseite, *cd,* sich selbst parallel; u. s. w.

Ist einem vollständigen Viereck ein Kreis umschrieben, so sind von den Strahlen, welche die Winkel zwischen dessen drei Paar Gegenseiten hälften, drei und drei parallel und mit denselben sind auch die Axen aller dem Viereck umschriebenen Kegelschnitte parallel.

5. *Werden aus einem beliebigen Punkte p Transversalen durch einen gegebenen Kegelschnitt gezogen und über den Sehnen, als Durchmesser, Kreise beschrieben, so haben diese Kreise in Bezug auf irgend einen andern bestimmten Punkt q gleiche Potenzen, so dafs jeder einen bestimmten andern Kreis, der diesen Punkt q zum Mittelpunkt hat, entweder rechtwinklig oder im Durchmesser schneidet.*

Der Punkt *q* wird durch irgend drei der genannten Kreise gefunden; nebstdem wird seine Lage auch wie folgt bestimmt. Nimmt man die Polare des Punktes *p* in Bezug auf den Kegelschnitt und errichtet in ihrer Mitte, d. i. in dem Punkte, in welchem sie von dem ihr conjugirten Durchmesser getroffen wird, die zu ihr Senkrechte, so geht diese durch den Punkt *q*. Und wählt man unter den genannten Sehnen zwei solche, welche mit einer Axe des Kegelschnitts gleiche Winkel bilden, legt durch ihre Mitten eine Gerade und fället auf letztere aus dem Punkte *p* das Perpendikel, so geht auch dieses durch den Punkt *q*. — Ist der Kegelschnitt Hyperbel und man nimmt die den Asymptoten parallelen Transversalen, etwa *pa* und *pb,* errichtet auf dieselben in ihren Schnittpunkten *a, b* mit der Hyperbel Perpendikel, so treffen sich diese im Punkte *q*. Also: *Zieht man aus irgend einem Punkte p zwei Gerade pa, pb den Asymptoten der Hyperbel parallel und errichtet in ihren Schnittpunkten a, b mit der Hyperbel Perpendikel auf dieselben, so treffen sich diese mit der auf die Polare des Punktes p in deren Mitte errichteten Senkrechten in einem Punkte q.* Ist der Kegelschnitt Parabel und man errichtet auf die der Axe parallele Transversale, *pa,* in ihrem Schnittpunkt, *a,* mit der Parabel die Senkrechte, so geht dieselbe durch den Punkt *q*. — Besteht der Kegelschnitt aus zwei Geraden *S* und *T,* die ein-

ander in einem Punkte r schneiden, und man nimmt die ihnen parallelen Transversalen pt und ps, nämlich $pt \# S$ und $ps \# T$, errichtet auf dieselben in ihren Schnittpunkten t und s mit den ihnen nicht parallelen Geraden Perpendikel, so schneiden sich diese im fraglichen Punkte q. Hierbei ist also der Punkt q zugleich der Höhenschnitt des Dreiecks rst.

Jedem Punkte p in der Ebene eines gegebenen Kegelschnitts entspricht also auf die angegebene Weise irgend ein bestimmter anderer Punkt q; *aber der letztere entspricht in gleichem Sinne vier verschiedenen Punkten p, welche die Ecken eines Parallelogramms sind, dessen Seiten den Asymptoten des Kegelschnitts parallel.*

Wenn der Punkt p sich in einer Geraden bewegt, während der Kegelschnitt fest bleibt, welche Curve durchläuft dann der ihm entsprechende Punkt q? In dem besondern Falle, wo der Kegelschnitt aus zwei Geraden besteht, *durchläuft der Punkt q eine Hyperbel, deren Asymptoten beziehlich auf den Geraden senkrecht stehen.*

II.

1. *Sind in gleicher Ebene irgend zwei Curven, die eine vom p^{ten} die andere vom q^{ten} Grad, in fester Lage gegeben und bewegen sich die Endpunkte einer constanten Strecke ab einer Geraden S beziehlich in denselben, so umhüllt die Gerade eine Curve $4pq^{ter}$ Klasse, welche die im Unendlichen liegende Gerade G_∞ zur $2pq$fachen Tangente hat.*

2. *Bewegen sich die beiden Endpunkte der constanten Strecke ab in einer festen Curve n^{ten} Grads, C^n, so umhüllt die Gerade S eine Curve $2n(n-1)^{ter}$ Klasse, welche die gegebene Curve in jedem ihrer im Unendlichen liegenden n Punkte vierpunktig berührt, und welche die Gerade G_∞ zur $n(n-1)$fachen Tangente hat.* Demzufolge giebt es in der gegebenen Curve nach jeder bestimmten Richtung nur je $n(n-1)$ Sehnen von irgend einer gegebenen Länge ab. *Die Mitten solcher $n(n-1)$ gleichen und parallelen Sehnen liegen allemal in irgend einer Curve $(n-1)^{ten}$ Grads,* und in gleichen Curven liegen auch die nach gleicher Seite hin liegenden Endpunkte der Sehnen.

3. Ist die gegebene Curve vom vierten Grad, C^4, so umhüllt die constante Sehne ab, oder ihre Gerade S, eine Curve 24ster Klasse. Beide Curven haben $12 \times 24 = 288$ gemeinschaftliche Tangenten, wovon 16 auf die vier Asymptoten der gegebenen Curve fallen, d. h. jede Asymptote zählt für

vier gemeinschaftliche Tangenten; von den 272 übrigen soll jede durch S_1 bezeichnet werden. Berührt eine der letztern die gegebene Curve etwa im Punkte α und schneidet sie in den Punkten β und γ, so liegt die constante Sehne entweder zwischen diesen Schnittpunkten, oder zwischen einem derselben und dem Berührungspunkt, also entweder ist $\beta\gamma = ab$, oder es ist $\alpha\beta$ oder $\alpha\gamma = ab$. Im letztern Falle berühren sich die Curven im Punkte α und dann zählt S_1 für zwei gemeinschaftliche Tangenten. Bezeichnet man die Zahl der Fälle, wo $\alpha\beta$ oder $\alpha\gamma = ab$ durch x, und die Zahl der Fälle, wo $\beta\gamma = ab$ durch y, so ist

$$2x + y = 272.$$

Die Zahlen x und y zu finden.

4. Bewegt sich die constante Sehne ab in einer festen Curve dritten Grads, C^3, so umhüllt sie eine Curve 12ter Klasse, welche mit jener $6 \times 12 = 72$ gemeinschaftliche Tangenten hat, wovon 12 auf die drei Asymptoten der Curve C^3 fallen, und daneben noch 60 gemeinschaftliche Tangenten S_1 bleiben. Jede von diesen berührt die angegebene Curve in einem Punkte α und schneidet sie in einem andern Punkte β, und es ist $\alpha\beta = ab$; aber dabei berühren sich die beiden Curven im Punkte α, so dafs also S_1 für zwei gemeinschaftliche Tangenten zählt und folglich nur 30 solche S_1 statt finden, d. h.

Eine beliebige Curve dritten Grads hat, im Allgemeinen, je 30 *solche Tangenten, welche vom Berührungspunkt* α *bis zum Schnittpunkt* β *genommen, irgend eine gegebene Länge* ab *haben.*

Betrachtet man bei derselben gegebenen Curve dritten Grads zwei Ortscurven zugleich, welche zwei verschiedenen Sehnen ab und a_1b_1 entsprechen, so ergiebt sich der folgende Satz:

In einer beliebigen Curve dritten Grads sind je 60 *Transversalen* S *möglich, welche dieselbe in solchen drei Punkten* α, β, γ *schneiden, dafs die Strecken* $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ *beziehlich die gegebenen Längen* ab, a_1b_1 *haben.*

Bei wie vielen von diesen 60 Transversalen liegen die Punkte β und γ auf gleicher und bei wie vielen auf entgegengesetzter Seite vom Punkte α?

5. Bewegt sich eine constante Sehne ab in einem festen Kegelschnitt, so umhüllt sie eine Curve vierter Klasse. Durch jeden Punkt p in der Ebene des Kegelschnitts gehen also, im Allgemeinen, je vier Sehnen von irgend einer gegebenen Länge.

Die Mitten solcher vier gleichen Sehnen liegen allemal in einem Kreise, und wenn die Sehne ihre Gröfse ändert, während der Punkt p

fest bleibt, so haben alle zugehörigen Kreise den nämlichen Mittelpunkt q.

Gleiten die Endpunkte der constanten Sehne ab beziehlich auf zwei sich schneidenden festen Geraden S und T, so umhüllt dieselbe eine Curve vierter Klasse, *welche einer bestimmten Hypocycloide parallel ist.* Hierin ist die einst berühmte Aufgabe inbegriffen, nämlich:

„Wenn in einer Ebene zwei sich schneidende Gerade S, T und ein Punkt p gegeben sind, durch letztern eine Transversale so zu ziehen, dafs sie zwischen den Geraden eine Strecke von gegebener Länge ab hat."

Für jede Länge der Strecke giebt es, im Allgemeinen, vier Lösungen, *und die Mitten der vier Strecken liegen in einem Kreise, und alle Kreise die entstehen, wenn die Länge sich ändert, aber der Punkt p fest bleibt, haben einen und denselben Mittelpunkt q.*

Der hier betrachtete Punkt q ist übrigens der nämliche, wie der oben (I. 5.) gleichbenannte Punkt und wird also nach den daselbst angegebenen verschiedenen Arten gefunden.

III.

1. Jeder Punkt p in der Ebene eines beliebigen gegebenen Dreiecks ABC ist zugleich der Mittelpunkt eines dem Dreieck *umschriebenen* Kegelschnitts P^2 und eines demselben *eingeschriebenen* Kegelschnitts P_1^2. Die Kegelschnitte sind jedesmal von gleicher Art, entweder beide Ellipsen, oder beide Hyperbeln oder beide Parabeln.

„Sollen die beiden Kegelschnitte gleichen Inhalt haben, oder sollen die Producte ihrer Halbaxen gleich sein, so besteht der Ort ihres gemeinsamen Mittelpunkts p aus zwei verschiedenen Curven dritten Grads P^3 *und* P_1^3."

„Die eine dieser Curven, P^3, *ist in der Art speciell, dafs ihre drei Asymptoten sich in einem Punkte und zwar im Schwerpunkt des Dreiecks schneiden, und dafs dieselben zugleich Wendetangenten (Wendeasymptoten) und zudem den Seiten des Dreiecks parallel sind. Die drei hyperbelartigen Zweige der Curve liegen in den drei Räumen über den Seiten des Dreiecks und berühren die respectiven Seiten in ihren Mitten. Für jeden Punkt p in dieser Curve sind die zugehörigen Kegelschnitte Hyperbeln."*

„Die andere Curve, P_1^3, *besteht aus zwei getrennten Theilen, der*

eine ist ein sogenanntes Oval und der andere hat drei hyperbelartige Zweige; das Oval liegt innerhalb des Dreiecks und berührt dessen Seiten in ihren Mitten; der andere Theil hat die Seiten des dem gegebenen Dreieck parallel umschriebenen Dreiecks zu Asymptoten und seine drei Zweige liegen in den Scheitelwinkeln dieses Dreiecks. Für jeden Punkt p in diesem dreizweigigen Theil sind die Kegelschnitte Ellipsen, dagegen für jeden Punkt des Ovals sind dieselben Hyperbeln."

Das Oval liegt ganz innerhalb derjenigen Ellipse, welche mit ihm die Seiten des gegebenen Dreiecks ABC ebenfalls in ihren Mitten A_1, B_1, C_1 berührt. Die drei Segmente des Ovals über den Sehnen A_1B_1, A_1C_1, B_1C_1 sind gleich grofs, eben so, wie die Segmente der Ellipse; aber wie verhalten sich jene Segmente zu diesen? oder wie grofs ist die Fläche des ganzen Ovals?

Welchen Ort hat der Punkt p, wenn die beiden Kegelschnitte P^2, P_1^2 einander ähnlich sein sollen? (Besteht der Ort aus vier Geraden und einer Curve vierten Grads?)

Wie viele Punkte p giebt es, wenn beide Kegelschnitte irgend einem gegebenen Kegelschnitte ähnlich sein sollen? Giebt es, im Allgemeinen, weniger als 16 Lösungen?

2. Wenn zwei Kegelschnitte P^2 und P_1^2 den nämlichen Mittelpunkt p haben, so kann möglicherweise nur dann ein Dreieck dem einen ein- und zugleich dem andern umgeschrieben sein (1.), wenn dieselben gleichartig sind; ist also insbesondere einer derselben ein Kreis, so mufs der andere eine Ellipse (oder er kann auch ein Kreis) sein. Sobald aber irgend ein Dreieck ABC etwa dem Kegelschnitt P^2 eingeschrieben und zugleich dem Kegelschnitt P_1^2 umschrieben ist, so finden alsdann, nach *Poncelet's* Satz, allemal eine Schaar solcher Dreiecke statt, die alle dem P^2 ein- und zugleich dem P_1^2 umgeschrieben sind. Nehmen wir an, die Kegelschnitte befinden sich in diesem Falle und bezeichnen wir ihre Halbaxen beziehlich durch a und b, a_1 und b_1, so wie ferner jeden Kreis der einem der Dreiecke umschrieben ist, durch K^2, seinen Mittelpunkt durch m und seinen Radius durch r, so hat man unter andern folgende Sätze.

a. *Werden aus dem Mittelpunkte p auf die Seiten jedes der genannten Dreiecke ABC Perpendikel α, β, γ gefällt, so ändern sich zwar die vier Gröfsen α, β, γ und r von einem Dreieck zum andern, aber ihr Product bleibt constant, und zwar ist es stets dem halben Product*

46 *

der Halbaxen beider Kegelschnitte gleich, also

$$r\alpha\beta\gamma = \tfrac{1}{2}aba_1b_1.$$

Und fällt man aus dem Punkte p auf die Seiten derjenigen Dreiecke $A_1B_1C_1$, welche die Mitten der Seiten der Dreiecke ABC zu Ecken haben, Lothe α_1, β_1, γ_1, so geben auch diese Lothe mit dem zugehörigen Radius r ein constantes Product, nämlich es ist

$$r\alpha_1\beta_1\gamma_1 = \tfrac{1}{4}a_1^2b_1^2;$$

und somit haben die Producte der Perpendikel aus p auf die Seiten der zusammengehörigen Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ constantes Verhältnifs zu einander, nämlich

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha_1\beta_1\gamma_1} = \frac{2ab}{a_1b_1}.$$

b. Ist der den Dreiecken *ABC* umschriebene Kegelschnitt P^2 insbesondere ein Kreis und somit der andere, P_1^2, eine Ellipse, so ist der Radius des erstern der Summe oder dem Unterschied der Halbaxen der letztern gleich, also

$$a = b = r = a_1 \pm b_1,$$

und so ist das Product der aus dem Mittelpunkt p auf die Seiten jedes Dreiecks *ABC* gefällten Perpendikel constant, nämlich

$$\alpha\beta\gamma = \tfrac{1}{2}ra_1b_1 = \tfrac{1}{2}(a_1 \pm b_1)a_1b_1.$$

Also: *Beschreibt man aus dem Mittelpunkte p einer gegebenen Ellipse P_1^2 mit der Summe oder dem Unterschied ihrer Halbaxen einen Kreis P^2, so giebt es eine Schaar Dreiecke, welche dem Kreis ein- und zugleich der Ellipse umgeschrieben sind, und sodann ist das Product der aus dem Mittelpunkt auf die Seiten jedes Dreiecks gefällten drei Perpendikel gleich dem halben Product aus den Halbaxen der Ellipse in deren Summe oder Unterschied.* Im Falle, wo der Radius $\alpha = a_1 - b_1$ genommen wird, werden die Dreiecke imaginär, wenn nicht $a > b_1$ oder $a_1 > 2b_1$ ist. *Ferner ist auch das Product der aus dem Punkte p auf die Seiten der vorgenannten Dreiecke $A_1B_1C_1$ gefällten Lothe α_1, β_1, γ_1 constant, nämlich*

$$\alpha_1\beta_1\gamma_1 = \frac{a_1^2b_1^2}{4(a_1 \pm b_1)};$$

und für je zwei zusammengehörige Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ hat man demnach

$$\alpha\beta\gamma\alpha_1\beta_1\gamma_1 = \tfrac{1}{8}a_1^3b_1^3$$

und

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha_1\beta_1\gamma_1}=\frac{2(a_1\pm b_1)^2}{a_1 b_1}.$$

Die den Dreiecken ABC umschriebenen Kreise sind gleich, und ihre Mittelpunkte stehen gleichweit vom Punkte p ab; eben so hat der Höhenschnitt jedes Dreiecks ABC constanten Abstand vom Punkte p und eben so sein Schwerpunkt; u. s. w..

c. Ist hingegen der den Dreiecken ABC eingeschriebene Kegelschnitt P_1^2 ein Kreis und also der andere, P^2, eine Ellipse, *so ist der Radius von jenem die erste Proportionale zu den beiden Halbaxen der letztern und deren Summe oder Unterschied, also*

$$a_1=b_1=\frac{ab}{a\pm b},$$

und so sind die den Dreiecken umschriebenen Kreise K^2 alle gleich, also r constant, und zwar

$$r=\frac{ab}{2a_1}=\tfrac{1}{2}(a\pm b);$$

auch ist der Abstand der Mittelpunkte m dieser Kreise vom Mittelpunkte p constant, nämlich wenn man $mp=d$ setzt, so ist

$$d^2=r^2\pm 2ra_1=r^2\pm ab;$$

endlich ist auch das Product der drei Lothe α_1, β_1, γ_1 constant, welche aus dem Mittelpunkte p auf die Seiten derjenigen Dreiecke $A_1B_1C_1$ gefällt werden, welche den Dreiecken ABC parallel eingeschrieben sind, und zwar ist

$$\alpha_1\beta_1\gamma_1=\frac{a_1^4}{2ab}=\frac{a^4b^4}{2(a\pm b)^5},$$

und die Mittelpunkte der den Dreiecken $A_1B_1C_1$ umschriebenen Kreise stehen gleichweit vom Punkte p ab; eben so haben die Höhenschnitte der Dreiecke ABC gleichen Abstand vom Punkte p, desgleichen ihre Schwerpunkte.

Durch d^2-r^2 oder r^2-d^2 wird die Potenz des Punktes p in Bezug auf jeden der Kreise K^2 ausgedrückt, je nachdem p aufser- oder innerhalb K^2 liegt, und wird beziehlich die aus p an den Kreis gelegte Tangente oder die durch p gehende halbe kleinste Sehne desselben durch t bezeichnet, so drückt auch t^2 dieselbe Potenz aus. Da nun nach Vorstehendem

$$ab=\pm(d^2-r^2),$$

so ist also auch das Rechteck unter den Halbaxen der Ellipse P^2 derselben Potenz gleich; zudem sind diese Halbaxen einzeln

$$a = d + r \quad \text{und} \quad b = \pm(d - r).$$

Sollen die Inhalte der Ellipse P^2 und des Kreises P_1^2 ein gegebenes Verhältnifs zu einander haben, so wird die Form der Ellipse näher bestimmt, so wie auch das Verhältnifs der Kreise P_1^2 und K^2 zu einander, und auch umgekehrt. Soll z. B. die Ellipse P^2 mit dem Kreise P_1^2 gleichen Inhalt haben, so ist

$$a : b = 3 + \sqrt{5} : 2, \quad \text{und} \quad a_1 = 2r$$

und alle Kreise K^2 schneiden den Kreis P^2 rechtwinklig. Soll die Ellipse P^2 doppelt so grofs als der Kreis P_1^2 sein, so ist

$$a = b(2 + \sqrt{3}) \quad \text{und} \quad a_1 = r,$$

also alle Kreise K^2 dem Kreise P_1^2 gleich. Diese Fälle kommen nachher noch in Betracht.

d. *Sollen der Ellipse P^2 und dem mit ihr concentrischen Kreise P_1^2 nicht allein die vorgenannte Schaar Dreiecke ABC beziehlich ein- und umgeschrieben sein, sondern soll zugleich noch eine andere Schaar Dreiecke umgekehrt dem Kreise P_1^2 ein- und der Ellipse P^2 umgeschrieben sein, so müssen sich die Axen der Ellipse wie $3 + \sqrt{5}$ zu 2 verhalten und ihr Inhalt mufs dem des Kreises gleich sein, oder der Radius des letztern mufs die mittlere Proportionale zu den Halbaxen der erstern sein, also mufs*

$$a : b = 3 + \sqrt{5} : 2, \quad \text{und} \quad a_1^2 = ab,$$

oder

$$a_1 = \tfrac{1}{2}a(-1 + \sqrt{5}) = \tfrac{1}{2}b(1 + \sqrt{5}) = a - b$$

sein, und alsdann ist $a_1 = 2r$ und alle Kreise K^2 schneiden den Kreis P_1^2 rechtwinklig.

e. Sieht man bei der obigen Betrachtung (c.) den Kreis P_1^2 und einen der Kreise K^2 als gegeben an, so ist nicht nur das dort betrachtete *eine* Dreieck *ABC* dem ersten um- und dem andern eingeschrieben, sondern es findet eine neue Schaar solcher Dreiecke statt, welche gleicherweise dem Kreise P_1^2 um- und dem Kreise K^2 eingeschrieben sind. Oder allgemein:

Befinden sich zwei gegebene Kreise K^2 und P_1^2 in solcher Lage, dafs zwischen ihren Radien, r und a_1, und dem Abstande, d, ihrer Mittel-

punkte, m und p, von einander die Gleichung

$$d^2 = r^2 \pm 2ra$$

besteht, so findet eine Schaar Dreiecke ABC statt, welche dem Kreise K^2 ein- und zugleich dem Kreise P_1^2 umgeschrieben sind. Und dann folgt ferner:

Die Schaar Ellipsen P^2, welche den Dreiecken ABC respective umschrieben sind und mit dem Kreise P_1^2 den Mittelpunkt p gemein haben, sind alle gleich (congruent), ihre Halbaxen sind $d+r$ und $\pm(d-r)$, so dafs das Rechteck unter denselben der Potenz t^2 des Punktes p in Bezug auf den Kreis K^2 gleich ist, oder dafs derjenige Kreis um den Punkt p, welcher von dem Kreise K^2 entweder rechtwinklig oder im Durchmesser geschnitten wird, mit den Ellipsen gleichen Inhalt hat.

Zieht man aus dem Mittelpunkte p des eingeschriebenen Kreises P_1^2 Strahlen nach den Ecken jedes Dreiecks ABC und errichtet auf dieselben im Punkte p Lothe, so treffen diese die den Ecken gegenüber liegenden Seiten in solchen drei Punkten, welche in einer Geraden H liegen: *diese Gerade ist für alle Dreiecke eine und dieselbe; sie steht auf der Axe pm senkrecht, ihr Abstand vom Punkte p ist $=(r^2-a_1^2-d^2):2d$, und ihr Abstand von der Linie der gleichen Potenzen der Kreise K^2 und P_1^2 ist $=a_1^2:2d$. — Schneidet ein durch p gehender Strahl den Kreis K^2 in zwei Punkten, so sind sie Ecken zweier verschiedenen Dreiecke ABC, und die ihnen gegenüberliegenden Seiten treffen einander allemal auf derselben genannten Geraden H.* Nämlich jeder Punkt des Kreises K^2 ist Ecke eines Dreiecks ABC; liegt er aber innerhalb des Kreises P_1^2 (falls dieser jenen schneidet), so sind die anliegenden Seiten nebst den beiden andern Ecken imaginär, und nur die ihm gegenüberstehende Seite ist auch reell.

Der Ort der Höhenschnitte der Schaar Dreiecke ABC ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt, q, in der Axe mp liegt, eben so ist der Ort ihrer Schwerpunkte ein Kreis, dessen Mittelpunkt, s, in der Axe liegt; die vier Punkte m, s, p, q liegen harmonisch, und zwar im bestimmten Verhältnifs $ms:sp:mq:qp = 2:1:6:3$.

Die Seiten jedes Dreiecks ABC berühren den Kreis P_1^2 in je drei Punkten A_0, B_0, C_0; *die Schaar Dreiecke $A_0B_0C_0$ haben den Höhenschnitt gemein, und derselbe liegt in der Axe mp.*

Schneiden die gegebenen Kreise einander rechtwinklig, so mufs $a_1 = 2r$ sein, und dann haben die genannten Ellipsen mit dem Kreise P_1^2 gleichen Inhalt.

Sind insbesondere die Kreise gleich, so ist der Abstand ihrer Mittelpunkte von einander, d, der Seite des gleichseitigen Dreiecks gleich, welches einem derselben eingeschrieben ist, und alsdann haben die Ellipsen gerade doppelt so grofsen Inhalt, als jeder Kreis. — Dieser Fall zeichnet sich noch dadurch aus, *dafs er der einzig mögliche ist, wo zu den zwei gegebenen Kreisen zwei verschiedene Schaaren Dreiecke gehören;* nämlich hierbei giebt es eine zweite Schaar Dreiecke, welche dem Kreise K^2 um- und dem Kreise P_1^2 eingeschrieben sind.

f. Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die Seiten und Δ der Inhalt eines beliebigen Dreiecks ABC, ist r der Radius des ihm umschriebenen Kreises K^2, sind p, p_1, p_2, p_3 die Mittelpunkte und $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$ die Radien der ihm eingeschriebenen Kreise, sind ferner a und b, a_1 und b_1, a_2 und b_2, a_3 und b_3 die Halbaxen der mit diesen Kreisen concentrischen und dem Dreieck umschriebenen vier Ellipsen, und sind endlich t^2, t_1^2, t_2^2, t_3^2 die Potenzen der Punkte p, p_1, p_2, p_3 in Bezug auf den Kreis K^2, so ist

$$a b a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 = t^2 t_1^2 t_2^2 t_3^2 = 16 r^4 \mathfrak{r}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 = r^2 \mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2\mathfrak{c}^2 = 16 r^4 \Delta^2.$$

g. Wenn ein convexes Viereck einem Kreise ein- und zugleich einem Kreise umgeschrieben ist, *so wird jede Seite desselben durch ihren Berührungspunkt mit dem letztern Kreise so getheilt, dafs sich die Abschnitte wie die ihnen anliegenden Seiten verhalten.* Sind α und α_1, β und β_1, γ und γ_1, δ und δ_1 die Abschnitte der Seiten a, b, c, d nach ihrer Folge, so ist $\alpha\gamma = \alpha_1\gamma_1 = \beta\delta = \beta_1\delta_1 = r^2$, wo r der Radius des eingeschriebenen Kreises ist. — Bleiben die Seiten des Vierecks constant und eine derselben in ihrer Lage fest, während das Viereck verschoben wird, so ändert sich der eingeschriebene Kreis *und sein Mittelpunkt durchläuft einen neuen Kreis, dessen Mittelpunkt in der festen Seite liegt und dessen Radius* $\frac{\sqrt{abcd}}{a+c}$ *ist.* Dieser neue Kreis behält also dieselbe Gröfse, mag von den vier Seiten fest bleiben, welche man will.

h. Welche Eigenschaft müssen zwei Kegelschnitte im Allgemeinen haben, damit jedem solche Dreiecke umschrieben werden können, welche zugleich dem andern eingeschrieben sind? — Ist die Aufgabe auch für Vierecke, Fünfecke etc. möglich?

Können zwei Kegelschnitte so beschaffen sein, dafs dem einen Dreiecke umschrieben, welche dem andern eingeschrieben und zugleich diesem Viereke umschrieben, welche jenem eingeschrieben sind?

3. Unter den gesammten Kegelschnitten, welche einem gegebenen Dreieck umschrieben sind, giebt es je eine Schaar von Kegelschnitten, die unter sich ähnlich, oder die irgend einem gegebenen Kegelschnitte ähnlich sind.

Die Mittelpunkte jeder Schaar unter sich ähnlicher und dem gegebenen Dreieck umschriebener Kegelschnitte liegen in einer Curve vierten Grads, welche die Mitten der Dreiecksseiten zu Doppelpunkten hat, und die Schaar Kegelschnitte umhüllen eine andere Curve vierten Grads, welche die Ecken des Dreiecks zu Doppelpunkten und nur vier Doppeltangenten hat. — Unter solcher Kegelschnittschaar giebt es keine zwei, welche *ähnlichliegend* sind.

Welchos ist der Ort der Brennpunkte von solcher Kegelschnittschaar, und welche Curve wird von ihren Axen umhüllt?

Ist der gegebene Kegelschnitt, dem die Schaar ähnlich sein soll, sehr spezieller Art, wie Kreis, gleichseitige Hyperbel oder Parabel, so modificiren sich die beiden genannten Curven vierten Grads wesentlich.

4. *Jede Schaar unter sich ähnlicher und einem gegebenen Dreieck ABC eingeschriebener Kegelschnitte hat ihre Mittelpunkte in irgend einer Curve vierten Grads. Sind die Kegelschnitte ähnliche Ellipsen, so besteht die Ortscurve ihrer Mittelpunkte aus vier getrennten Theilen, und zwar aus vier Ovalen. Sind dieselben Parabeln, so besteht die Ortscurve aus vier Geraden, nämlich aus G_∞ und den drei Seiten des dem gegebenen Dreieck parallel eingeschriebenen Dreiseits $A_1B_1C_1$.*

Welche Curve wird von solcher Schaar Kegelschnitte umhüllt? In welcher Curve liegen ihre Brennpunkte, und welche Curve wird von ihren Axen umhüllt?

Die Glieder solcher Schaar Kegelschnitte sind zu vier und vier ähnlich liegend, d. h. es giebt im Allgemeinen je vier dem gegebenen Dreieck eingeschriebene Kegelschnitte, welche irgend einem gegebenen Kegelschnitte ähnlich und mit ihm ähnlichliegend sind.

Sind die vier Kegelschnitte Ellipsen, so sind ihre Mittelpunkte allemal die Ecken eines vollständigen Vierecks, dessen drei Paar Gegenseiten sich in den Ecken des gegebenen Dreiecks schneiden. Und umge-

kehrt: ***schneiden sich die Gegenseiten eines vollständigen Vierecks in den Ecken des gegebenen Dreiecks und liegt eine Ecke desselben innerhalb desjenigen Dreiecks, welches diesem parallel eingeschrieben ist, so sind seine Ecken die Mittelpunkte von vier Ellipsen genannter Art.*** — Ist eine Ecke des Vierecks gegeben, so sind die drei andern bestimmt und leicht zu finden; denn die Gegenseiten sind zu den Dreiecksseiten, welche ihrem Schnittpunkte anliegen, zugeordnet harmonisch.

Das Product der Halbaxen solcher vier Ellipsen, die dem gegebenen Dreieck eingeschrieben und ähnlich und ähnlichliegend sind, ist constant, und zwar der vierten Potenz der Dreiecksfläche gleich. Oder sind $\mathfrak{r}, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3$ die Radien derjenigen vier Kreise, welche mit den Ellipsen gleichen Inhalt haben, so ist $\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 = \triangle^2$.

Jede Seite des Dreiecks, wie etwa AB, wird von den Ellipsen in vier Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ berührt, wovon zwei, etwa $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$, zwischen A und B, dagegen die zwei andern $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{D}$ beziehlich jenseits A und B liegen; ihre Abstände von den Ecken A und B sind, in gewisser Ordnung genommen, paarweise gleich, nämlich es ist

$$A\mathfrak{A} = B\mathfrak{D} \quad \text{und} \quad A\mathfrak{D} = B\mathfrak{A}, \qquad A\mathfrak{B} = B\mathfrak{C} \quad \text{und} \quad A\mathfrak{C} = B\mathfrak{B}.$$

Bezeichnet man diese Abstände durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ und die aus den Mittelpunkten der Ellipsen auf die Seite AB gefällten Perpendikel durch c, c_1, c_2, c_3, ***so ist das Product dieser acht Gröfsen constant, und zwar der vierten Potenz der Dreiecksfläche gleich,*** also

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}cc_1c_2c_3 = \triangle^4.$$

Denkt man sich diejenigen vier Ellipsen, welche mit den vorigen die Ecken desselben Vierecks zu Mittelpunkten haben, aber dem Dreieck umschrieben sind, und ferner diejenige Ellipse, welche durch die Mitten der sechs Seiten des Vierecks (und durch die Ecken des Dreiecks) geht, so ist das Product der Halbaxen der vier erstern dividirt durch das Product der Quadrate der Halbaxen der letztern constant, und zwar $= 16\triangle^2$.

Die vorstehenden Sätze, die einfachheitshalber nur für die Ellipsen ausgesprochen sind, gelten analogerweise auch für Hyperbeln.

Seien A_1, B_1, C_1 die Mitten der Seiten des gegebenen Dreiecks ABC. Fällt man aus den Ecken irgend eines vollständigen Vierecks, dessen Gegenseiten sich in den Ecken des Dreiecks ABC schneiden, auf die Seiten

desselben die Perpendikel a, a_1, a_2, a_3; b, b_1, b_2, b_3; c, c_1, c_2, c_3 *und ebenso auf die Seiten des Dreiecks* $A_1B_1C_1$ *die Perpendikel* $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\beta, \beta_1, \beta_2, \beta_3$; $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$: *so ist allemal*

$$\frac{(a a_1 a_2 a_3 b b_1 b_2 b_3 c c_1 c_2 c_3)^2}{\alpha \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta \beta_1 \beta_2 \beta_3 \gamma \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3}$$

$$= 4^4 \frac{\triangle^4}{r^2} \cdot \frac{(a+a_1+a_2+a_3)^4 (b+b_1+b_2+b_3)^4 (c+c_1+c_2+c_3)^4}{(\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2 (\beta+\beta_1+\beta_2+\beta_3)^2 (\gamma+\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)^2}$$

$$= \frac{a_0^4 b_0^4 c_0^4}{\alpha_0^2 \beta_0^2 \gamma_0^2} \cdot \frac{\mathfrak{a}^4 \mathfrak{b}^4 \mathfrak{c}^4}{r^6},$$

wo a_0, b_0, c_0 *und* $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ *die Perpendikel aus dem Schwerpunkte der vier Ecken des Vierecks auf die Seiten der beiden Dreiecke sind und* r *der Radius des dem Dreieck ABC umschriebenen Kreises und* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ *dessen Seiten.* Die Vorzeichen in den Klammern werden nach Umständen bestimmt.

5. *„Die Mittelpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln, welche einem gegebenen Dreieck ABC eingeschrieben sind, liegen in einem Kreise, welcher den Höhenschnitt des Dreiecks zum Mittelpunkt hat, und welcher der äufsere Potenzkreis der beiden Kreise ABC und* $A_1B_1C_1$ *ist."*

So viel mir bekannt, ist dieser Satz neu, nur habe ich ihn schon vor zwölf Jahren gefunden. Es ist auffallend, dafs derselbe so lange verborgen bleiben konnte, trotzdem, dafs der analoge Satz über die dem Dreieck *umschriebenen* gleichseitigen Hyperbeln längst allgemein bekannt war.

Einem spitzwinkligen Dreieck kann keine (reelle) gleichseitige Hyperbel eingeschrieben sein.

6. *Die Axen aller einem gegebenen Dreieck eingeschriebenen Parabeln umhüllen eine specielle Curve dritter Klasse und vierten Grads, welche die Gerade* G_∞ *zur ideellen Doppeltangente und drei Rückkehrpunkte hat; nämlich die Curve ist eine bestimmte dreispitzige oder dreibogige Hypocycloide; ihre drei Rückkehrtangenten treffen sich im Mittelpunkte des dem Dreieck umschriebenen Kreises unter gleichen Winkeln,* $= 120^0$, *und sind gleich lang, und zwar dem dreifachen Radius des Kreises gleich; die drei Rückkehrpunkte liegen daher in einem mit dem letztern concentrischen Kreise; derselbe ist die Basis der Hypocycloide, und der sie erzeugende rollende Kreis ist gerade dem erstgenannten Kreise gleich.* — Die weitern merkwürdigen Eigenschaften dieser Cycloide

sind bereits in einem früheren Aufsatze dieses Journals, Band 53, angegeben.

7. Wenn in einer Ebene irgend zwei Dreiecke ABC und $\mathfrak{ABC}$ gegeben sind, so ist jeder Punkt p der Ebene zugleich der Mittelpunkt von zwei Kegelschnitten P^2 und P_1^2 die dem ersten, und von zwei Kegelschnitten $\mathfrak{P}^2$ und $\mathfrak{P}_1^2$ die dem andern Dreieck beziehlich um- und eingeschrieben sind.

Sollen entweder das Kegelschnittpaar

$$P^2 \text{ und } \mathfrak{P}^2, \quad \text{oder } P_1^2 \text{ und } \mathfrak{P}_1^2, \quad \text{oder } P^2 \text{ und } \mathfrak{P}_1^2$$

gleichen Inhalt, oder gleiches Axenproduct haben, so ist der Ort des Punktes p beziehlich eine Curve 9ten, 3ten, 6ten Grads.

Soll eines derselben drei Paare ein gegebenes Axenproduct haben, so ist die Zahl der Lösungen beziehlich 36, 9, 18.

Welches ist der Ort des Punktes p, wenn die Kegelschnitte eines der nämlichen drei Paare ähnlich sein sollen?

Und wie grofs ist die Zahl der Lösungen, wenn die Kegelschnitte eines der drei Paare ähnlich und ähnlichliegend sein sollen?

8. Einem beliebigen Viereck $ABCD$ sind eine einfache Schaar, oder ein Büschel Kegelschnitte, $B(P^2)$, umschrieben, deren Mittelpunkte in irgend einem bestimmten andern Kegelschnitte M^2 liegen. Die Form des Vierecks bedingt zum Theil die Art der Kegelschnitte P^2, so wie des Kegelschnittes M^2, nämlich wie folgt.

1°. Ist das Viereck convex, schneiden sich zwei Paar Gegenseiten desselben in ihren Verlängerungen, so ist der Kegelschnitt M^2 *Hyperbel* und die Kegelschnitte $B(P^2)$ bestehen aus einer Gruppe Hyperbeln und einer Gruppe Ellipsen, und aus zwei Parabeln; *die Mittelpunkte der Hyperbeln liegen im einen und die Mittelpunkte der Ellipsen liegen im andern Zweige der Hyperbel* M^2; die drei Schnittpunkte der drei Paar Gegenseiten des Vierecks liegen also immer im gleichen Zweige der Hyperbel M^2, nämlich im erstgenannten. Unter der Gruppe Hyperbeln ist allemal *eine, aber nur eine* gleichseitig.

2°. Ist das Viereck so beschaffen, dafs der Schnittpunkt jedes Paars Gegenseiten in der Verlängerung blos einer Seite liegt, oder dafs von den vier Punkten *A, B, C, D* einer innerhalb des durch die drei übrigen bestimmten Dreiecks liegt, so ist die Mittelpunktscurve M^2 *Ellipse*, und dann sind die Kegelschnitte $B(P^2)$ sämmtlich Hyperbeln, von denen, im Allgemeinen,

wieder nur eine gleichseitig ist; sind insbesondere zwei derselben gleichseitig, so sind es auch alle übrigen, und alsdann sind alle Paare von Gegenseiten des Vierecks zu einander rechtwinklig, und auch umgekehrt.

3°. Liegt insbesondere einer der vier Eckpunkte des Vierecks im Unendlichen, so ist M^2 *Parabel* und $B(P^2)$ besteht aus Hyperbeln und einer einzigen Parabel; von den erstern ist wieder nur *eine* gleichseitig. — Liegen zwei der vier Punkte im Unendlichen, so besteht $B(P^2)$ aus ähnlichen und ähnlichliegenden Hyperbeln, deren Mittelpunkte in einer Geraden liegen. — Sind zwei der vier Punkte imaginär, etwa C und D, so ist M^2 entweder Ellipse oder Hyperbel, nachdem die ideelle Sekante CD zwischen den Punkten A und B durchgeht oder nicht, und dem entsprechend besteht dann $B(P^2)$ nur aus Hyperbeln, oder aus einer Gruppe Hyperbeln, einer Gruppe Ellipsen und zwei Parabeln. Sind alle vier Punkte imaginär, so ist M^2 Hyperbel und $B(P^2)$ enthält eine Gruppe Hyperbeln, eine Gruppe Ellipsen und zwei Parabeln. — Zur obigen ersten Form des Vierecks (1°.) gehören auch noch die zwei besondern Fälle, wo ein Paar Seiten und wo zwei Paar Seiten unter sich parallel sind, und wobei M^2 in zwei Gerade zerfällt.

Beachtet man kürzehalber blos die beiden ersten Formen (1°. und 2°.), so sind folgende Angaben zu machen.

a. *Die dem Viereck umschriebenen Kegelschnitte sind paarweise einander ähnlich* (aber keine zwei sind ähnlich und ähnlichliegend). *Es giebt unter denselben zwei einzelne, welche keinem andern ähnlich sind; der eine derselben ist die gleichseitige Hyperbel, und der andere ist beim Viereck* (1°.) *diejenige Ellipse, welche dem Kreise am nächsten kommt, und beim Viereck* (2°.) *diejenige Hyperbel, welche am meisten von der gleichseitigen abweicht. Die Geraden, welche durch die Mittelpunkte der sich ähnlichen Paare gelegt werden, sind sämmtlich parallel, und mit ihnen sind auch die in den Mittelpunkten der zwei einzelnen Kegelschnitte an die Mittelpunktscurve M^2 gelegten Tangenten parallel. Die Mittelpunkte der beiden einzelnen Kegelschnitte sind somit die Endpunkte eines Durchmessers des Kegelschnittes M^2.* Da nun der Mittelpunkt des Kegelschnittes M^2, so wie der Mittelpunkt der genannten gleichseitigen Hyperbel leicht zu finden ist, so gelangt man also auch leicht zum Mittelpunkt der am meisten von der gleichseitigen abweichenden Hyperbel, oder der dem Kreise am nächsten kommenden Ellipse. Diese Ellipse war schon früher der Gegenstand einer von *Gergonne* gestellten Frage, welche ich im 2ten Bande

d. Journ., pag. 64 beantwortet habe. Durch die dortigen und gegenwärtigen Angaben wird die Lage dieser Ellipse vollkommen bestimmt.

b. *Von den dem Viereck umschriebenen Kegelschnitten haben, im Allgemeinen, je sechs gleichen Inhalt, oder gleiches Axenproduct. Es giebt unter denselben drei solche, deren Axenproducte relative Maxima oder Minima sind. Nämlich beim Viereck* (1°.) *giebt es eine Ellipse, deren Inhalt ein Minimum ist und zwei Hyperbeln deren Axenproducte relative Maxima sind; und beim Viereck* (2°.) *giebt es drei Hyperbeln, deren Axenproducte Maxima sind.* — Die Mittelpunkte dieser drei ausgezeichneten Kegelschnitte zu finden. Welches ist ihr Schwerpunkt? Und welches ist ihr Schwerpunkt, wenn ihnen Gewichte beigelegt werden, die sich verhalten wie die zugehörigen Axenproducte?

Unter der Schaar einem beliebigen Dreieck umschriebener gleichseitiger Hyperbeln giebt es drei, deren Axen Maxima sind. Welche Lage haben ihre Mittelpunkte?

9. Einem beliebigen vollständigen Vierseit $\mathfrak{ABCD}$ ist eine einfache Schaar Kegelschnitte, $B(\mathfrak{P}^2)$, eingeschrieben; die Mittelpunkte derselben liegen in einer Geraden $\mathfrak{M}$, welche durch die Mitten α, β, γ der drei Diagonalen des Vierseits geht. Der im Unendlichen liegende Punkt der Geraden $\mathfrak{M}$ heifse δ. Die Kegelschnitte ordnen sich, nach der Lage ihrer Mittelpunkte, in zwei Gruppen Ellipsen und in zwei Gruppen Hyperbeln. Die Strecken $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ der Geraden $\mathfrak{M}$ enthalten beziehlich die Mittelpunkte der beiden Gruppen Ellipsen, und in den Strecken $\beta\gamma$ und $\delta\alpha$ liegen die Mittelpunkte der beiden Gruppen Hyperbeln. Die Grenzpunkte α, β, γ, δ sind als die Mittelpunkte von vier Parabeln anzusehen.

a. *Die dem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte sind, im Allgemeinen, zu je vier einander ähnlich, und jede vier ähnliche gehören paarweise den beiden betreffenden Gruppen an, so dafs man also auch sagen kann, die Kegelschnitte jeder Gruppe, für sich betrachtet, seien paarweise ähnlich. In jeder Gruppe giebt es einen einzelnen Kegelschnitt, welcher keinem andern derselben Gruppe ähnlich ist, sein Mittelpunkt liegt zwischen den Mittelpunkten jedes Paars und sein Axenverhältnifs, $b:a$, ist ein Maximum. In jeder Gruppe Ellipsen befindet sich also eine solche, welche unter allen dem Kreise am nächsten kommt* (oder insbesondere selbst ein Kreis ist), *und in jeder Gruppe Hyperbeln giebt es eine, deren Axenverhältnifs ein Maximum oder ein Minimum ist.* — Diese

vier besondern Kegelschnitte zu finden, oder die Lage ihrer Mittelpunkte anzugeben.

Unter den gesammten Kegelschnitten $B(\mathfrak{P}^2)$ giebt es, im Allgemeinen, keine zwei, welche ähnlich und ähnlichliegend sind; wenn es aber insbesondere ein solches Paar giebt, so sind alsdann alle übrigen auch paarweise ähnlich und ähnlichliegend; nämlich von den genannten je vier ähnlichen Kegelschnitten, die paarweise zweien gleichartigen Gruppen angehören, ist alsdann jeder von der einen Gruppe einem von der andern Gruppe ähnlichliegend. Dieser besondere Fall findet statt, wenn zwei Diagonalen des Vierseits parallel sind.

Jedes Paar conjugirter Durchmesser eines der Kegelschnitte $B(\mathfrak{P}^2)$ ist, im Allgemeinen, mit einem Paar conjugirter Durchmesser irgend eines der übrigen parallel; daher haben also die Kegelschnitte auch paarweise parallele Axen. Jeder der Kegelschnitte hat aber ein besonderes Paar conjugirter Durchmesser, welches mit keinem Paar conjugirter Durchmesser irgend eines der übrigen parallel ist, und es giebt, im Allgemeinen, zwei Kegelschnitte, deren Axen dieses besondere Paar sind. — Beim genannten Falle, wo zwei Diagonalen des Vierseits parallel sind, hat jeder Kegelschnitt ein Paar conjugirter Durchmesser, wovon der eine diesen Diagonalen und der andere der dritten Diagonale parallel ist.

b. *Die dem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte haben zu je drei gleichen Inhalt oder gleiches Axenproduct; es giebt unter denselben zwei, eine Ellipse und eine Hyperbel, welchen ein Maximum des Axenproducts zukommt;* auf welche Weise die Mittelpunkte dieser zwei Kegelschnitte gefunden werden, habe ich schon 1844 in einem ins Italienische übersetzten Aufsatze angegeben (s. Bd. 30 d. Journ., pag. 97).

Unter der Schaar von Parabeln, welche einem gegebenen Dreiseit eingeschrieben sind, befinden sich drei, deren Parameter Maxima sind. Welche Lage haben diese drei Parabeln, oder welche Lage haben ihre Axen oder ihre Brennpunkte?

10. a. *Sind in gleicher Ebene zwei beliebige Vierecke $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ gegeben, so giebt es unter den ihnen umschriebenen Kegelschnittbüscheln $B(P^2)$ und $B(P_1^2)$, im Allgemeinen, nur ein Paar, P^2 und P_1^2, welche ähnlich und ähnlichliegend sind; giebt es, im besondern Falle, zwei solche Paare, so sind dann alle übrigen Glieder der beiden Büschel auch paarweise ähnlich und ähnlichliegend, und alsdann sind auch die*

beiden Mittelpunktscurven M^2 *und* M_1^2 (8.) *ähnlich und ähnlichliegend; und umgekehrt, sobald diese letztern ähnlich und ähnlichliegend sind, ist auch jedes Glied des einen Büschels mit irgend einem Gliede des andern Büschels ähnlich und ähnlichliegend, aber dabei brauchen die Vierecke selbst einander nicht ähnlich zu sein.*

b. *Sind in einer Ebene zwei beliebige Vierseit* $\mathfrak{ABCD}$ *und* $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1$ *gegeben, so giebt es unter den ihnen beziehlich eingeschriebenen Kegelschnittschaaren* $B(\mathfrak{P}^2)$ *und* $B(\mathfrak{P}_1^2)$, *im Allgemeinen, vier Paare* $\mathfrak{P}^2$ *und* $\mathfrak{P}_1^2$, *welche unter sich ähnlich und ähnlichliegend sind. Sind, im besondern Falle, fünf Paare ähnlich und ähnlichliegend, so ist jedes Glied der einen Schaar mit irgend einem Gliede der andern Schaar ähnlich und ähnlichliegend, und dann sind auch die drei Diagonalen und die durch ihre Mitten gehende Gerade* M (9.) *des einen Vierseits beziehlich denen des andern Vierseits parallel; und umgekehrt, sind die Diagonalen und die Geraden* M *und* M_1 *beider Vierseit beziehlich parallel, so sind die Kegelschnitte* $B(\mathfrak{P}^2)$ *und* $B(\mathfrak{P}_1^2)$ *paarweise ähnlich und ähnlichliegend.* Müssen bei diesem besondern Falle die Vierseit einander ähnlich sein?

c. *Sind in gleicher Ebene ein Viereck ABCD und ein Vierseit* $\mathfrak{ABCD}$ *gegeben, so giebt es zwei Paar unter sich ähnliche und ähnlichliegende Kegelschnitte,* P^2 *und* $\mathfrak{P}^2$, *welche denselben beziehlich um- und eingeschrieben sind.*

IV.

1. Durch fünf gegebene Elemente, oder durch fünf Bedingungen, ist, im Allgemeinen, ein Kegelschnitt bestimmt, nämlich entweder absolut, oder mehr oder weniger vieldeutig bestimmt. Bestehen die fünf Elemente nur aus Punkten und Tangenten des Kegelschnitts, so sind die Lösungen bekanntlich nicht zahlreich und geometrisch construirbar. Wählt man aber unter die gegebenen Elemente auch Normalen des Kegelschnittes, so werden die Lösungen schwieriger und ihre Zahl vermehrt sich mit der Zahl der Normalen, so dafs sie bis zu 102 ansteigt. Setzt man die Zahlen der gegebenen Punkte, Tangenten, Normalen beziehlich unter die Buchstaben *P, T, N,* und die Zahl der Lösungen unter *L,* so hat man für die 21 Fälle, welche mit diesen dreierlei Elementen möglich sind, folgende Tabelle:

	P	T	N	L
1.	5	.	.	1
2.	.	5	.	1
3.	4	1	.	2
4.	1	4	.	2
5.	3	2	.	4
6.	2	3	.	4
7.	4	.	1	3
8.	.	4	1	3
9.	3	1	1	6
10.	1	3	1	6
11.	2	2	1	8
12.	3	.	2	9
13.	.	3	2	9
14.	2	1	2	14
15.	1	2	2	14
16.	2	.	3	23
17.	.	2	3	23
18.	1	1	3	28
19.	1	.	4	51
20.	.	1	4	51
21.	.	.	5	102.

2. Werden die Ecken A, B, C, D einer gleichseitigen, an der Spitze rechtwinkligen, dreiseitigen Pyramide nach irgend einer Richtung auf eine beliebige Ebene projicirt, so ist die Frage, welche Relation zwischen den gegenseitigen Abständen der Projectionen A_1, B_1, C_1, D_1 statt finde?

3. Das Viereck zu bilden, dessen vier Seiten nebst der Geraden, welche die Mitten des einen Paars Gegenseiten verbindet, der Gröfse nach gegeben sind. — Eben so, wenn die vier Seiten und die Gerade, welche die Mitten der Diagonalen verbindet, gegeben sind.

4. Wenn in einer Ebene drei Gerade A, B, C in fester Lage gegeben sind, so soll eine vierte D so gezogen werden, dafs die beiden Dreiseit ACD und BCD gleichen gegebenen Inhalt haben. — Diese Aufgabe ist geometrisch lösbar; die Zahl der reellen Lösungen ist gröfser oder kleiner,

je nachdem der gegebene Inhalt sich zum Inhalte des gegebenen Dreiseits ABC verhält. Giebt es im günstigsten Falle sechs reelle Lösungen?

5. Sind in einer Ebene vier beliebige Gerade A, B, C, D in fester Lage gegeben, so soll eine solche fünfte E gefunden werden, dafs die drei Dreiseit EDC, EDB, EDA gleichen Inhalt haben. — Werden die gegebenen Geraden verwechselt, so findet die Aufgabe vierfach statt, aber jedesmal giebt es nur eine Lösung.

DATE DUE			

